

[Test]

[Nota important: respostes correctes +1 punt, incorrectes -0.25 punts]

t1 Donat el sistema d'EDOs $\begin{cases} x' = -3x, \\ y' = y - y^3, \end{cases}$ què han de complir les condicions inicials (x_0, y_0) per tal que la solució $(x(t), y(t))$ tendeixi al punt d'equilibri $(0, 0)$ quan $t \rightarrow +\infty$?

- (a) x_0 qualsevol, $y_0 > 0$ (b) $x_0 = 0$, y_0 qualsevol
 (c) x_0 qualsevol, $y_0 \in [-1, 1]$ *(d) x_0 qualsevol, $y_0 = 0$
 (e) cap de les anteriors

Solució:

El sistema desacobla en dues EDOs de primer ordre separades: $x' = -3x$ i $y' = y - y^3$. La primera té $x = 0$ com a punt d'equilibri atractiu i, de fet, per a qualsevol condició inicial x_0 resulta $x(t) = x_0 e^{-3t} \rightarrow 0$ si $t \rightarrow \infty$. En canvi, la segona té $y = 0$ com a punt d'equilibri repulsor, i només per a $y_0 = 0$ podem tenir $y(t) \rightarrow 0$ si $t \rightarrow \infty$.

t2 Donat el PVI següent, que depèn d'un paràmetre $\mu \in \mathbb{R}$,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \mu & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

trobeu el valor de μ per al qual la solució $(x(t), y(t))$ tendeix al $(0, 0)$ quan $t \rightarrow \infty$.

- (a) 2 (b) -3 *(c) 4 (d) -1 (e) cap de les anteriors

Solució:

Es tracta d'un sistema lineal homogeni, amb matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \mu & 1 \end{pmatrix}$, que té traça $T = 2$ i determinant $D = 1 - \mu$. La propietat demanada només es pot complir si hi ha almenys un valor propi amb part real negativa, cosa que amb $T > 0$ només pot passar si $D < 0$, és a dir, si el sistema és una *sella*. Caldrà doncs que $\mu > 1$. Llavors, perquè la solució $(x(t), y(t))$ tendeixi al $(0, 0)$ quan $t \rightarrow \infty$, la seva condició inicial $(-1, 2)$ s'ha de trobar sobre la direcció de valor propi negatiu. Calculant $A \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 - \mu \end{pmatrix}$, deduïm que s'ha de complir $2 - \mu = -2$, i per tant $\mu = 4$.

t3 L'EDO $x'' + x' - 6x = -12t$ té una solució particular de la forma $x_p(t) = at + b$. Quant valen a i b ?

- (a) $a = -1$, $b = 2/3$ (b) $a = 3$, $b = -1$ (c) $a = 0$, $b = 1/6$ *(d) $a = 2$, $b = 1/3$
 (e) cap de les anteriors

Solució:

Substituint directament $x_p(t) = at + b$ a l'EDO, s'ha de complir la igualtat $0 + a - 6(at + b) = -12t$ per a tot t . Igualant coeficients, tenim $-6a = -12$, $a - 6b = 0$, d'on deduïm que $a = 2$, $b = 1/3$.

- t4** Donat el sistema d'EDOs $\begin{cases} x' = x^3 + x + x^2y, \\ y' = y^3 - x^3, \end{cases}$ què podem deduir sobre el punt d'equilibri $(0, 0)$ si apliquem el mètode de Lyapunov amb la funció $V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$?
- (a) és atractor *(b) és repulsor (c) el mètode no dóna informació (d) és estable no atractor
- (e) cap de les anteriors

Solució:

La funció $V(x, y)$ té un mínim local estricte al $(0, 0)$ i obtenim com a derivada temporal la funció

$$W(x, y) = x(x^3 + x + x^2y) + y(y^3 - x^3) = x^4 + x^2 + y^4,$$

que clarament és definida positiva al $(0, 0)$. Per tant, el punt d'equilibri és repulsor.

