

Equacions Diferencials (240131)

Examen Final – 18 Gen 2019

Temps: 3h

Puntuacions: Test: t1–t5 → correctes +1 punt, incorrectes −0.25 punts;**Problemes:** p1 → 3 punts; p2 → 2.5 punts; p3 → 4.5 punts; p4 → 5 punts.**Nota important:** A les qüestions de test, cal deixar ben clar quina resposta s'ha marcat, o si no se n'ha marcat cap. Les respostes ambigües es consideraran incorrectes.**t1** Sigui $(x(t), y(t))$ la solució del sistema

$$x' = y^2 - y, \quad y' = x^2 - x,$$

determinada per la condició inicial $(x(0), y(0)) = (2, 0)$. Què podem assegurar sobre la component $x(t)$?

- *(a) té un màxim relatiu estricta a l'instant $t = 0$
- (b) té un mínim relatiu estricta a l'instant $t = 0$
- (c) és constant
- (d) té un punt d'inflexió a l'instant $t = 0$
- (e) cap de les anteriors

Solució:L'equació $x' = y^2 - y$ implica que $x'(0) = y(0)^2 - y(0) = 0$. L'equació $y' = x^2 - x$ implica que $y'(0) = x(0)^2 - x(0) = 2^2 - 2 = 2$. Derivem i avaluem a l'instant $t = 0$ la primera equació:

$$x''(0) = 2y(0)y'(0) - y'(0) = -2.$$

Com que $x'(0) = 0$ i $x''(0) < 0$, la component $x(t)$ té un màxim relatiu estricta a l'instant $t = 0$.**t2** Trobeu els valors del paràmetre a per als quals el sistema

$$x' = ax + ay, \quad y' = -ax - y$$

és un focus atractor.

- (a) $a = 1$
- (b) $a < 0$
- *(c) $a < -1/3$
- (d) $a < 1/2$
- (e) cap de les anteriors

Solució:La matriu del sistema és $A = \begin{pmatrix} a & a \\ -a & -1 \end{pmatrix}$. La traça $a - 1$ ha de ser negativa ($a < 1$), el determinant $-a + a^2$ ha de ser positiu ($a < 0$ o bé $a > 1$) i el discriminant $-3a^2 + 2a + 1$ ha de ser negatiu ($a < -1/3$ o bé $a > 1$). Les tres condicions es compleixen si $a < -1/3$.**t3** L'EDO

$$x'' - 3x' + 2x = t e^t$$

té una solució particular de la forma $x_p(t) = (at + bt^2)e^t$. Quant valen a i b ?

- (a) $a = 3$ i $b = -1$
- (b) $a = 1$ i $b = 2/3$
- (c) $a = -1$ i $b = 2/3$
- *(d) $a = -1$ i $b = -1/2$
- (e) cap de les anteriors

Solució:Imposem que $x_p(t)$ compleixi l'equació:

$$\begin{aligned} t e^t &= x_p'' - 3x_p' + 2x_p \\ &= (2a + 2b + (a + 4b)t + bt^2) e^t - 3(a + (a + 2b)t + bt^2) e^t + 2(at + bt^2) e^t \\ &= (2b - a - 2bt) e^t \Rightarrow a = -1, \quad b = -1/2. \end{aligned}$$

t4 Considereu l'EDO

$$x'' - \mu(1 - x^2)x' + x = 0.$$

Per a quins valors del paràmetre μ és estable el punt d'equilibri $(x, x') = (0, 0)$?

- (a) $\mu < -1$ (b) $\mu > 0$ (c) $\mu \geq 1$ *(d) $\mu \leq 0$ (e) cap de les anteriors

.....

Solució:

Escrivim l'EDO com a sistema:

$$x' = y, \quad y' = -x + \mu(1 - x^2)y.$$

La matriu del sistema linealitzat al $(0, 0)$ és $DF(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \mu \end{pmatrix}$, que té traça $T = \mu$ i determinant $D = 1$. Per tant, el $(0, 0)$ és atractor (i per tant estable) si $\mu < 0$, i repulsor (i per tant inestable) si $\mu > 0$. El cas $\mu = 0$ no es pot decidir a partir del sistema linealitzat, però en aquest cas el propi sistema original és lineal i correspon a un centre, i per tant és estable també en aquest cas.

t5 Sigui $u(x, t)$ una solució de l'equació de la calor no homogènia $u_t - u_{xx} = 2x$ per a $x \in (0, \pi)$, $t > 0$. En quin cas podem assegurar que la temperatura mitjana $T(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi u(x, t) dx$ és creixent?

