

[Test]

[Nota important: respostes correctes +1 punt, incorrectes -0.25 punts]

t1 Donada l'EDO $x' = 4x^2 + 12x + 9$, determineu l'estabilitat del seu únic punt d'equilibri.

- (a) estable no atractor (b) atractor (c) repulsor *(d) inestable no repulsor
 (e) cap de les anteriors

Solució:

L'EDO és de la forma $x' = f(x)$, on la funció $f(x) = (2x + 3)^2$ només s'anul·la per a $x = -3/2$, que ens dona l'únic punt d'equilibri. Com que $f(x) > 0$ si $x \neq -3/2$, qualsevol solució fora del punt d'equilibri compleix $x'(t) > 0$. Així doncs, les solucions a l'esquerra del punt d'equilibri s'hi apropen, i les solucions a la dreta de n'allunyen. El punt d'equilibri és inestable no repulsor.

t2 Considerem un sistema lineal al pla, $x' = Ax$, on A és una matriu tal que $\text{tr}A = 3$ i $\det A = -2$. Siguin $x^{(1)}(t)$ i $x^{(2)}(t)$ les solucions que satisfan les condicions inicials $x^{(1)}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ i $x^{(2)}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, respectivament. Quin és el determinant de la matriu que té els vectors $x^{(1)}(5)$ i $x^{(2)}(5)$ com a columnes?

- (a) e^{-15} *(b) e^{15} (c) e^{-10} (d) e^{10} (e) cap de les anteriors

Solució:

Per la fórmula de Liouville, el wronskià $W(t) = \det(x^{(1)}(t), x^{(2)}(t))$ compleix que $W(t) = W(0)e^{(\text{tr}A)t}$. Usant que $W(0) = 1$ i $\text{tr}A = 3$, obtenim $W(5) = e^{15}$.

t3 Donat el PVI següent, que depèn d'un paràmetre $\mu \in \mathbb{R}$,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & \mu \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix},$$

trobeu el valor de μ per al qual la solució $(x(t), y(t))$ tendeix al $(0, 0)$ quan $t \rightarrow \infty$.

- *(a) $\mu = -12$ (b) $\mu = -2$ (c) $\mu = 8$ (d) $\mu = 4$ (e) cap de les anteriors

Solució:

Es tracta d'un sistema lineal homogeni, amb matriu $A = \begin{pmatrix} 2 & \mu \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, que com a valors propis 2 i -1. Tenim doncs una sella, i perquè la solució $(x(t), y(t))$ tendeixi al $(0, 0)$ quan $t \rightarrow \infty$, cal que la seva condició inicial $(4, 1)$ es trobi sobre la direcció de valor propi negatiu. Calculant $A \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 + \mu \\ -1 \end{pmatrix}$, deduïm que s'ha de complir $8 + \mu = -4$, i per tant $\mu = -12$.

t4 Considerem el sistema no lineal $\begin{cases} x' = y + ax^3, \\ y' = -x - y^3, \end{cases}$ on a és un paràmetre. Apliquem el mètode de Lyapunov per decidir l'estabilitat del punt d'equilibri $(0,0)$, usant la funció $V(x,y) = (x^2 + y^2)/2$. Per a quins valors de a deduirem que el $(0,0)$ és un atractor?

- (a) $0 < a < 1$ *(b) $a < 0$ (c) $a = 1$ (d) $a = 0$ (e) cap de les anteriors

Solució:

Considerem el camp vectorial associat al sistema, $F(x,y) = (y + ax^3, -x - y^3)$ i, aplicant el mètode de Lyapunov, calculem

$$W(x,y) = \langle \nabla V(x), F(x) \rangle = x(y + ax^3) + y(-x - y^3) = ax^4 - y^4.$$

Només quan $W(x,y)$ és una funció definida negativa a l'origen, és a dir quan $\boxed{a < 0}$, deduïm que l'origen és un atractor.

t5 Sigui $u(x,t)$ la solució del següent problema de valors inicials per a una corda infinita:

$$\begin{cases} u_{tt} - 9u_{xx} = 0, \\ u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = \frac{1}{1+x^2} \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R},$$

Trobeu el valor de $u(0, 1/3)$.

- *(a) $\pi/12$ (b) $\pi/18$ (c) $\pi/6$ (d) $\pi/3$ (e) cap de les anteriors

Solució:

La solució ens ve donada per la fórmula de D'Alembert amb $c = 3$, i les condicions inicials $f(x) = 0$ i $g(x) = 1/(1+x^2)$:

$$u(x,t) = \frac{1}{6} \int_{x-3t}^{x+3t} \frac{ds}{1+s^2} = \frac{1}{6} (\arctan(x+3t) - \arctan(x-3t)).$$

Per tant, obtenim $u(0, 1/3) = \frac{1}{6} (\arctan 1 - \arctan(-1)) = \frac{\pi}{12}$.

p1

[3 punts]

Considerem el següent sistema d'EDOs, depenent d'un paràmetre $\mu > 0$:

$$\begin{cases} x' &= -\mu y \\ y' &= (\mu - 1)x + \sqrt{8}y \end{cases}$$

Classifiqueu el sistema, i determineu l'estabilitat de l'origen (estable, inestable, atracteur, repulsor) segons els valors de μ .

