

Equacions Diferencials (240131)

Examen Final – 28 Juny 2019

Temps: 3 h

Puntuacions:

- * **Qüestions** (q1,q2,q3): 1 punt (amb precisió de 0.25); les respostes errònies no resten. Heu d'escriure la resposta al requadre i una BREU justificació (tota resposta sense justificar és un 0).
- * **Test** (t1,...,t5): respostes correctes +1 punt, incorrectes -0.25 punts (la suma total del test no serà negativa). Cal deixar ben clar quina resposta s'ha marcat, o si no se n'ha marcat cap. Les respostes ambigües es consideraran incorrectes.
- * **Problemes** (p1,p2): 6 punts cadascun

q1 Considerem el sistema 3D $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$, donat per la matriu $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Per a quins valors de a, b, c el sistema té l'origen com a punt d'equilibri inestable?

Resposta: És inestable per a qualsevol valor de a, b, c

Justificació:

El polinomi característic $\det A - \lambda I$ resulta ser $(a - \lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 1 - a)$ (l'obtenim fàcilment desenvolupant respecte la primera columna), i per tant no depèn ni de b ni de c . Els valors propis són $\lambda_1 = a$ i $\lambda_{2,3} = 1 \pm \sqrt{a}$. Si $a < 0$ tenim $\lambda_{2,3}$ com a valors propis complexos amb part real positiva. Si $a = 0$ tenim $\lambda_2 = \lambda_3$ com a valor propi real doble positiu. I si $a > 0$ tenim λ_1 com a valor propi real positiu. Com que en tots els casos tenim almenys un valor propi positiu o amb part real positiva, l'origen sempre és inestable.

q2 Donat el sistema $x' = y(x - 3)$, $y' = x(3 - x)$, sigui $(x(t), y(t))$ la solució que compleix la condició inicial $(x(0), y(0)) = (-4, 0)$. A quin punt tendeix aquesta solució quan $t \rightarrow \infty$? [Ind.: Comenceu trobant tots els punts d'equilibri del sistema. A més, calculeu $xx' + yy'$ per trobar una quantitat conservada del sistema.]

Resposta: $(3, -\sqrt{7})$

Justificació:

Els punts d'equilibri són el $(0, 0)$ i tots els de la recta $x = 3$. Del sistema deduïm que sempre es compleix que $xx' + yy' = 0$, amb la qual cosa $V(x, y) = x^2 + y^2$ és una quantitat conservada, i per tant totes les òrbites es troben sobre circumferències $x^2 + y^2 = \text{const.}$ En particular, l'òrbita amb condició inicial al punt $(-4, 0)$ és continguda a la circumferència $x^2 + y^2 = 16$. Aquesta circumferència talla la recta de punts d'equilibri $x = 3$ als punts $(3, \pm\sqrt{7})$. Substituint $(x, y) = (-4, 0)$ al sistema, obtenim $(x', y') = (0, -28)$, amb la qual cosa la solució recorre (un tros de) la circumferència en senti antihorari, i tendeix al punt $(3, -\sqrt{7})$.

q3 Considereu el següent problema de calor 1D no homogeni, amb condicions de contorn de Neumann constants

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 2x - L & x \in (0, L), \quad t > 0, \\ u(x, 0) = f(x), & x \in (0, L), \\ u_x(0, t) = -a, & t > 0, \\ u_x(L, t) = a, & t > 0, \end{cases}$$

essent $f(x)$ una funció donada, i a una constant positiva. Si $T(t)$ és la temperatura mitjana a l'interval $(0, L)$ i a l'instant t , justifiqueu si creix, decreix o es conserva.

Resposta: creix

Justificació:

Derivem la temperatura mitjana $T(t) = \frac{1}{L} \int_0^L u(x, t) dx$, i obtenim:

$$T'(t) = \frac{1}{L} \int_0^L u_t(x, t) dx = \frac{1}{L} \int_0^L [u_{xx}(x, t) + 2x - L] dx = \frac{1}{L} (u_x(L, t) - u_x(0, t)) + 0 = \frac{2a}{L} > 0.$$

També es pot raonar que $-u_x(0, t) = u_x(L, t) = a$ correspon a un flux d'entrada positiu pels dos costats, i que la font de calor donada per $2x - L$ té mitjana 0 i per tant no fa modificar la temperatura mitjana $T(t)$.

