

1

[4.5 punts]

Per a cadascun dels sistemes d'EDOs següents,

$$(I) \quad \begin{cases} x' = 2x - y + xy \\ y' = x - 2y + xy \end{cases} \quad (II) \quad \begin{cases} x' = -y + xy - x^3 + x^4 \\ y' = x - x^2 - y^3 \end{cases}$$

- (a) Escriviu el sistema linealitzat entorn del $(0,0)$ i calculeu-ne els valors propis.
 (b) Diguen si aquest sistema linealitzat pertany a algun d'aquests quatre grups: sella, node, focus, centre.
 (c) Estudieu l'estabilitat del sistema linealitzat (estable, inestable, atractor, repulsor).
 (d) A partir dels valors propis del sistema linealitzat, deduïu, si és possible, si el $(0,0)$ és estable, inestable, atractor o repulsor per al sistema no lineal.
 (e) Quan no sigui possible la deducció que es demana al punt (d), estudieu l'estabilitat del $(0,0)$ pel sistema no lineal usant $V(x,y) = (x^2 + y^2)/2$ com a funció de Lyapunov.
-

Solució:**Sistema (I)**

$$(a) \quad \begin{cases} x' = 2x - y \\ y' = x - 2y \end{cases}$$

Valors propis: $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{3}$.

- (b) És una sella.
 (c) Inestable no repulsor.
 (d) Inestable no repulsor.

Sistema (II)

$$(a) \quad \begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases}$$

Valors propis: $\lambda_{1,2} = \pm i$.

- (b) És un centre.
 (c) Estable no atractor.
 (d) No es dedueix res.
 (e) Calculem la derivada temporal de $V(x,y)$ al llarg de les trajectòries del camp vectorial $F(x,y)$ que defineix el sistema:

$$\begin{aligned} W(x,y) &= \langle \nabla V(x,y), F(x,y) \rangle \\ &= x(-y + xy - x^3 + x^4) + y(x - x^2 - y^3) \\ &= -x^4(1-x) - y^4, \end{aligned}$$

que és una funció definida negativa ($W(0,0) = 0$, i $W(x,y) < 0$ per a $(x,y) \neq (0,0)$ prou proper al $(0,0)$). Deduïm que l'origen és un punt d'equilibri atractor.

2

[3.5 punts]

Resoleu el PVI següent,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1-a & 1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ b \end{pmatrix},$$

on $a, b \in \mathbb{R}$ són paràmetres. Estudieu, en funció de a i b , si la solució trobada tendeix a l'origen quan $t \rightarrow +\infty$. [Ind.: Els valors propis de la matriu poden dependre de a , però els vectors propis no en depenen.]

Solució:

Els valors propis de la matriu són $\lambda_1 = a$, $\lambda_{2,3} = -1 \pm i$. Com a vectors propis associats, trobem $v_1 = (0, 0, 1)$ de valor propi λ_1 , i $v_2 = (1, i, 1)$ de valor propi λ_2 . Obtenim així la solució general,

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = c_1 e^{at} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + c_3 e^{-t} \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}.$$

Imposant les condicions inicials, $(x(0), y(0), z(0)) = (c_2, c_3, c_1 + c_2) = (1, 1, b)$, obtenim que les constants han de ser $c_1 = b - 1$, $c_2 = c_3 = 1$.

Així tenim:

- si $a < 0$, totes les solucions tendeixen a l'origen (per a qualsevol b) ja que el sistema és atractor;
- si $a \geq 0$, per tal que la solució del PVI tendeixi a l'origen cal tenir $c_1 = 0$, és a dir $b = 1$.

[Nota: La resolució varia lleugerament si es considera un altre vector propi de valor propi λ_2 , per exemple $v_2 = (i, -1, i)$.]

3

[2.5 punts]

(a) Donada l'EDO $x' = b - x^2$, on $b \in \mathbb{R}$ és un paràmetre, trobeu tots els seus punts d'equilibri i estudieu la seva estabilitat en funció del paràmetre b (si són estables o inestables i, eventualment, atractors o repulsors).

