

Equacions Diferencials (240131)

Examen Final – 27 Gener 2020

Temps: 2 h 15 min

Puntuacions:

- * **Test** (t1 – t6): respostes correctes +1 punt, incorrectes –0.25 punts (la suma total del test no serà negativa). Cal deixar ben clar quina resposta s'ha marcat, o si no se n'ha marcat cap. Les respostes ambigües es consideraran incorrectes.
- * **Qüestions** (q1 – q4): 1 punt cadascuna; les respostes errònies no resten. Heu d'escriure la resposta al requadre i una BREU justificació (tota resposta sense justificar és un 0).
- * **Problemes** (p1,p2): 3 punts cadascun

t1 Donat el PVI

$$X' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} X, \quad X(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

amb $y_0 < -x_0$, trobeu el límit de la solució $X(t)$ quan $t \rightarrow +\infty$.

- *(a) $\begin{pmatrix} 0 \\ -\infty \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} +\infty \\ 0 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} +\infty \\ -\infty \end{pmatrix}$ (e) cap de les anteriors

Solució:

El sistema és una sella, amb valors propis -1 i 2 , i vectors propis $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ respectivament. Tenim doncs $y = -x$ com a recta invariant d'entrada, i $x = 0$ com a recta invariant de sortida. Totes les solucions per sota de la recta $y = -x$ són asimptòtiques, quan $t \rightarrow \infty$, a la “part negativa” de la recta de sortida, sobre la qual la solució tendeix a $\begin{pmatrix} 0 \\ -\infty \end{pmatrix}$.

t2 Trobeu els valors del paràmetre $\mu \in \mathbb{R}$ per als quals el sistema lineal $X' = \begin{pmatrix} -2\mu & \mu \\ -4 & 3 - \mu \end{pmatrix} X$ és un focus atractor.

- (a) $\mu > 9$ *(b) $1 < \mu < 9$ (c) $\mu < 1$ (d) per a qualsevol valor de μ
 (e) cap de les anteriors

Solució:

La traça $T = 3 - 3\mu$ és negativa si $\mu > 1$, el determinant $D = 2\mu^2 - 2\mu$ és positiu si $\mu < 0$ o $\mu > 1$ i el discriminant $\Delta = \mu^2 - 10\mu + 9$ és negatiu si $1 < \mu < 9$.

t3 Donat el sistema lineal $x' = x + \mu y$, $y' = -2y$, trobeu μ per tal que la solució $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ que passa per $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ tendeixi a l'origen quan $t \rightarrow +\infty$.

- (a) $\mu \neq 1$ (b) $\mu = 1/2$ (c) $0 < \mu < 1$ *(d) $\mu = -6$ (e) cap de les anteriors

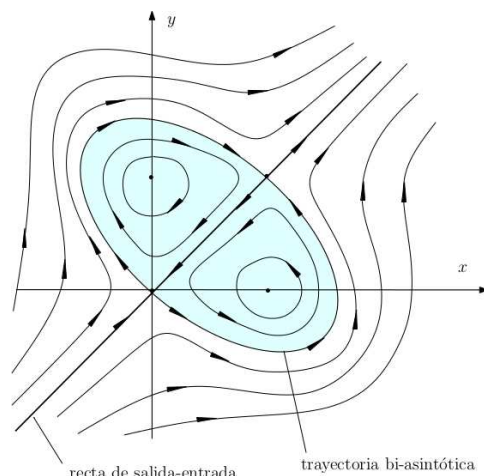
Solució:

La matriu del sistema té els valors propis 1 i -2 i per tant es tracta d'una sella. Llavors, caldrà que $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ sigui vector propi de valor propi -2 , la qual cosa s'esdevé només quan $\mu = -6$.

t4 Quin dels sistemes autònoms següents té el retrat de fase indicat a la figura?

- *(a) $x' = y(y - 1), y' = x(x - 1)$
- (b) $x' = y^2 - 1, y' = x^2 - 1$
- (c) $x' = x(y - 1), y' = y(x - 1)$
- (d) $x' = x(x - 1), y' = y(y - 1)$
- (e) $x' = y - x, y' = x - y$

Solució:



Dels sistemes proposats, només dos tenen punts d'equilibri compatibles amb els que veiem a la figura: $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$. Són el sistema $x' = y(y - 1), y' = x(x - 1)$ i el sistema $x' = x(x - 1), y' = y(y - 1)$. Si estudiem l'estabilitat del $(0, 0)$ en aquests dos sistemes, veiem que en el primer cas és inestable no repulsor (compatible amb la figura), i en el segon cas és atractor (incompatible amb la figura).

t5 El moviment 1D d'una partícula (de massa 1) sotmesa a una força $F(x)$ ve descrit per l'EDO de segon ordre $x'' = F(x)$. Suposem que $F(x) = -x(x - c)(x + c)$, essent $c \in \mathbb{R}$ una constant qualsevol. L'EDO genera un sistema no lineal al pla (x, y) , on $y = x'$. Quina de les següents afirmacions sobre aquest sistema és correcta?