-
- t1** Sigui $(x(t), y(t))$ la solució del PVI $x' = 2x + y$, $y' = -x$, $x(0) = 1$, $y(0) = 0$. Trobeu el valor de $x(1)$.
- (a) $1 + e$ (b) e (c) $1 - e$ *(d) $2e$ (e) cap de les anteriors
-

Solució:

La matriu A del sistema té el valor propi $\lambda = 1$ doble, i no és diagonalitzable. El vector propi corresponent és $v = (1, -1)$. Una solució de $(A - I)u = v$ (no única) és $u = (1, 0)$. Per tant la solució general és $(x(t), y(t)) = C_1(1, -1)e^t + C_2((1, 0)e^t + (1, -1)te^t)$. Imposant les condicions inicials obtenim $C_1 = 0$ i $C_2 = 1$. Així tenim $x(t) = e^t + te^t$, i per tant $x(1) = 2e$.

-
- t2** Donada l'EDO de segon ordre $x'' - 2x' + (1 + \mu^2)x = 0$, classifiqueu el sistema de primer ordre associat segons els valors del paràmetre μ .
- (a) node propi repulsor si $\mu \neq 0$ i node impropio repulsor si $\mu = 0$
*(b) focus repulsor si $\mu \neq 0$ i node impropio repulsor si $\mu = 0$
(c) node propi repulsor per a tot μ
(d) focus atractor per a tot μ
(e) cap de les anteriors
-

Solució:

Els valors propis de la matriu són les arrels del polinomi característic de l'EDO, $p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + (1 + \mu^2)$, que són $\lambda_{1,2} = 1 \pm i\mu$. Per tant, si $\mu \neq 0$ tenim un focus repulsor. Per a $\mu = 0$, tenim $\lambda = 1$ com a valor propi i la matriu no és diagonalitzable, i per tant tenim un node impropio repulsor.

-
- t3** Donat el sistema $x' = -3x$, $y' = y^3 - y$, quina condició ha de complir un punt (x_1, y_1) per pertànyer a la conca d'atracció d'un punt d'equilibri atractor? [Ind.: Recordeu que un punt (x_1, y_1) pertany a la conca d'atracció d'un punt d'equilibri si la solució del PVI amb la condició inicial al punt (x_1, y_1) tendeix al punt d'equilibri quan $t \rightarrow \infty$.]
- (a) $|x_1| > 1$ *(b) $|y_1| < 1$ (c) $|y_1| > 1$ (d) $|x_1| < 1$ (e) cap de les anteriors
-

Solució:

El sistema desacobra en dues EDOs de primer ordre independents, per a $x(t)$ i $y(t)$. La primera té $x_0 = 0$ com a punt d'equilibri, el qual és clarament un atractor global. La segona té com a punts d'equilibri els zeros de la funció $g(y) = y^3 - y$, que són $y = -1, 0, 1$. Tenim $g'(\pm 1) > 0$ i $g'(0) < 0$, de la qual cosa deduïm que només el punt $y_0 = 0$ és atractor, i la seva conca d'atracció està formada pels punts y_1 amb $-1 < y_1 < 1$. Considerant de nou el sistema, l'únic punt d'equilibri atractor és $(x_0, y_0) = (0, 0)$, i la seva conca d'atracció està formada pels punts (x_1, y_1) amb x_1 qualsevol i $-1 < y_1 < 1$.

t4 Apliquem el mètode de Lyapunov amb la funció $V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, al sistema $x' = y + x^3$, $y' = -x + by^3$ on $b \neq 0$ és un paràmetre. Què deduïm sobre l'estabilitat del $(0, 0)$ com a punt d'equilibri?

- (a) atractor si $b > 0$, repulsor si $b < 0$ (b) estable no atractor per a qualsevol $b \neq 0$
 *(c) repulsor si $b > 0$, no decideix si $b < 0$ (d) no decideix si $b > 0$, atractor si $b < 0$
 (e) cap de les anteriors

Solució:

El camp vectorial és $F(x, y) = (y + x^3, -x + by^3)$, i el $(0, 0)$ és punt d'equilibri ja que $F(0, 0) = 0$. Calculem:

$$W(x, y) = \langle \nabla V(x, y), F(x, y) \rangle = x(y + x^3) + y(-x + by^3) = x^4 + by^4,$$

que és definida positiva si $b > 0$, i indefinida si $b < 0$. En el primer cas tenim un punt repulsor, i en el segon cas no decideix.

t5 Sigui $u(x, t)$ la solució del problema següent, corresponent a una corda vibrant infinita amb fricció,

$$\begin{cases} u_{tt} + 2u_t - u_{xx} = \sin t + \cos x, & x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) = -5 \cos x, & x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x, 0) = \cos x, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Trobeu l'acceleració inicial $u_{tt}(x, 0)$. [Ind.: No cal usar la fórmula de D'Alembert.]

