

ENTREGUEU ELS PROBLEMES EN FULLS SEPARATS

Problema 1. Considereu l'equació diferencial $x'' - 2x' - ax = 0$, on $a \in \mathbb{R}$ és un paràmetre.

- Escriviu-la com un sistema lineal de primer ordre, i classifiqueu aquest sistema (tipus i estabilitat) en funció del paràmetre a .
- Trobeu els valors de a per als quals la solució de l'equació diferencial que compleix les condicions inicials $x(0) = 1$, $x'(0) = -1$, satisfà que $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} x'(t) = 0$.
- Ara considereu l'equació no homogènia $x'' - 2x' - 3x = 9t$. Sabent que té una solució particular que és un polinomi de grau 1, trobeu-ne la solució que compleix les condicions inicials $x(0) = 1$, $x'(0) = -1$. (Indicació: podeu escriure l'EDO com un sistema lineal no homogeni).

Solució:

- Prenent $y = x'$, el sistema és

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Per tal de classificar-lo, calculem la traça, el determinant i el discriminant: $T = 2$, $D = -a$, $\Delta = T^2 - 4D = 4 + 4a$. Deduïm que el sistema és:

- * un focus repulsor (inestable) si $a < -1$;
 - * un node impropri repulsor (inestable) si $a = -1$;
 - * un node propi repulsor (inestable) si $-1 < a < 0$;
 - * degenerat (inestable) si $a = 0$ (valors propis 0 i 2);
 - * una sella (inestable) si $a > 0$.
- De la classificació vista a l'apartat (a), només podem tenir $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} x'(t) = 0$ en el cas de la sella ($a > 0$). Però cal, a més, que $(1, -1)$ sigui vector propi de valor negatiu de la matriu del sistema. Calculant

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ a - 2 \end{pmatrix},$$

resulta que $a = 3$.

- Substituint un polinomi $At + B$ a l'equació no homogènia, fàcilment veiem que $x_p(t) = 2 - 3t$ n'és una solució particular. Per a l'equació homogènia $x'' - 2x' - 3x = 0$, les arrels del polinomi característic són 3 i -1 , i per tant la seva solució general és $x_h(t) = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-t}$. Llavors, la solució general de l'equació no homogènia ve donada per $x(t) = x_p(t) + x_h(t)$. Imposant les condicions inicials, trobem que $c_1 = 1/4$ i $c_2 = -5/4$. Per tant, la solució és $x(t) = 2 - 3t + (e^{3t} - 5e^{-t})/4$.

Problema 2. Donat el sistema d'EDO

$$\begin{cases} x' &= y^2 - xy \\ y' &= x^2 - xy \end{cases}$$

- Calculeu els punts d'equilibri i estudieu la seva estabilitat amb el mètode de linealització.
- Proveu que la funció $V(x, y) = x^2 + y^2$ és una quantitat conservada per al sistema, és a dir, $V(x, y)$ és constant sobre les trajectòries.
- Representeu el retrat de fases global del sistema. (Indicació: useu (b).)
- Raoneu l'estabilitat dels punts d'equilibri a partir de (c)
- A partir de (c), discutiu si hi ha alguna òrbita periòdica fora dels punts d'equilibri.

Solució:

- $x = y$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

$$A = DF(x, x) = \begin{pmatrix} -x & x \\ x & -x \end{pmatrix}$$

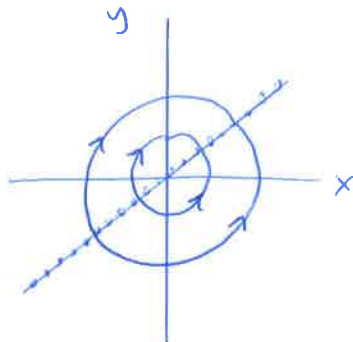
de VAP: $-2x, 0$. Per tant,
 -Si $x < 0$, (x, x) és inestable
 -Si $x \geq 0$, no decideix

(b) Veiem que la derivada temporal de V és idènticament nul·la:

$$W(x, y) = \langle \text{grad } V, F \rangle = 0.$$

(Això implica que el $(0, 0)$ és un centre no lineal, per tant, estable no atractor)

(c) $V(x, y)$ és una quantitat conservada. Per tant podem representar el retrat de fase a partir de les corbes de nivell $V(x, y) = \text{const}$. D'altra banda, per determinar el sentit de recorregut de les òrbites, prenem un punt de la forma $(x, 0)$, i observem que el vector tangent és $(0, x^2)$.