- (a) sempre té 3 punts d'equilibri
- (b) és contractiu al semiplà superior ($y > 0$) i expansiu al semiplà inferior ($y < 0$)
- *(c) té com a quantitat conservada $E = \frac{y^2}{2} + \mathcal{U}(x)$, essent $\mathcal{U}(x) = -\int F(x) dx$ (una primitiva)
- (d) hi ha un punt d'equilibri entorn del qual les òrbites del sistema giren en sentit antihorari
- (e) cap de les anteriors

Solució:

El sistema associat a l'EDO és $x' = y, y' = F(x)$. Sobre aquest sistema, podem dir:

- * té tres punts d'equilibri si $c \neq 0$, però només un si $c = 0$;
- * el sistema conserva àrees, ja que la divergència del camp vectorial és 0;
- * la funció E (energia total) és quantitat conservada, ja que $W(x, y) = \frac{\partial E}{\partial x} \cdot y + \frac{\partial E}{\partial y} \cdot F(x) \equiv 0$;
- * en un sistema provinent d'una EDO de segon ordre, el sentit de gir només pot ser horari, ja que l'equació $x' = y$ ens diu que $x(t)$ sempre creix al semiplà superior i decreix al semiplà inferior.

t6 Sigui $u(x, t)$ una solució de l'EDP de calor 1D $u_t = k^2 u_{xx}$, on $x \in (0, 1)$ i $t \geq 0$, tal que la temperatura inicial és $u(x, 0) = x^3 - \frac{3x^2}{2}$. Què podem dir sobre el creixement o decreixement, respecte t , de la temperatura a l'instant $t = 0$, als punts $x = 1/4$ i $x = 3/4$?

- (a) es manté constant en $x = 1/4$ i $x = 3/4$
- (b) inicialment creix en $x = 1/4$ i decreix en $x = 3/4$
- *(c) inicialment decreix en $x = 1/4$ i creix en $x = 3/4$
- (d) inicialment decreix en $x = 1/4$ i $x = 3/4$
- (e) cap de les anteriors

Solució:

Només cal observar que $u_t(x, 0) = k^2 u_{xx}(x, 0) = k^2 (x^3 - 3x^2/2)'' = k^2 (6x - 3) \begin{cases} < 0 & \text{si } x < 1/2, \\ > 0 & \text{si } x > 1/2. \end{cases}$

q1 Considerem l'EDO $x'' + ax' + bx = 0$. Quant valen a i b per tal que l'EDO admeti $\sin 2t$ i $\cos 2t$ com a conjunt fonamental (base) de solucions?

Resposta: $a = 0, b = 4$

Justificació:

El polinomi característic de l'EDO, $p(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b$, ha de tenir $\pm 2i$ com a arrels.

q2 Considereu l'EDO de primer ordre $x' = x(1 - x) - h$, on $h \in \mathbb{R}$ és un paràmetre. Per a quins valors de h aquesta EDO té algun punt d'equilibri que no sigui atractor ni repulsor?

Resposta: $h = 1/4$

Justificació:

La funció $f(x) = x(1 - x) - h$ ha de tenir algun zero x_0 en el qual no canviï de signe. Per a això és necessari que $f(x_0) = f'(x_0) = 0$, la qual cosa implica que $x_0 = 1/2$ i $h = 1/4$. En aquest cas, el punt és inestable no repulsor.

q3 Trobeu la funció $T(t)$ per a la qual $u(x, t) = \cos(\pi x)T(t)$ és una solució del següent problema d'ones 1D,

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & x \in (0, 1) \quad t \in \mathbb{R} \\ u(x, 0) = 0 & x \in (0, 1) \\ u_t(x, 0) = \cos(\pi x) & x \in (0, 1) \\ u_x(0, t) = u_x(1, t) = 0 & t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Resposta: $T(t) = \frac{1}{\pi} \sin(\pi t)$

Justificació:

Imposem que $u(x, t) = \cos(\pi x)T(t)$ satisfaci l'EDP i les condicions addicionals:

- De l'equació d'ones $u_{tt} - u_{xx} = 0$ obtenim la identitat $[T''(t) + \pi^2 T(t)] \cos(\pi x) = 0$. Per tant, tenim l'EDO $T''(t) + \pi^2 T(t) = 0$.
- De la condició inicial $u(x, 0) = 0$, deduïm que $T(0) = 0$.
- De l'altra condició inicial $u_t(x, 0) = \cos(\pi x)$, deduïm que $T'(0) = 1$.
- Les condicions de contorn $u_x(0, t) = u_x(1, t) = 0$ es satisfan en qualsevol cas.

Hem obtingut un PVI per a $T(t)$ (EDO lineal de segon ordre, amb condicions inicials). Resolent aquest, obtenim $T(t) = \frac{1}{\pi} \sin(\pi t)$.

q4 Per a la solució $X(t) = (x(t), y(t))$ del sistema lineal $x' = 3x - 2y$, $y' = 4x - y$, tal que $(x(0), y(0)) = (1, 0)$, trobeu:

- el temps que trigarà en tallar de nou el semieix $\{(x, 0) : x > 0\}$,
- les coordenades d'aquest punt de tall.