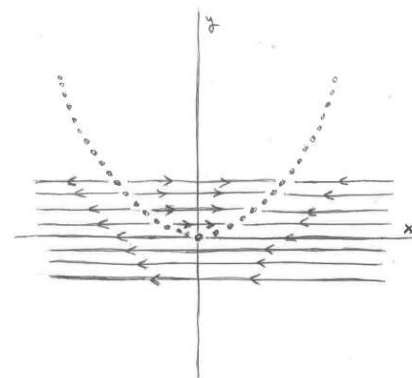
(b) Considerant ara el sistema $\begin{cases} x' = y - x^2 \\ y' = 0 \end{cases}$ trobeu tots els seus punts d'equilibri, feu un croquis del retrat de fase del sistema i, a partir d'aquest, estudieu l'estabilitat dels punts d'equilibri (si són estables o inestables i, eventualment, atractors o repulsors). [Ind.: Trobeu rectes invariants i useu l'apartat (a).]

Solució:

- (a) Els punts d'equilibri són els zeros de la funció $f(x) = b - x^2$.
- Si $b > 0$, hi ha dos punts d'equilibri: $x_{\pm} = \pm\sqrt{b}$. Tenim $f'(x_{\pm}) = \mp 2\sqrt{b}$, i per tant els punts x_- i x_+ són repulsor i atractor, respectivament.
 - Si $b = 0$, tenim el 0 com a únic punt d'equilibri, el qual és degenerat, ja que $f'(0) = 0$. Com que $f(x) < 0$ per a tot $x \neq 0$, el 0 és inestable no repulsor.
 - Si $b < 0$, no hi ha punts d'equilibri.

(b) Els punts d'equilibri són tots els de la paràbola $y = x^2$, és a dir, tots els de la forma (a, a^2) on $a \in \mathbb{R}$. Com que $y' = 0$, totes les rectes $y = b$ (on b és una constant) són invariants. Sobre cadascuna d'aquestes rectes, tenim $x' = b - x^2$ que és l'equació de l'apartat (a). D'aquesta manera podem dibuixar el retrat de fase de la figura. Observant aquest retrat de fase, resulta:

- els punts (a, a^2) amb $a \leq 0$ són inestables no repulsors;
- els punts (a, a^2) amb $a > 0$ són estables no atractors.



4

[5 punts]

Considerem el problema següent, corresponent a l'equació d'ones per a una corda vibrant parametritzada per $x \in (0, \pi)$, amb condicions inicials i de contorn:

$$\begin{cases} u_{tt} - 4u_{xx} = 0, \\ u(x, 0) = 2 + \cos 4x, \\ u_t(x, 0) = 0, \\ u_x(0, t) = u_x(\pi, t) = 0. \end{cases}$$

- (a) Si $u(x, t)$ satisfà l'EDP i les condicions de contorn, determineu el signe de la funció següent:

$$G(t) = \int_0^\pi u(x, t) u_{tt}(x, t) dx. \quad [\text{Ind.: Integreu per parts.}]$$

- (b) Calculeu la solució del problema complet (EDP + condicions inicials i de contorn).

.....
Solució:

- (a) Primer usem que $u(x, t)$ és solució de l'EDP, a continuació integrem per parts i finalment usem les condicions de contorn, obtenint:

$$\begin{aligned} G(t) &= \int_0^\pi u(x, t) u_{tt}(x, t) dx = 4 \int_0^\pi u(x, t) u_{xx}(x, t) dx \\ &= 4 \left[u(\pi, t) u_x(\pi, t) - u(0, t) u_x(0, t) - \int_0^\pi u_x(x, t)^2 dx \right] = -4 \int_0^\pi u_x(x, t)^2 dx \leq 0. \end{aligned}$$