- t5** Sigui $u(x, t)$ la solució de

$$\begin{cases} u_{tt} - 4u_{xx} = 0 \\ u(x, 0) = \frac{1}{1+x^2}, \quad u_t(x, 0) = 1 \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R},$$

Quin és el valor de $u(0, 1)$?

- (a) 0 *(b) 6/5 (c) 1 (d) -1 (e) cap de les anteriors

Solució:

Usant la fórmula de D'Alembert, amb $c = 2$, obtenim

$$u(x, t) = \frac{1/2}{1+(x-2t)^2} + \frac{1/2}{1+(x+2t)^2} + \frac{1}{4} \int_{x-2t}^{x+2t} 1 \, dy = \frac{1/2}{1+(x-2t)^2} + \frac{1/2}{1+(x+2t)^2} + t$$

i per tant $u(0, 1) = 6/5$.

- (a) Donada l'EDO de segon ordre $x'' + 3\alpha x' + 2x = 0$, escriviu-la com un sistema de primer ordre i classifiqueu-lo en funció del paràmetre $\alpha \in \mathbb{R}$.
- (b) Suposant ara que $\alpha = 1$, resoleu l'EDO de (a) amb les condicions inicials $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$.
- (c) També en el cas $\alpha = 1$, representeu, en el pla (x, x') , el retrat de fase del sistema de primer ordre. Ressalteu clarament (per exemple amb un traç més fort) l'òrbita recorreguda per la solució trobada a l'apartat (b), tot indicant quins quadrants visita i en quin ordre.

Solució:

- (a) Escrivint $y = x'$, el sistema de primer ordre equivalent és

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

amb $T = -3\alpha$, $D = 2$, $\Delta = T^2 - 4D = 9\alpha^2 - 8$. Estudiant els signes de T i Δ (amb $D > 0$) obtenim la classificació següent:

- * $\alpha \in (-\infty, -\sqrt{8}/3) \implies$ Node propi repulsor
- * $\alpha = -\sqrt{8}/3 \implies$ Node impropï repulsor
- * $\alpha \in (-\sqrt{8}/3, 0) \implies$ Focus repulsor
- * $\alpha = 0 \implies$ Centre
- * $\alpha \in (0, \sqrt{8}/3) \implies$ Focus atractor
- * $\alpha = \sqrt{8}/3 \implies$ Node impropï atractor
- * $\alpha \in (\sqrt{8}/3, \infty) \implies$ Node propi atractor

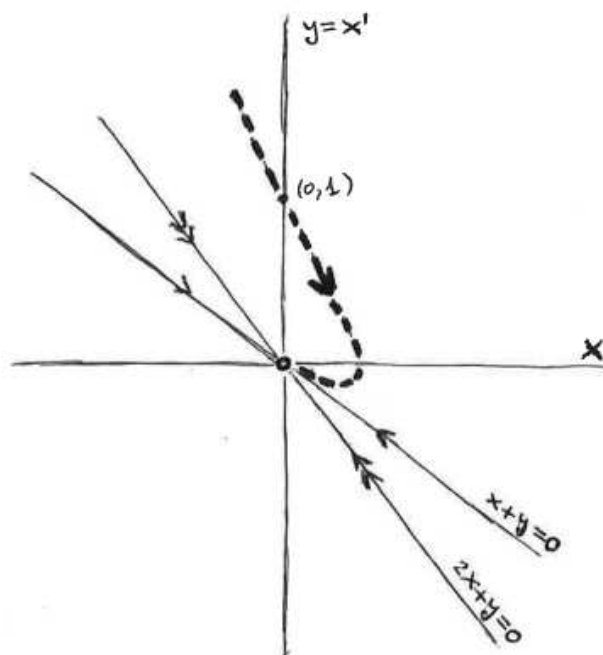
(tot comprovant que, en els casos $\alpha = \pm\sqrt{8}/3$, la matriu no diagonalitza).

- (b) L'equació característica associada és $m^2 + 3m + 2 = 0$, amb les arrels $m = -1, -2$, i per tant la solució general de l'EDO és $x(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t}$. Imposant les condicions inicials, obtenim $C_1 = 1$ i $C_2 = -1$, i per tant la solució demanada és $x(t) = e^{-t} - e^{-2t}$.