- (a) $\sin x$ *(b) $4 \cos x$ (c) $-3 \cos x$ (d) 0 (e) cap de les anteriors

Solució:

Directament, usem l'EDP i substituïm $t = 0$, tot aplicant les condicions inicials:

$$\begin{aligned} u_{tt} &= -2u_t + u_{xx} + \sin t + \cos x, \\ u_{tt}(x, 0) &= -2u_t(x, 0) + u_{xx}(x, 0) + 0 + \cos x = -2 \cos x + 5 \cos x + \cos x = 4 \cos x. \end{aligned}$$

p1

Una solució d'equilibri per a l'equació de la calor $u_t - \alpha^2 u_{xx} = 0$ és aquella que no varia amb t , és a dir, de la forma $u_0(x)$.

- (a) Trobeu tots els equilibris que satisfan $u_0(0) = U_1$ i $u_0(L) = U_2$. [Ind.: Comenceu comprovant que tots els equilibris són de la forma $u_0(x) = Ax + B$.]
- (b) Resoleu el següent problema de calor amb condicions de Dirichlet constants,

$$\begin{cases} u_t - \alpha^2 u_{xx} = 0, & x \in (0, 1), \quad t > 0, \\ u(x, 0) = 75, & x \in (0, 1), \\ u(0, t) = 20, & t > 0, \\ u(1, t) = 60, & t > 0. \end{cases}$$

[Ind.: Useu $w(x, t) = u(x, t) - u_0(x)$, on $u_0(x)$ és la solució d'equilibri associada a les condicions de contorn.]

.....
Solució:

- (a) Substituint $u_0(x)$ a l'EDP, obtenim $0 - \alpha^2 u_0''(x) = 0$, i per tant $u_0''(x) = 0$. Així, resulta $u_0(x) = Ax + B = U_1 + \frac{U_2 - U_1}{L} x$.
- (b) En aquest cas, la solució d'equilibri és $u_0(x) = 20 + 40x$. Restant aquesta solució, obtenim per a $w(x, t)$ un problema amb una única condició no homogènia,

$$\begin{cases} w_t - \alpha^2 w_{xx} = 0, & x \in (0, 1), \quad t > 0, \\ w(x, 0) = 55 - 40x, & x \in (0, 1), \\ w(0, t) = w(1, t) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

Suprimint la condició no homogènia i aplicant separació de variables, $w(x, t) = X(x) \cdot T(t)$, obtenim els problemes següents:

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0, & T'(t) - \lambda \alpha^2 T(t) = 0 \\ X(0) = X(1) = 0, \end{cases}$$

El primer és un PVF, que té els valors propis $\lambda_n = -(n\pi)^2$, $n \geq 1$, amb funcions pròpies $X_n(x) = \sin n\pi x$. Amb els valors propis obtinguts resollem el segon problema, i obtenim $T_n(t) = e^{-(n\pi\alpha)^2 t}$. La solució buscada serà una combinació lineal infinita dels modes normals $w_n(x, t) = X_n(x) \cdot T_n(t)$, $n \geq 1$, és a dir,

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n e^{-(n\pi\alpha)^2 t} \sin n\pi x,$$

on cal escollir els d_n a partir de la condició inicial sobre $w(x, 0)$. Així els d_n han de ser coeficients de la sèrie de Fourier de sinus, a l'interval $[0, 1]$, de la funció $f(x) = 55 - 40x$. Aplicant la fórmula dels coeficients, obtenim

$$d_n = 2 \int_0^1 (55 - 40x) \sin n\pi x \, dx = \frac{10}{n\pi} (11 - 3(-1)^n), \quad n \geq 1.$$

D'aquesta manera obtenim l'expressió de $w(x, t)$ i, sumant-hi la solució d'equilibri $u_0(x)$, obtenim la solució demanada:

$$u(x, t) = 20 + 40x + \frac{10}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{11 - 3(-1)^n}{n} e^{-(n\pi\alpha)^2 t} \sin n\pi x$$

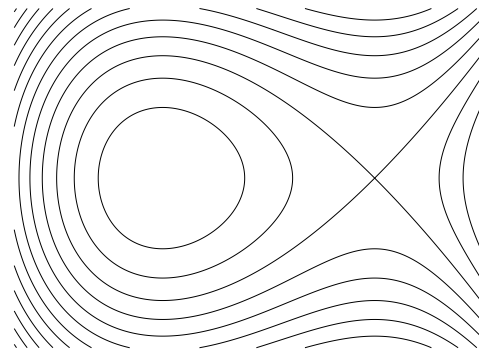
Considerem el sistema d'EDOs $x' = \frac{\partial H}{\partial y}$, $y' = -\frac{\partial H}{\partial x}$, definit per una funció donada $H(x, y)$.