Solució:

Es tracta d'un sistema lineal, de matriu $A_\mu = \begin{pmatrix} 0 & -\mu \\ \mu - 1 & \sqrt{8} \end{pmatrix}$. La seva traça, determinant i discriminant són: $T = \sqrt{8}$, $D = \mu(\mu - 1)$, $\Delta = T^2 - 4D = -4(\mu - 2)(\mu + 1)$. Els valors propis de A_μ són $\lambda_\pm = (T \pm \sqrt{\Delta})/2$.

- * Si $0 < \mu < 1$ tenim $D < 0$ i, per tant, l'origen és una *sella* i, aleshores, *inestable no repulsor*.
- * Si $\mu = 1$, tenim $D = 0$, i per tant és un sistema *degenerat*; els valors propis són 0 i $\sqrt{8}$, i per tant és *inestable no repulsor*.
- * Si $1 < \mu < 2$, tenim $T > 0$, $D > 0$ i $\Delta > 0$, que correspon a un *node propi repulsor*, i per tant *inestable repulsor*.
- * Si $\mu = 2$, tenim $\lambda = \sqrt{2}$ com a valor propi doble, i la matriu $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & \sqrt{8} \end{pmatrix}$ no diagonalitza. Tenim doncs un *node impropri repulsor*, i per tant *inestable repulsor*.
- * Si $\mu > 2$, tenim $\Delta < 0$ i $T > 0$, que correspon a un *focus repulsor*, i per tant és *inestable repulsor*.

p2

[3 punts]

Considereu la següent EDO lineal de segon ordre no homogènia:

$$x'' + 3x' + 2x = \frac{1}{1 + e^t}$$

- (a) Escriviu l'EDO lineal homogènia associada i trobeu-ne un conjunt fonamental de solucions $\{x_1(t), x_2(t)\}$, i la solució general.
- (b) Trobeu la solució general de l'EDO lineal no homogènia original.
[Ind.: Les integrals que cal calcular són immediates, si bé el canvi $s = e^t$ us pot ajudar.]

Solució:

- (a) L'equació característica és $m^2 + 3m + 2 = 0$, que té arrels reals simples -1 i -2 . Per tant $x_1(t) = e^{-t}$ i $x_2(t) = e^{-2t}$ formen un conjunt fonamental, i la solució general és $x_h(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.
- (b) Apliquem el mètode de variació de constants per tal de trobar una solució particular $x_p(t) = u_1(t)x_1(t) + u_2(t)x_2(t)$. Les funcions $u_1(t)$ i $u_2(t)$ han de complir

$$\begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1'(t) \\ u_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix},$$

on $f(t) = 1/(1 + e^t)$. Podem usar que el wronskià de $\{x_1(t), x_2(t)\}$ és $w(t) = -e^{-3t}$, i tenim

$$\begin{aligned} u_1(t) &= - \int \frac{x_2(t) f(t)}{w(t)} dt = \int \frac{e^t}{1 + e^t} dt = \ln(1 + e^t) \\ u_2(t) &= \int \frac{x_1(t) f(t)}{w(t)} dt = - \int \frac{e^{2t}}{1 + e^t} dt = \int \left(\frac{e^t}{1 + e^t} - e^t \right) dt = \ln(1 + e^t) - e^t, \end{aligned}$$

i obtenim $x_p(t) = (e^{-t} + e^{-2t}) \ln(1 + e^t) - e^{-t}$. Llavors, la solució general de l'equació no homogènia és $x(t) = x_p(t) + x_h(t)$.

p3

[4 punts]

Considerem el següent problema de calor 1D no homogeni, amb condicions de contorn *mixtes*:

$$\begin{cases} u_t - 4u_{xx} = \sin \frac{7x}{2} \\ u(x, 0) = 1 + \sin \frac{5x}{2} \\ u(0, t) = 1, \quad u_x(\pi, t) = 0 \end{cases} \quad x \in (0, \pi), \quad t > 0. \quad (1)$$

- (a) Busqueu una solució particular $u_p(x)$ de l'EDP, que no depengui de t (equilibri tèrmic), i que també satisfaci les condicions de contorn del problema (1), de manera que $w(x, t) = u(x, t) - u_p(x)$ és solució d'un problema del tipus

$$\begin{cases} w_t - 4w_{xx} = 0 \\ w(x, 0) = g(x) \\ w(0, t) = 0, \quad w_x(\pi, t) = 0 \end{cases} \quad x \in (0, \pi), \quad t > 0. \quad (2)$$

Determineu les funcions $u_p(x)$ i $g(x)$.

- (b) Supposeu conegut que el problema *homogeni* obtingut quan suprimim l'única condició no homogènia del problema (2), té com a *modes normals* (o solucions fonamentals) les funcions

$$w_n(x, t) = e^{-(2n+1)^2 t} \cdot \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x, \quad n \geq 0.$$

Amb aquesta informació, trobeu la solució $u(x, t)$ del problema original (1).