- *(a) $u_x(\pi, t) - u_x(0, t) > -\pi^2$
 (b) $u_x(0, t) + u_x(\pi, t) > \pi$
 (c) $u(\pi, t) - u(0, t) > 2\pi^2$
 (d) $u(0, t) + u(\pi, t) > -2\pi$
 (e) cap de les anteriors

.....

Solució:

Derivant sota signe integral,

$$T'(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi u_t(x, t) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (u_{xx}(x, t) + 2x) dx = \frac{1}{\pi} (u_x(\pi, t) - u_x(0, t) + \pi^2),$$

i hem de demanar que $T'(t)$ sigui positiva.

p1 Considereu el sistema $\boxed{x' = -2x + 2y, \quad y' = 2x + y}$.

- Classifiqueu-lo.
- Doneu la solució general.
- Calculeu la solució amb les condicions inicials $x(0) = y(0) = 5$.
- Si les condicions inicials són $x(0) = 5, y(0) = a$, trobeu els valors de a , si existeixen, per al quals la solució tendeix a l'origen quan $t \rightarrow \infty$.

Solució:

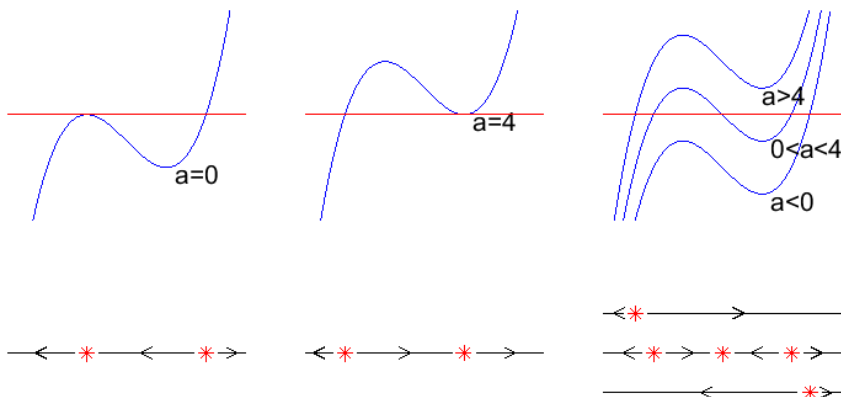
- La matriu del sistema $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ té els valors propis 2 i -3 i, per tant, es tracta d'una sella.
- Els vectors propis de valor propi 2 i -3 són (1, 2) i (2, -1) respectivament i, per tant la solució general és $(x(t), y(t)) = c_1 e^{2t}(1, 2) + c_2 e^{-3t}(2, -1)$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.
- Imposem les condicions inicials: $(x(t), y(t)) = c_1(1, 2) + c_2(2, -1) = (5, 5)$, i obtenim $c_1 = 3$ i $c_2 = 1$. Per tant, la solució és $(x(t), y(t)) = 3e^{2t}(1, 2) + e^{-3t}(2, -1)$.
- Cal que el punt (5, a) es trobi sobre la recta atractora, que és la generada pel vector propi de valor propi negatiu: (2, -1). Deduïm que $a = -5/2$.

p2 Considerem l'EDO autònoma de primer ordre $\boxed{x' = x^3 - 3x^2 + a}$, on $a \in \mathbb{R}$ és un paràmetre.

- Si $a = 0$, tenim dos punts d'equilibri. Trobeu-los i determineu la seva estabilitat, i dibuixeu el retrat de fase de l'EDO.
- Si $a = 4$, tenim dos punts d'equilibri. Trobeu-los i determineu la seva estabilitat, i dibuixeu el retrat de fase de l'EDO.
- Si $a \neq 0, 4$, trobeu el nombre de punts d'equilibri de l'EDO i digueu a quins dels intervals $I_1 = (-\infty, 0)$, $I_2 = (0, 2)$, $I_3 = (2, \infty)$ es troben situats. En funció de a , determineu l'estabilitat d'aquests punts d'equilibri i dibuixeu el retrat de fase de l'EDO. [Nota: No intenteu trobar els punts d'equilibri; anomenau-los $z_1, z_2, \dots$ i localitzeu-los.]