- (a) Estudieu si $H(x, y)$ pot ser una quantitat conservada del sistema.

Per als apartats següents, considereu la funció

$$H(x, y) = \frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3},$$

Podeu veure a la figura les corbes de nivell d'aquesta funció.



- (b) Calculeu tots els punts d'equilibri del sistema i determineu-ne l'estabilitat.
- (c) Si imposem una condició inicial de la forma $(x(0), y(0)) = (x_0, 0)$, per a quins valors de x_0 la solució $(x(t), y(t))$ és periòdica? Mateixa pregunta, per a una condició inicial de la forma $(x(0), y(0)) = (0, y_0)$. Quin és el sentit de gir d'aquestes solucions?
- (d) Ara imposem la condició inicial $(x(0), y(0)) = (1/2, -1/\sqrt{6})$. Existeix algun $t^* > 0$ tal que $y(t^*) = 0$? En cas afirmatiu, trobeu el valor de $x(t^*)$. Quin és, si existeix, el límit de $x(t)$ quan $t \rightarrow -\infty$ i quan $t \rightarrow \infty$?

Solució:

- (a) El sistema ve donat pel camp vectorial $F(x, y) = (H_y, -H_x)$. La funció $H(x, y)$ és quantitat conservada, ja que $\langle \nabla H, F \rangle = H_x \cdot H_y + H_y \cdot (-H_x) \equiv 0$ (de fet, cal demanar que sigui $\mathcal{C}^2$ perquè el camp vectorial sigui $\mathcal{C}^1$). Així doncs, totes les òrbites són contingudes en corbes de nivell $H(x, y) = \text{const}$.
- (b) Els punts d'equilibri són els zeros de $F(x, y) = (y, x^2 - x)$. Tenim així el sistema d'equacions $y = 0$, $x^2 - x = 0$, que té com a solucions els punts $(0, 0)$ i $(1, 0)$.

Per determinar-ne l'estabilitat, comencem aplicant el mètode de linealització i, si no decideix, el de Lyapunov. La matriu jacobiana és

$$DF(x, y) = \begin{pmatrix} H_{xy} & H_{yy} \\ -H_{xx} & -H_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2x - 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- * Tenim $DF(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, que ens diu que el sistema linealitzat és un centre i, per tant, el mètode de linealització no decideix per al punt d'equilibri $(0, 0)$. Però pel fet que $H(x, y)$ és una quantitat conservada, deduïm que el punt $(0, 0)$ és estable no atractor (de fet, un centre no lineal).
- * Tenim $DF(1, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, que ens diu que el sistema linealitzat és una sella i, per tant, el punt d'equilibri $(1, 0)$ és inestable no repulsor per al sistema no lineal.

Com a dades rellevants per als apartats següents, observem que el punt $(0, 0)$ és un mínim relatiu de la funció $H(x, y)$ amb el valor $H(0, 0) = 0$, i que el punt $(1, 0)$ n'és un punt de sella amb el valor $H(1, 0) = 1/6$.

- (c) Com podem veure a la figura, tota la regió definida per les desigualtats $H(x, y) < 1/6$, $x < 1$ està formada per òrbites periòdiques, que giren entorn del punt d'equilibri $(0, 0)$. El sentit de gir sempre és horari ja que $F(0, y) = (y, 0)$ per a tot y .

Així, només cal demanar que la condició inicial $(x_0, 0)$ o $(0, y_0)$ pertanyi a aquesta regió, la qual cosa es compleix si $-1/2 < x_0 < 1$ o $-1/\sqrt{3} < y_0 < 1/\sqrt{3}$ respectivament.

- (d) Tenim $H(1/2, -1/\sqrt{6}) = 1/6$, i per tant l'òrbita recorreguda per aquesta solució $(x(t), y(t))$ es troba sobre la corba de nivell del punt de sella $(1, 0)$, i més concretament sobre el "loop" que té origen i final en aquest punt. Per tant, podem dir que $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} x(t) = 1$.

A més, com que la condició inicial donada es troba sobre el semiplà inferior ($y_0 < 0$) i "loop" també es recorre en sentit horari, tindrem un instant $t^* > 0$ tal que $y(t^*) = 0$, amb $x(t^*) = -1/2$ (intersecció de la corba de nivell amb la recta $y = 0$).