(d) (x, x) és estable no atractor si $x \geq 0$, i inestable si $x < 0$.

(e) NO hi ha cap òrbita periòdica fora dels punts d'equilibri. Observem que per 'anar d'un punt d'equilibri a un altre' l'òrbita viu a una semi-circumferència i trigarà un temps infinit.

Problema 3. Resoleu el problema de Laplace 2D amb condicions de frontera de tipus mixte donat per

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & x \in (0, 1) \quad y \in (0, 1) \\ u(x, 0) = 0 & x \in (0, 1) \\ u(x, 1) = 2 - 3 \cos(\pi x) & x \in (0, 1) \\ u_x(0, y) = 0 & y \in (0, 1) \\ u_x(1, y) = 0 & y \in (0, 1). \end{cases}$$

Indicació: No cal resoldre amb detall el PVF que obtingueu.

Solució: Busquem solucions no trivial de la forma $u(x, y) = X(x)Y(y)$ de la part homogènia del problema. Si la funció $u(x, y) = X(x)Y(y)$ compleix:

- L'equació de Laplace $u_{xx} + u_{yy} = 0$, llavors $X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0$, i

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda \in \mathbb{R}.$$

- La condició de frontera $u(x, 0) = 0$, llavors $Y(0) = 0$.
- La condició de frontera $u_x(0, y) = 0$, llavors $X'(0) = 0$.
- La condició de frontera $u_x(1, y) = 0$, llavors $X'(1) = 0$.

Per tant, obtenim dos problemes separats:

$$\begin{cases} X''(x) = \lambda X(x) \\ X'(0) = 0 = X'(1) \end{cases} \quad \begin{cases} Y''(y) + \lambda Y(y) = 0 \\ Y(0) = 0 \end{cases}.$$

El primer problema és un PVF amb condicions de tipus Neumann associat a la funció $X(x)$. Ja vam veure a classe que els seus VAPs i les seves FUPs són:

$$\left. \begin{array}{l} \text{VAPs: } \lambda = \lambda_n = -n^2\pi^2 \\ \text{FUPs: } X(x) = X_n(x) = \cos(n\pi x) \end{array} \right\} \quad n \geq 0.$$

L'EDO $Y''(y) + \lambda_n Y(y) = 0$ és lineal, homogènea i a coeficients constants. El seu polinomi característic és $P(m) = m^2 + \lambda_n$ i les seves arrels són $m_{1,2} = \pm \sqrt{-\lambda_n} = \pm n\pi$. Així doncs, la solució general d'aquesta equació és

$$n = 0 \Rightarrow Y(y) = c_1 + c_2 y,$$

$$n \geq 1 \Rightarrow Y(y) = c_1 \cosh(n\pi y) + c_2 \sinh(n\pi y),$$

on $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ són constants lliures. La condició adicional $Y(0) = 0$ implica que $c_1 = 0$, mentre que c_2 segueix lliure. Prenem $c_2 = 1$ i obtenim les funcions

$$Y_0(y) = y, \quad Y_n(y) = \sinh(n\pi y), \quad n \geq 1.$$

Per tant, els modes normals d'aquest problema són:

$$u_0(x, y) = X_0(x)Y_0(y) = y, \quad u_n(x, y) = X_n(x)Y_n(y) = \cos(n\pi x) \sinh(n\pi y), \quad n \geq 1.$$

Aixó implica que totes les sèries formals de la forma

$$u(x, y) = a_0 y + \sum_{n \geq 1} a_n \cos(n\pi x) \sinh(n\pi y)$$

són solucions de la part homogènea del problema, on els coeficients $a_n \in \mathbb{R}$ queden lliures. Finalment, determinem aquests coeficients imposant la condició no homogènea del problema:

$$a_0 + \sum_{n \geq 1} a_n \sinh(n\pi) \cos(n\pi x) = u(x, 1) = 2 - 3 \cos(\pi x).$$

És fàcil veure que, en aquest cas, els coeficients i la solució cercada són:

$$a_0 = 2, \quad a_1 = -\frac{3}{\sinh \pi}, \quad a_n = 0 \quad \forall n \geq 2 \implies u(x, y) = 2y - \frac{3 \cos(\pi x) \sinh(\pi y)}{\sinh \pi}.$$