Solució:

- Considerant la funció $f_0(x) = x^3 - 3x^2 = x^2(x - 3)$, els seus zeros són els punts d'equilibri: 0 i 3. Dibuixant la gràfica de $f_0(x)$, deduïm que el punt d'equilibri 0 és inestable no repulsor, i que el punt d'equilibri 3 és repulsor.
- Ara considerem la funció $f_4(x) = x^3 - 3x^2 + 4 = (x + 1)(x - 2)^2$, i tenim -1 i 2 com a punts d'equilibri. La gràfica de $f_4(x)$ és com la de l'apartat (a), desplaçada verticalment una distància 4, i deduïm que el punt d'equilibri -1 és repulsor, i que el punt d'equilibri 2 és inestable no repulsor.
- En general, l'EDO ve definida per la funció $f_a(x) = f_0(x) + a$. Aleshores:
 - * Si $a < 0$, tenim un únic punt d'equilibri $z_1 \in I_3$, el qual és repulsor.
 - * Si $0 < a < 4$, tenim tres punts d'equilibri $z_1 \in I_1$, $z_2 \in I_2$, $z_3 \in I_3$, els quals són repulsor, atractor i repulsor, respectivament.
 - * Si $a > 4$, tenim un únic punt d'equilibri $z_1 \in I_1$, el qual és repulsor.



p3 Considereu el sistema $x' = 2xy, \quad y' = 1 - x^2 - y^2$.

- Trobeu els seus quatre punts d'equilibri.
- Classifiquen el sistema linealitzat en cadascun dels punts d'equilibri.
- Si algun dels sistemes linealitzats de (b) és un centre, indiqueu-ne el sentit de gir i el període.
- Si algun dels sistemes linealitzats de (b) és una sella, indiqueu-ne les direccions d'entrada i sortida.
- Existeix un valor de α per al qual $V(x, y) = x^3 + 3xy^2 + \alpha x$ sigui una quantitat conservada del sistema inicial?
- Estudieu l'estabilitat dels quatre punts d'equilibri del sistema inicial usant, si és necessari, l'apartat (e).

Solució:

- Resolent el sistema $2xy = 0, \quad 1 - x^2 - y^2 = 0$ obtenim els quatre punts d'equilibri: $(1, 0), (-1, 0), (0, 1)$ i $(0, -1)$.
- La matriu del sistema linealitzat al punt (x, y) és $A = \begin{pmatrix} 2y & 2x \\ -2x & -2y \end{pmatrix}$. Aquesta matriu té traça $T = 0$ i determinant $D = 4(x^2 - y^2)$. Per tant,
 - * $(x, y) = (\pm 1, 0) \Rightarrow T = 0$ i $D = 4 > 0 \Rightarrow$ el sistema linealitzat és un centre;
 - * $(x, y) = (0, \pm 1) \Rightarrow D = -4 < 0 \Rightarrow$ el sistema linealitzat és una sella.
- Si $(x, y) = (1, 0)$ o $(x, y) = (-1, 0)$, llavors $Q_A(\lambda) = \lambda^2 - T\lambda + D = \lambda^2 + 4$ i els VAPs són $\lambda_{\pm} = \pm 2i$. Per tant, el període és $T = 2\pi/2 = \pi$.

Si $(x, y) = (1, 0)$, llavors $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ i el sentit de gir és horari ja que $b > 0$.

Si $(x, y) = (-1, 0)$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ i el sentit de gir és antihorari ja que $b < 0$.
- Els càlculs són immediats, perquè les matrius del sistemes linealitzats corresponents a les dues selles són diagonals.

Si $(x, y) = (0, 1)$, llavors $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, i per tant $\mathbf{v}_1 = (1, 0)$ és la sortida i $\mathbf{v}_2 = (0, 1)$ és l'entrada.

Si $(x, y) = (0, -1)$, llavors $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, i per tant $\mathbf{v}_1 = (1, 0)$ és l'entrada i $\mathbf{v}_2 = (0, 1)$ és la sortida.
- La derivada temporal de $V(x, y)$ és

$$W(x, y) = \frac{\partial V}{\partial x} x' + \frac{\partial V}{\partial y} y' = (3x^2 + 3y^2 + \alpha) 2xy + 6xy(1 - x^2 - y^2) = (2\alpha + 6)xy.$$

Per tant, $V(x, y)$ és una quantitat conservada si i només si $\alpha = -3$.

- La linealització permet decidir l'estabilitat dels punts d'equilibri amb sistemes linealitzats tipus sella. Per tant, $(0, 1)$ i $(0, -1)$ són punts d'equilibri inestables del sistema inicial.
 En canvi, la linealització no permet decidir l'estabilitat dels punts d'equilibri amb sistemes linealitzats tipus centre. Per a l'estudi dels punts $(1, 0)$ i $(-1, 0)$, apliquem el teorema de Lyapunov amb la quantitat conservada $V(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 3x$. Sabem que si un sistema no lineal té una quantitat conservada i un punt d'equilibri amb un sistema linealitzat tipus centre, llavors aquest punt d'equilibri és un centre no lineal (és a dir, totes les trajectòries suficientment properes al punt d'equilibri giren i descriuen corbes tancades al voltant del punt d'equilibri). Per tant, $(0, 1)$ i $(0, -1)$ són punts d'equilibri estables no atractors del sistema inicial.

