

- 1** Considereu el següent sistema d'EDOs no lineal en el pla, on $a \in \mathbb{R}$ és un paràmetre:

$$x' = y, \quad y' = -x - 2ay + \frac{x^2}{3},$$

- (a) Trobeu tots els seus punts fixos (d'equilibri) d'aquest sistema, i la matriu del sistema linealitzat en cadascun d'ells.
- (b) Per a tots els punts fixos diferents del $(0,0)$, què podem dir de la seva estabilitat per al sistema no lineal a partir del sistema linealitzat?
- (c) Apliqueu el mètode de les funcions de Lyapunov per estudiar (en funció del paràmetre a) l'estabilitat del $(0,0)$ per al sistema no lineal, usant la funció definida positiva $V(x, y) = \left(\frac{1}{2} + a^2\right)x^2 + \frac{y^2}{2} + axy - \frac{x^3}{9}$.
[Nota: No cal que comproveu que V és definida positiva.]
- (d) Per a quin valor de a la funció $V(x, y)$ és una quantitat conservada (integral primera) del sistema no lineal? En aquest cas, què podem concloure en relació al $(0,0)$?

[5 punts]

Solució:

- (a) Denotem $F(x, y) = \left(y, -x - 2ay + \frac{x^2}{3}\right)$ el camp vectorial associat al sistema. Els punts fixos s'obtenen resolent $F(x, y) = (0, 0)$ i són $(0, 0)$ i $(3, 0)$. El sistema linealitzat en $(0, 0)$ ve donat per la matriu $A_1 = DF(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2a \end{pmatrix}$, i en $(3, 0)$ per la matriu $A_2 = DF(3, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2a \end{pmatrix}$.
- (b) La matriu A_2 del sistema linealitzat en $(3, 0)$ té determinant $D < 0$ (correspon a una sella). Sempre té un valor propi positiu, i per tant $(3, 0)$ és sempre un punt fix inestable del sistema no lineal.
- (c) Calculem la funció W que dóna la derivada de V sobre les solucions del sistema no lineal. Obtenim:

$$W = \langle \nabla V, F \rangle = \frac{\partial V}{\partial x} y + \frac{\partial V}{\partial y} \left(-x - ay + \frac{x^2}{3}\right) = -a(x^2 + y^2) + \frac{ax^3}{3} = -ax^2 \left(1 - \frac{x}{3}\right) - ay^2.$$

Com veiem, si $(x, y) \neq (0, 0)$ és prou proper al $(0, 0)$ (concretament, si $|x| < 3$) la funció W té el mateix signe que el paràmetre a . Per tant:

- * si $a > 0$, la funció W és definida negativa i per tant el $(0, 0)$ és atractor (asimptòticament estable);
 - * si $a < 0$, la funció W és definida positiva i per tant el $(0, 0)$ és repulsor;
 - * si $a = 0$, la funció W és semi-definida negativa i per tant el $(0, 0)$ és estable.
- (d) Si $a = 0$, tenim $W(x, y) \equiv 0$ per a tot (x, y) , i per tant V és una quantitat conservada del sistema no lineal. Com que V és definida positiva en $(0, 0)$, podem concloure que el $(0, 0)$ està envoltat de solucions periòdiques (centre no lineal) i per tant el $(0, 0)$ és estable però no atractor en aquest cas.

2 Considereu l'EDO $x' = x^4 - 4x^3 + 3x^2$.

- (a) Trobeu tots els seus punts d'equilibri i estudeu la seva estabilitat, decidint si són estables o inestables i, eventualment, atractors o repulsors.
- (b) Si $x(t)$ és una solució que compleix $x(0) = x_0$, i suposem que $0 < x_0 < 1$. Quin ha de ser el valor de x_0 per tal que $x(t)$ tingui $t = 0$ com a punt d'inflexió? [Ind.: Estudieu el signe de $x''(t)$.]