Solució:

- (a) Imposant que $u_p(x)$ satisfaci l'EDP, tenim $0 - 4u_p''(x) = \sin \frac{7x}{2}$. Integrant dos cops, obtenim $u_p(x) = \frac{1}{49} \sin \frac{7x}{2} + c_1 x + c_2$, que ha de complir les igualtats $u_p(0) = 1$, $u_p'(\pi) = 0$, i per tant $c_1 = 0$, $c_2 = 1$. Així doncs, $u_p(x) = 1 + \frac{1}{49} \sin \frac{7x}{2}$, i llavors $g(x) = u(x, 0) - u_p(x) = \sin \frac{5x}{2} - \frac{1}{49} \sin \frac{7x}{2}$.
- (b) Qualsevol sèrie (convergent) del tipus

$$w(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n w_n(x, t)$$

és també solució del problema homogeni. Imposant la condició inicial $w(x, 0) = g(x)$, on $g(x)$ és la funció trobada a l'apartat (a), deduïm que els coeficients han de ser: $d_2 = 1$, $d_3 = -\frac{1}{49}$, i $d_n = 0$ sempre que $n \neq 2, 3$. Per tant, tenim $w(x, t) = w_2(x, t) - \frac{1}{49} w_3(x, t)$ i, sumant-hi la solució particular,

$$u(x, t) = u_p(x) + w(x, t) = 1 + e^{-25t} \cdot \sin \frac{5x}{2} + \frac{1}{49} (1 - e^{-49t}) \sin \frac{7x}{2}.$$

- (a) Donada l'EDO $x' = 2x(3 - x)$, trobeu-ne els punts d'equilibri i determineu la seva estabilitat (estable, inestable, atractor, repulsor).

Ara considereu el següent sistema no lineal 2D:
$$\begin{cases} x' = x(3 - x^2 - y^2), \\ y' = y(3 - x^2 - y^2). \end{cases}$$

- (b) Trobeu tots els punts d'equilibri del sistema.
 (c) Determineu, si és possible, l'estabilitat del $(0, 0)$ com a punt d'equilibri, usant el mètode de linealització.
 (d) Determineu si la funció $G(x, y) = \frac{y}{x}$ és una integral primera (o quantitat conservada) del sistema, és a dir, si és constant sobre qualsevol solució $(x(t), y(t))$.
 (e) Donada qualsevol solució $(x(t), y(t))$ del sistema, definim la funció $u(t) = x(t)^2 + y(t)^2$. Proveu que $u(t)$ és sempre solució d'una EDO de la forma $u' = h(u)$, i trobeu la funció $h(u)$.
 (f) Usant els apartats anteriors, determineu l'estabilitat dels punts d'equilibri $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ del sistema.

Solució:

- (a) Els punts d'equilibri són els zeros de la funció $f(x) = 2x(3 - x)$, que són 0 i 3. Tenim $f'(0) > 0$ i $f'(3) < 0$, i per tant podem dir que $x = 0$ és repulsor i $x = 3$ és atractor.
 (b) L'origen és clarament un punt d'equilibri i, a més, ho són tots els punts que compleixen $x^2 + y^2 = 3$, que formen una circumferència centrada a l'origen.
 (c) La matriu del sistema linealitzat a l'origen és $DF(0, 0) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, on $F(x, y)$ és el camp vectorial associat al sistema. Per tant, l'origen és inestable repulsor per al sistema original no lineal.
 (d) La derivada temporal de $G(x, y)$ sobre les solucions ve donada per

$$\langle \nabla G(x, y), F(x, y) \rangle = -\frac{y}{x^2} \cdot x(3 - x^2 - y^2) + \frac{1}{x} \cdot y(3 - x^2 - y^2) \equiv 0,$$

i per tant $G(x, y)$ és una integral primera.

- (e) Donada una solució $(x(t), y(t))$, derivem $u(t)$:

$$u' = 2xx' + 2yy' = 2x^2(3 - x^2 - y^2) + 2y^2(3 - x^2 - y^2) = 2u(3 - u).$$

Per tant, $u(t)$ satisfà l'EDO de l'apartat (a): $u' = h(u)$, amb $h(u) = 2u(3 - u)$.

- (f) D'una banda, com que $G(x, y) = \frac{y}{x}$ és integral primera, podem dir que les solucions es mantenen sobre rectes per l'origen $y = kx$. [Nota: De fet, això també és vàlid per a la recta vertical $x = 0$, però cal verificar-ho apart, usant que si $x(t) = 0$ aleshores $x'(t) = 0$ i per tant $x = 0$ és una recta invariant.]

D'altra banda, donada una solució $(x(t), y(t)) \neq (0, 0)$ sobre qualsevol recta $y = kx$, pel resultat de l'apartat (a) podem dir que el quadrat de la distància a l'origen, $u(t) = x(t)^2 + y(t)^2 > 0$, complirà que $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = 3$, i per tant $(x(t), y(t))$ tendirà a un punt de la circumferència $x^2 + y^2 = 3$ quan $t \rightarrow \infty$. Per tant, els punts de la circumferència $x^2 + y^2 = 3$ són estables, però no atractors (ja que trajectòries properes tendiran a altres punts de la circumferència).