Considereu els tres problemes següents, tots al domini $x \in (0, 1), t > 0$ (observeu que el primer problema correspon a una EDP no lineal):

$$(1) \begin{cases} u_t - u_{xx} - (u_x)^2 = 0 \\ u(x, 0) = \ln(2 + 2x) \\ u(0, t) = 0 \\ u(1, t) = \ln 3 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} v_t - v_{xx} = 0 \\ v(x, 0) = f(x) \\ v(0, t) = \alpha \\ v(1, t) = \beta \end{cases} \quad (3) \begin{cases} w_t - w_{xx} = 0 \\ w(x, 0) = g(x) \\ w(0, t) = 0 \\ w(1, t) = 0 \end{cases}$$

- (a) Trobeu una funció $f(x)$ i constants α, β , tals que el canvi de funció $v(x, t) = e^{u(x, t)}$ transformi el problema (1) en el problema (2).
 (b) Trobeu funcions $v_0(x)$ i $g(x)$ tals que el canvi de funció $w(x, t) = v(x, t) - v_0(x)$ transformi el problema (2) en el problema (3).
 (c) Resoleu el problema (3).
 (d) Resoleu el problema (2) i a continuació el problema (1), i trobeu $\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t)$.

Solució:

- (a) Escrivint $u = \ln v$ i fent derivades parcials,

$$u_t = \frac{v_t}{v}, \quad u_x = \frac{v_x}{v}, \quad u_{xx} = \frac{v_{xx}v - (v_x)^2}{v^2},$$

i obtenim com a nova EDP,

$$0 = u_t - u_{xx} - (u_x)^2 = \frac{v_t}{v} - \frac{v_{xx}v - (v_x)^2}{v^2} - \left(\frac{v_x}{v}\right)^2 = \frac{v_t - v_{xx}}{v},$$

que equival a $v_t - v_{xx} = 0$. D'altra banda, les noves condicions addicionals són

$$f(x) = v(x, 0) = e^{u(x, 0)} = 2 + 2x, \quad \alpha = v(0, t) = e^{u(0, t)} = 1, \quad \beta = v(1, t) = e^{u(1, t)} = 3.$$

- (b) Per mantenir la mateixa EDP però amb condicions de contorn homogènies, escollim $v_0(x)$ com una solució particular de l'EDP tal que $v_0(0) = 1$ i $v_0(1) = 3$. Tindrem $-v_0''(x) = 0$ i per tant $v_0(x)$ serà un polinomi de grau 1, concretament $v_0(x) = 1 + 2x$. Aleshores, tindrem $g(x) = f(x) - v_0(x) \equiv 1$.
 (c) Suprimint la condició no homogènia i aplicant separació de variables, $w(x, t) = X(x) \cdot T(t)$, obtenim els problemes

$$\begin{aligned} X''(x) - \lambda X(x) &= 0, & x \in (0, 1), \\ X(0) = X(1) &= 0, \end{aligned} \quad \begin{aligned} T'(t) - \lambda T(t) &= 0, & t > 0. \end{aligned}$$

Tenim els valors propis $\lambda_n = -n^2\pi^2$, $n \geq 1$, i solucions no trivials $X_n(x) = \sin(n\pi x)$, $T_n(t) = e^{-n^2\pi^2 t}$. Escrivint la solució com a combinació lineal (infinita) dels modes normals $w_n(x, t) = X_n(x) \cdot T_n(t)$, amb uns coeficients γ_n , i imposant la condició inicial $w(x, 0) = g(x) = 1$ (que havíem suprimit), obtenim els γ_n com a coeficients d'una sèrie de sinus,

$$\gamma_n = 2 \int_0^1 \sin(n\pi x) dx = -\frac{2}{n\pi} \cos(n\pi x)|_0^1 = \frac{2}{n\pi} (1 - (-1)^n) = \begin{cases} \frac{4}{(2k+1)\pi} & \text{si } n = 2k+1 \text{ senar } (k \geq 0). \\ 0 & \text{si } n \text{ parell,} \end{cases}$$

Per tant, obtenim

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n e^{-n^2\pi^2 t} \sin(n\pi x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} e^{-(2k+1)^2\pi^2 t} \sin((2k+1)\pi x).$$

- (d) Desfem els dos canvis,

$$\begin{aligned} v(x, t) &= v_0(x) + w(x, t) = 1 + 2x + \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} e^{-(2k+1)^2\pi^2 t} \sin((2k+1)\pi x), \\ u(x, t) &= \ln v(x, t) = \ln \left(1 + 2x + \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} e^{-(2k+1)^2\pi^2 t} \sin((2k+1)\pi x) \right) \end{aligned}$$

i, finalment,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = \ln(1 + 2x).$$