[3 punts]

Solució:

- (a) Els zeros de la funció $f(x) = x^4 - 4x^3 + 3x^2 = x^2(x-1)(x-3)$ són els punts d'equilibri: 0, 1 i 3.
- El punt 1 és atractor, ja que $f'(1) < 0$.
 - El punt 3 és repulsor, ja que $f'(3) > 0$.
 - Al punt 0 tenim $f'(0) = 0$, i llavors hem d'estudiar el signe de $f(x)$ per a x properes al 0. Com que $f(x) > 0$ als intervals $(-\infty, 0)$ i $(0, 1)$, deduïm que $x(t)$ creix en aquests intervals, i per tant s'apropa al 0 quan $x(t) < 0$ i se n'allunya quan $0 < x(t) < 1$. Així doncs, el punt 0 és inestable no repulsor.
- (b) Derivant $x' = f(x)$, obtenim $x'' = f'(x) \cdot x' = f'(x)f(x)$. A l'interval $(0, 1)$, tenim $f(x) > 0$ i per tant $x(t)$ és creixent. D'altra banda, $f'(x) = 2x(2x^2 - 6x + 3)$ s'anul·la, a l'interval $(0, 1)$, únicament al punt $x_0 = (3 - \sqrt{3})/2$. És per aquesta x_0 que tenim un punt d'inflexió, ja que $f'(x) > 0$ per a $x \in (0, x_0)$ i $f'(x) < 0$ per a $x \in (x_0, 1)$ i, per tant, $x(t)$ passa de convexa quan $t < 0$ a còncava quan $t > 0$.

3 Trobeu la solució general del sistema $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 6 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 2e^{-t} \end{pmatrix}$.

[2 punts]

Solució:

La matriu té valors propis 0 i -5 , i els vectors propis respectius són $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$. Obtenim una matriu

fonamental: $\Phi(t) = \begin{pmatrix} 1 & e^{-5t} \\ 2 & -3e^{-5t} \end{pmatrix}$, i la solució del sistema homogeni és $\mathbf{x}_h(t) = \Phi(t)\mathbf{c}$, amb $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$.

Ara apliquem el mètode de variació de constants. Resolent el sistema $\Phi(t)\mathbf{u}' = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 2e^{-t} \end{pmatrix}$ obtenim $\mathbf{u}'(t) =$

$\begin{pmatrix} u_1'(t) \\ u_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix}$, i per tant $\mathbf{u}(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix}$. Deduïm que $\mathbf{x}_p(t) = \Phi(t)\mathbf{u}(t) = \begin{pmatrix} -e^{-t} \\ -2e^{-t} \end{pmatrix}$ és una solució particular del sistema no homogeni, i la solució general és

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_p(t) + \mathbf{x}_h(t) = \begin{pmatrix} -e^{-t} \\ -2e^{-t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & e^{-5t} \\ 2 & -3e^{-5t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

4 Considereu el següent sistema lineal al pla, $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 2\alpha - 3 \\ 3 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, on $\alpha \in \mathbb{R}$ és un paràmetre.

- (a) Estudieu la seva estabilitat i classifiqueu-lo en funció de α .
- (b) En el cas $\alpha = 0$, podem assegurar que hi ha òrbites periòdiques? En cas afirmatiu, determineu el seu període i el seu sentit de gir. [Justifiqueu la resposta.]

[3 punts]

Solució:

- (a) Usem el criteri traça-determinant: tenim $T = 2\alpha$, $D = (\alpha - 3)^2$, i el discriminant $\Delta = T^2 - 4D = 24\alpha - 36$, amb la qual cosa obtenim $\alpha = 0, \frac{3}{2}, 3$ com a valors de bifurcació. Tenint en compte els signes de T , D i Δ , concluïm:

- * si $\alpha < 0$, focus atractor;
- * si $\alpha = 0$, centre (estable no atractor);
- * si $0 < \alpha < 3/2$, focus repulsor;
- * si $\alpha = 3/2$, node impropri repulsor (ja que la matriu és no diagonalitzable);
- * si $3/2 < \alpha < 3$, node propi repulsor;
- * si $\alpha = 3$, degenerat, inestable no repulsor (valors propis 0 i 6);
- * si $\alpha > 3$, node propi repulsor.

- (b) Per a $\alpha = 0$, tenim un centre: la matriu del sistema és $\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, amb valors propis imaginaris purs $\pm 3i$.

Les solucions s'expressen com a combinacions lineals de $\cos 3t$, $\sin 3t$, i per tant el seu període és $\frac{2\pi}{3}$. D'altra banda, com que $y' = 3x$, resulta que la coordenada y creix per a $x > 0$, i per tant les trajectòries giren en sentit antihorari.

5 (a) Donada l'EDO de segon ordre $x'' + ax' + bx = 0$, on $a, b \in \mathbb{R}$ són paràmetres, determineu la condició sobre a i b per tal que existeixi una solució no trivial $x_1(t)$ tal que $x_1'(t) = x_1(t)$ per a tot t .