Resposta: temps: π ; coordenades: $(e^\pi, 0)$

Justificació:

Tenim un focus repulsor. La solució general és

$$X(t) = c_1 e^t \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cos 2t - \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \sin 2t \right] + c_2 e^t \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \sin 2t + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cos 2t \right].$$

Imposant la condició inicial, $X(t) = e^t \begin{pmatrix} \cos 2t + \sin 2t \\ 2 \sin 2t \end{pmatrix}$. El tall és produït a l'instant π , i el punt de tall és

$$X(\pi) = \begin{pmatrix} e^\pi \\ 0 \end{pmatrix}.$$

p1 Determineu, en funció del paràmetre $\mu \in \mathbb{R}$, l'estabilitat de l'origen com a punt d'equilibri del sistema

$$x' = \mu x - 6y - x^3 - 2xy^2, \quad y' = 4x + \mu y - 3y^3 + x^2y.$$

[Ind.: Useu el mètode de linealització i, quan sigui necessari, el mètode de Lyapunov amb una funció del tipus $V(x, y) = ax^2 + by^2$ buscant valors adequats de $a, b > 0$.]

.....

Solució:

La matriu del sistema linealitzat és $D\mathbf{F}(0, 0) = \begin{pmatrix} \mu & -6 \\ 4 & \mu \end{pmatrix}$, que té determinant $D = \mu^2 + 24$ i traça $T = 2\mu$. Deduïm que l'origen és atractor si $\mu < 0$, i repulsor si $\mu > 0$.

El mètode de linealització no decideix quan $\mu = 0$, en què el sistema linealitzat és un centre. En aquest cas, apliquem el mètode de Lyapunov amb la funció $V(x, y)$ proposada (definida positiva si $a, b > 0$). Calculem la derivada temporal,

$$W(x, y) = \langle \nabla V, \mathbf{F} \rangle = 2(4b - 6a)xy - 2ax^4 + 2(b - 2a)x^2y^2 - 6by^4.$$

Prenent $a = 2$ i $b = 3$, ens queda $W = -4x^4 - 2x^2y^2 - 18y^4$, que és una funció definida negativa ja que $W(x, y) < 0$ si $(x, y) \neq (0, 0)$. Per tant, l'origen és atractor també quan $\mu = 0$.

En resum, l'origen és atractor si $\mu \leq 0$, i repulsor si $\mu > 0$.

p2 Trobeu la solució del següent problema d'ones 1D amb condicions de contorn mixtes

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & x \in (0, \pi) \quad t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = 0 & x \in (0, \pi) \\ u_t(x, 0) = \sin \frac{3x}{2} & x \in (0, \pi) \\ u(0, t) = u_x(\pi, t) = 0 & t \in \mathbf{R} \end{cases}$$

sabent que el problema amb valors a la frontera (PVF) associat té com a valors propis i funcions pròpies,

$$\lambda_n = -(n + \frac{1}{2})^2, \quad X_n(x) = \sin((n + \frac{1}{2})x), \quad n \geq 0.$$

.....

Solució:

Inicialment suprimim la condició no homogènia, $u_t(x, 0) = \sin \frac{3x}{2}$, i busquem solucions no trivials per separació de variables, $u(x, t) = X(x)T(t)$. Imposant que aquest producte sigui solució de l'EDP, obtenim les identitats

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{T(t)} = \lambda \in \mathbf{R},$$

que ens donen dues EDOs lineals de segon ordre (que de fet són la mateixa), per a $X(x)$ i $T(t)$, en funció de la constant λ . Afegim a l'EDO per a $X(x)$ unes condicions en $x = 0$ i $x = \pi$, que provenen de les condicions de contorn mixtes del problema, i tenim un PVF que té els valors propis i funcions pròpies que s'indiquen a l'enunciat.

Amb aquestes λ_n , resollem l'EDO per a $T(t)$ amb una condició inicial que ve de la condició inicial homogènia del problema,

$$T''(t) - \lambda_n T(t) = T''(t) + (n + \frac{1}{2})^2 T(t) = 0, \quad T(0) = 0,$$

que té com a solució $T_n(t) = \sin(n + \frac{1}{2})t$ (o qualsevol múltiple). Així doncs, els modes normals són:

$$u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t) = \sin((n + \frac{1}{2})x) \cdot \sin((n + \frac{1}{2})t), \quad n \geq 0.$$

Ara considerem una superposició de modes normals: $u(x, t) = \sum_{n \geq 0} \beta_n u_n(x, t) = \sum_{n \geq 0} \beta_n \sin((n + \frac{1}{2})x) \cdot \sin((n + \frac{1}{2})t)$ i imposem la condició no homogènia que havíem suprimit:

$$u_t(x, 0) = \sum_{n \geq 0} (n + \frac{1}{2}) \beta_n \sin((n + \frac{1}{2})x) = \sin \frac{3x}{2},$$

i per inspecció directa trobem que $\beta_1 = 2/3$, i $\beta_n = 0$ per a tot $n \neq 1$. Per tant, la solució és

$$u(x, t) = \frac{2}{3} \sin \frac{3x}{2} \cdot \sin \frac{3t}{2}.$$