- (b) Aplicant separació de variables (vegeu als apunts un cas completament anàleg), obtenim

$$u(x, t) = 2 + \cos 4x \cos 8t.$$

- (a) Donada l'EDO $y'' + 2k y' + y = 0$, amb $k \geq 0$ paràmetre, trobeu-ne la solució general $y(t)$ segons els valors de k .
- (b) Considerem ara l'EDP $u_{tt} + 2k u_t - u_{xx} = 0$ ($x \in \mathbb{R}$, $t > 0$), que correspon a una corda vibrant amb fricció i de longitud infinita, on la fricció ve descrita pel paràmetre $k \geq 0$ (sense fricció si $k = 0$). Si busquem solucions de la forma $u(x, t) = \sin x \cdot T(t)$, dedueu l'EDO que ha de complir $T(t)$.
- (c) Suposem ara que $0 \leq k < 1$. Entre les solucions per a l'EDP proposades a l'apartat (b), trobeu la que satisfà les condicions inicials $u(x, 0) = 0$, $u_t(x, 0) = \sin x$ ($x \in \mathbb{R}$). [Ind.: Useu l'apartat (a).]

Solució:

- (a) L'EDO és lineal homogènia i a coeficients constants. L'equació característica $m^2 + 2km + 1 = 0$ té com a arrels $m_{1,2} = -k \pm \sqrt{k^2 - 1}$. Aleshores:
- Si $0 \leq k < 1$ tenim arrels complexes $m_{1,2} = -k \pm i\sqrt{1 - k^2}$, i, per tant, la solució general és $y(t) = e^{-kt} (A \cos(t\sqrt{1 - k^2}) + B \sin(t\sqrt{1 - k^2}))$.
 - Si $k = 1$, tenim una arrel doble $m_1 = m_2 = -1$ i la solució general $y(t) = (A + Bt)e^{-t}$.
 - Si $k > 1$, tenim arrels reals simples, i la solució general $y(t) = A e^{t(-k - \sqrt{k^2 - 1})} + B e^{t(-k + \sqrt{k^2 - 1})}$.
- (b) Es tracta de buscar solucions $u(x, t)$ per separació de variables, però d'una forma concreta per a la funció de x . Substituint la solució proposada a l'EDP, obtenim la igualtat $\sin x \cdot T''(t) + 2k \sin x \cdot T'(t) - (\sin x) \cdot T(t) = 0$, que ens diu que $T(t)$ ha de satisfer l'EDO $T''(t) + 2k T'(t) + T(t) = 0$ (la de l'apartat (a)).
- (c) Les condicions inicials ens diuen que $T(t)$ ha de satisfer $T(0) = 0$, $T'(0) = 1$. Imposant les condicions inicials a la solució general trobada a (a) per al cas $0 \leq k < 1$ d'arrels complexes, obtenim les constants $A = 0$ i $B = 1/\sqrt{1 - k^2}$, i la solució és $u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{1 - k^2}} \sin x \cdot e^{-kt} \sin(t\sqrt{1 - k^2})$.

Volem estudiar l'estabilitat de l'origen com a punt d'equilibri del sistema $\begin{cases} x' = xy - y^2 \\ y' = kx^2 + mxy \end{cases}$

on $k, m \in \mathbb{R}$ són paràmetres, aplicant el mètode de Lyapunov amb una funció $V(x, y) = ax^2 + y^2$. Com han de ser k i m , i com hem escollir a en funció de k i m , perquè el mètode ens permeti decidir l'estabilitat de l'origen? En aquest cas, quin tipus d'estabilitat obtenim?

Solució:

En primer lloc, cal tenir $a > 0$ perquè es pugui usar $V(x, y)$ com a funció de Lyapunov. Tenint en compte que el camp vectorial és $F(x, y) = (xy - y^2, kx^2 + mxy)$, calculem:

$$W(x, y) = \langle \nabla V(x, y), F(x, y) \rangle = 2ax(xy - y^2) + 2y(kx^2 + mxy) = 2(a + k)x^2y + 2(-a + m)xy^2,$$

que és un polinomi de grau 3, i per tant compleix que $W(-x, -y) = W(x, y)$. L'únic cas en què podem aplicar el mètode és quan $W \equiv 0$, és a dir, $a + k = 0$ i $-a + m = 0$. Per tant, hem de tenir $\boxed{m = -k > 0}$ i, en aquest cas, escollint $\boxed{a = m}$ dedueix que l'origen és estable no atractor (amb les òrbites contingudes en el·lipses $mx^2 + y^2 = \text{const}$).