- (c) En el cas $\alpha = 1$, el sistema lineal de primer ordre és un node atractor. Els valors propis són -1 i -2 , i els vectors propis associats $(1, -1)$ i $(1, -2)$ ens donen les direccions lenta i ràpida, respectivament.

Aquestes direccions divideixen el pla en quatre sectors. D'aquests, el sector definit per $y > -x$, $y > -2x$ és el que conté el punt $(0, 1)$, i per tant també l'òrbita sencera $(x(t), x'(t))$. Quan $t \rightarrow \infty$, l'òrbita s'aproparà a l'origen de manera tangent a la direcció lenta. A més, multiplicant la matriu per la condició inicial $(0, 1)$ obtenim el vector tangent en aquest punt: $(1, -3)$.

Amb aquestes informacions, deduïm que l'òrbita que passa pel punt $(0, 1)$ visita successivament els quadrants segon, primer i quart. Vegeu la figura.



p2

[5 punts]

Considereu el sistema
$$\begin{cases} x' = -y(x+1) \\ y' = x(y+2) \end{cases}$$

- (a) Trobeu tots els seus punts d'equilibri.
- (b) Per a cada punt d'equilibri, calculeu el sistema linealitzat i classifiqueu-lo.
- (c) Si algun dels sistemes linealitzats de (b) és un centre, indiqueu-ne el sentit del gir i el període.
- (d) Existeix un valor de α per al qual $V(x, y) = x + y - \ln(x+1) - \alpha \ln(y+2)$ sigui una quantitat conservada?
- (e) Estudieu l'estabilitat dels punts d'equilibri del sistema inicial usant, si és necessari, l'apartat (d).

Solució:

- (a) El sistema d'equacions $-y(x+1) = x(y+2) = 0$ té com a solució els punts $(0, 0)$ i $(-1, -2)$.
- (b) Calculem la matriu del sistema linealitzat a cadascun dels punts d'equilibri:

$$DF(x, y) = \begin{pmatrix} -y & -x-1 \\ y+2 & x \end{pmatrix}, \quad DF(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad DF(-1, -2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Així doncs, el sistema linealitzat al punt $(0, 0)$ és un centre, i al punt $(-1, -2)$ és una sella.

- (c) Al punt $(0, 0)$, calculant per exemple $DF(0, 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, deduïm que el sentit de gir és antihorari. A més, usant que els valors propis de la matriu $DF(0, 0)$ són $\pm i\beta$ amb $\beta = \sqrt{2}$, trobem que el període de les òrbites és $p = 2\pi/\beta = \boxed{\pi\sqrt{2}}$.
- (d) La derivada temporal de $V(x, y)$ al llarg de les trajectòries és

$$\langle \nabla V(x, y), F(x, y) \rangle = \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) \cdot (-y(x+1)) + \left(1 - \frac{\alpha}{y+2}\right) \cdot x(y+2) = (2 - \alpha)x \equiv 0$$

quan $\boxed{\alpha = 2}$, cas en què $V(x, y)$ serà una quantitat conservada.

- (e) Només podem aplicar el mètode de linealització al punt $(-1, -2)$, obtenint que és inestable no repulsor ja que el sistema linealitzat és una sella.

En canvi al punt $(0, 0)$, en què el sistema linealitzat és un centre, apliquem el mètode de Lyapunov amb la funció $V(x, y)$ de l'apartat (d) amb $\alpha = 2$. Aquesta és una funció definida positiva al $(0, 0)$, ja que té un mínim relatiu estricte al $(0, 0)$ (té el $(0, 0)$ com a punt crític, i la matriu hessiana en aquest punt té valors propis positius), i com que és una quantitat conservada deduïm que el $(0, 0)$ és estable no atractor (de fet, un centre no lineal).