- (b) Si es compleix la condició de l'apartat (a), quina altra condició han de complir els paràmetres a i b perquè existeixi una segona solució no trivial $x_2(t)$ tal que $x_2'(t) = kx_2(t)$ per a tot t , amb algun $k \neq 1$?

[2 punts]

Solució:

- (a) Si $x_1' = x_1$, també tenim $x_1'' = x_1' = x_1$, i substituint directament a l'EDO trobem que $1 + a + b = 0$. També es pot deduir del fet que la solució donada és de la forma $x_1(t) = ce^t$, i per tant el polinomi característic $p(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b$ ha de tenir $\lambda = 1$ com a arrel.

- (b) En aquest cas, el polinomi característic ha de tenir arrels simples 1 i k . Per tant, $1 + k = -a$ i $1 \cdot k = b$, amb $k \neq 1$. Per tant, hem de tenir $b = -1 - a \neq 1$.

6 Considereu el problema següent, que correspon a la distribució de temperatures $u(x, t)$ en una barnilla de longitud $\pi/2$, amb condicions de contorn mixtes, i amb una font de calor externa:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = \sin 5x, & 0 < x < \pi/2, \\ u(x, 0) = 2 \sin 3x + \sin 5x, & t > 0. \\ u(0, t) = u_x(\pi/2, t) = 0, \end{cases}$$

- (a) Trobeu una solució particular estacionària $u_0(x)$ de l'EDP (és a dir, una solució que no depengui de t), que també satisfaci les condicions de contorn, i formuleu el problema que ha de satisfer la funció diferència $w(x, t) = u(x, t) - u_0(x)$.
- (b) Trobeu la solució $w(x, t)$ d'aquest nou problema, per separació de variables. [Nota: No cal que resolgueu explícitament el problema de valors a la frontera associat.]
- (c) Per al problema original, trobeu la temperatura límit en el punt $x = \pi/2$, quan $t \rightarrow \infty$.

[5 punts]

Solució:

- (a) La funció $u_0(x)$ ha de complir que $u_0'' = -\sin 5x$. Integrant dos cops obtenim una solució $u_0(x) = \frac{1}{25} \sin 5x$, la qual també satisfà les condicions de contorn: $u_0(0) = u_0'(\pi/2) = 0$.

La funció $w(x, t) = u(x, t) - u_0(x)$ satisfà l'EDP homogènia, les mateixes condicions de contorn, i una nova condició inicial que obtenim calculant $w(x, 0) = u(x, 0) - u_0(x)$. Llavors $w(x, t)$ ha de ser solució del problema:

$$\begin{cases} w_t - w_{xx} = 0, & 0 < x < \pi/2, \\ w(x, 0) = 2 \sin 3x + \frac{24}{25} \sin 5x, & t > 0. \\ w(0, t) = w_x(\pi/2, t) = 0, \end{cases}$$

- (b) Suprimint de moment la condició inicial (que és l'única no homogènia), i escrivint $w(x, t) = X(x) \cdot T(t)$, obtenim els següents dos problemes d'EDOs:

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0, \\ X(0) = X'(\pi/2) = 0, \end{cases} \quad T'(t) - \lambda T(t) = 0.$$

El primer és un PVF, per al qual sabem que els valors propis i les funcions pròpies són

$$\lambda_n = -(2n+1)^2, \quad X_n(x) = \sin(2n+1)x, \quad n \geq 0.$$

Resolent la segona EDO per als valors propis λ_n , obtenim les funcions $T_n(t) = e^{-(2n+1)^2 t}$, i per tant els modes normals són

$$w_n(x, t) = X_n(x) \cdot T_n(t) = e^{-(2n+1)^2 t} \sin(2n+1)x, \quad n \geq 0.$$

Finalment, imposem la condició inicial a $w(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n w_n(x, t)$:

$$w(x, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n \sin(2n+1)x = 2 \sin 3x + \frac{24}{25} \sin 5x,$$

d'on deduïm que $d_1 = 2$, $d_2 = \frac{24}{25}$ i $d_n = 0$ per a $n \neq 1, 2$. Per tant,

$$w(x, t) = 2 w_1(x, t) + \frac{24}{25} w_2(x, t) = 2 e^{-9t} \sin 3x + \frac{24}{25} e^{-25t} \sin 5x.$$

- (c) La solució del problema original és $u(x, t) = u_0(x) + w(x, t)$, i obtenim: $\lim_{t \rightarrow \infty} u(\pi/2, t) = u_0(\pi/2) = \frac{1}{25}$ (és a dir, la temperatura límit ve donada per la solució estacionària).