Considerem els dos problemes de contorn següents, corresponents a una EDP homogènia (semblant a l'equació de Laplace):

$$(1) \begin{cases} u_{xx} + u_{yy} - u = 0, \\ u(x, 0) = 0, \\ u(x, 1) = 0, \\ u(0, y) = 0, \\ u(1, y) = g(y), \end{cases} \quad \begin{matrix} x \in (0, 1), \\ y \in (0, 1), \end{matrix} \quad (2) \begin{cases} v_{xx} + v_{yy} - v = 0, \\ v(x, 0) = 0, \\ v(x, 1) = 0, \\ v(0, y) = g(y), \\ v(1, y) = 0, \end{cases} \quad \begin{matrix} x \in (0, 1), \\ y \in (0, 1), \end{matrix}$$

on $g(y)$ és una funció donada.

- (a) Resoleu el problema de contorn (1) usant separació de variables.

[Ind.: La solució tindrà la forma $\sum d_n X_n(x) Y_n(y)$, amb uns coeficients d_n que dependran de g en una forma que cal explicitar.]

[Nota: No cal que resolgueu explícitament el problema de valors a la frontera associat.]

- (b) Trobeu també la solució del problema de contorn (2), a partir de l'apartat (a).

[Ind.: Podeu optar entre adaptar la resolució feta a l'apartat (a) o bé, si no heu fet l'apartat (a), justificar la relació entre les solucions $u(x, y)$ de (1) i $v(x, y)$ de (2).]

Solució:

- (a) En el problema (1), prescindint de la condició de contorn per a $x = 1$ (l'única no homogènia) i substituint $u(x, y)$ per $X(x)Y(y)$, ens queden dos problemes en una variable:

$$\begin{cases} X''(x) - X(x) = -\lambda X(x), & x \in (0, 1) \\ X(0) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} Y''(y) = \lambda Y(y), & y \in (0, 1) \\ Y(0) = Y(1) = 0 \end{cases}$$

És conegut que el PVF que hem obtingut per a $Y(y)$ té els valors propis $\lambda_n = -n^2\pi^2$, $n \geq 1$, i les funcions pròpies $Y_n(y) = \sin n\pi y$. Usant això, les solucions del problema per a $X(x)$ són (múltiples de) $X_n(x) = \sinh(\sqrt{1 + n^2\pi^2} x)$. Fent combinacions lineals obtenim

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \sinh(\sqrt{1 + n^2\pi^2} x) \cdot \sin n\pi y$$

i cal ajustar els coeficients d_n de manera que $u(1, y) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \sinh(\sqrt{1 + n^2\pi^2}) \cdot \sin n\pi y = g(y)$. Usant les fórmules de Fourier (sèrie de sinus) obtenim

$$d_n = \frac{2}{\sinh(\sqrt{1 + n^2\pi^2})} \int_0^1 g(y) \sin n\pi y dy, \quad n \geq 1$$

- (b) En realitat, l'únic que s'ha de fer és canviar les funcions $X_n(x) = \sinh(\sqrt{1 + n^2\pi^2} x)$ (que s'anul·len a $x = 0$) per $X_n(x) = \sinh(\sqrt{1 + n^2\pi^2} (1 - x))$ perquè s'anul·lin a $x = 1$. D'aquesta manera, obtindrem

$$v(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{d}_n \sinh(\sqrt{1 + n^2\pi^2} (1 - x)) \cdot \sin n\pi y,$$

i ajustant els coeficients de manera que $v(0, y) = g(y)$, ens queda que els coeficients $\tilde{d}_n$ són els mateixos d_n que a l'apartat (a). Per tant, obtenim la solució només canviant x per $1 - x$.

Alternativament, també podem veure directament que si $u(x, y)$ és solució de (1), aleshores

$$v(x, y) = u(1 - x, y)$$

és la solució de (2), ja que satisfà l'EDP (ho veiem aplicant la regla de la cadena) i les condicions de contorn:

$$\begin{cases} v_{xx}(x, y) + v_{yy}(x, y) - v(x, y) = u_{xx}(1 - x, y) + u_{yy}(1 - x, y) - u(1 - x, y) = 0, \\ v(x, 0) = u(1 - x, 0) = 0, \\ v(x, 1) = u(1 - x, 1) = 0, \\ v(0, y) = u(1, y) = g(y), \\ v(1, y) = u(0, y) = 0. \end{cases}$$