

EXAMEN D'EQUACIONS DIFERENCIALS, ETSEIB, 14 de Gener 2016

Problema 1. Donat un paràmetre $\alpha > 0$, considerem el sistema no lineal 2D

$$\begin{cases} x' &= \alpha x(1-y), \\ y' &= x-y. \end{cases}$$

- a) L'origen és un punt d'equilibri del sistema. Estudieu la seva estabilitat pel mètode de linealització.
- b) Trobeu l'altre punt d'equilibri del sistema. Estudieu la seva estabilitat pel mètode de linealització i digueu per a quin valor del paràmetre $\alpha > 0$ el seu sistema linealitzat és un node impropï.
- c) Ara estudieu l'estabilitat del segon punt d'equilibri pel mètode de Liapunov. Per això, feu servir la funció $V(x, y) = x - \ln x + b(y-1)^2 - 1$ per a un valor apropiat de $b > 0$. Aquesta funció $V(x, y)$ té un mínim local estricte al segon punt d'equilibri per tot $b > 0$. (No es demana provar aquesta afirmació.) (Nota. També podeu mirar si hi ha alguna trajectòria continguda a la recta $y = 1$).

Solució:

- a) La matriu del sistema linealitzat a l'origen és

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Aquesta matriu és triangular inferior amb VAPs $\lambda_1 = \alpha > 0$ i $\lambda_2 = -1 < 0$. Per tant, l'origen és un punt d'equilibri inestable, però no repulsor.

- b) L'altre punt d'equilibri és el punt $(1, 1)$. La matriu del sistema linealitzat al punt $(1, 1)$ és

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Llavors, $T = \text{traza}[A] = -1 < 0$ i $D = \det[A] = \alpha > 0$. El mètode de linealització combinat amb el criteri traça-determinant ens diu que el punt $(1, 1)$ és atractor. A més, el sistema linealitzat és un node impropï si i només si $\Delta = T^2 - 4D = 1 - 4\alpha = 0$ i la matriu A no diagonalitza. Això, passa si i només si $\alpha = 1/4$.

- c) La derivada temporal de la funció $V(x, y)$ és

$$\begin{aligned} W(x, y) &= \frac{d}{dt} [x - \ln x + b(y-1)^2] \\ &= \left(1 - \frac{1}{x}\right) x' + 2b(y-1)y' \\ &= \alpha(x-1)(1-y) + 2b(y-1)(x-y) \\ &= \alpha(x-1)(1-y) + 2b(y-1)(x-1+1-y) \\ &= (2b-\alpha)(x-1)(y-1) - 2b(y-1)^2. \end{aligned}$$

Per tant, si prenem $b = \alpha/2$, llavors $W(x, y) = -\alpha(y-1)^2$ és semidefinida negativa i podem afirmar que el punt $(1, 1)$ és estable. A més, el propi punt d'equilibri $(1, 1)$ és l'única trajectòria del sistema continguda al conjunt de nivell

$$W^{-1}(0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 1\}.$$

Per tant, podem afirmar que el punt $(1, 1)$ és atractor, cosa que ja sabem de l'apartat anterior.

Problema 2. Considereu l'EDO següent, dependent d'un paràmetre $a \in \mathbb{R}$,

$$x' = ax(x - a)$$

- a) Trobeu els punts d'equilibri i estudieu la seva estabilitat, en funció del paràmetre a .
- b) Si $x(t)$ és la solució donada per $x(0) = 1$, per a quins valors de a es compleix que $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$?

Ara considereu el sistema següent, dependent d'un paràmetre $b \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} x' &= b(-2x + y), \\ y' &= (1 - b)x. \end{cases}$$

- c) Classifiqueu aquest sistema lineal, en funció del paràmetre b .
- d) Si $(x(t), y(t))$ és la solució donada per $(x(0), y(0)) = (1, -1)$, per a quins valors de b es compleix que $\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t), y(t)) = (0, 0)$?

Solució:

- (a) L'EDO és de la forma $x' = f(x)$, amb la funció $f(x) = ax(x - a)$. Els punts d'equilibri venen donats pels zeros d'aquesta funció.
 - * Si $a \neq 0$, els punts d'equilibri són 0 i a , amb $f'(0) = -a^2 < 0$ i $f'(a) = a^2 > 0$. Això ens indica que el punt d'equilibri 0 és un *atractor* i que el punt d'equilibri a és un *repulsor*.
 - * Si $a = 0$, tenim $f(x) \equiv 0$ i aleshores tots els punts de $\mathbb{R}$ són punts d'equilibri *estables no atractors*.
- (b) Per decidir-ho, estudiem el signe de la funció $f(x)$ per a $x > 0$.
 - * Si $a < 0$, tenim $f(0) = 0$ i $f(x) < 0$ si $x > 0$. Per tant, qualsevol solució amb $x(0) > 0$ tendirà al punt d'equilibri 0 quan $t \rightarrow \infty$.
 - * Si $a > 0$, tenim $f(0) = f(a) = 0$, $f(x) < 0$ si $0 < x < a$, i $f(x) > 0$ si $x > a$. En aquest cas, qualsevol solució amb $0 < x(0) < a$ tendirà al punt d'equilibri 0 quan $t \rightarrow \infty$, i qualsevol solució amb $x(0) > a$ tendirà a ∞ . Per tant, la solució amb $x(0) = 1$ tendirà a 0 només quan $1 < a$.
 - * Si $a = 0$, la solució amb $x(0) = 1$ és constant ja que 1 és punt d'equilibri.
 Així doncs, perquè la solució $x(t)$ donada per $x(0) = 1$ tendeixi a 0 quan $t \rightarrow \infty$, hem de tenir $a < 0$ o bé $a > 1$ (és a dir $a \notin [0, 1]$).
- (c) La matriu del sistema és $A = \begin{pmatrix} -2b & b \\ 1 - b & 0 \end{pmatrix}$. Deduïm la classificació a partir del determinant, la traça i el discriminant:

$$D = b^2 - b, \quad T = -2b, \quad \Delta = T^2 - 4D = 4b.$$

- * Un focus repulsor si $b < 0$.
- * Degenerat si $b = 0$ (cas no diagonalitzable amb 0 com a valor propi doble).
- * Una sella si $0 < b < 1$.
- * Degenerat si $b = 1$ (cas diagonalitzable amb un valor propi 0 i l'altre negatiu).
- * Un node atractor si $b > 1$.
- (d) Esbrinem quan es pot donar la condició, a partir de la classificació anterior.
 - * Si $b > 1$ (node atractor), qualsevol solució $(x(t), y(t))$ tendirà a $(0, 0)$ quan $t \rightarrow \infty$.
 - * Dels altres casos, la solució $(x(t), y(t))$ amb $(x(0), y(0)) = (1, -1)$ només pot tendir a $(0, 0)$ quan $t \rightarrow \infty$, si $0 < b \leq 1$ (sella o degenerat amb un valor propi negatiu) i, a

més, tenim $(1, -1)$ com a vector propi de valor propi negatiu. Com que $A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3b \\ 1-b \end{pmatrix}$, hem d'imposar que $1-b = 3b$ i $-3b < 0$, que ens dóna $b = 1/4$ com a cas addicional.

Així doncs, perquè la solució $(x(t), y(t))$ donada per $(x(0), y(0)) = (1, -1)$ tendeixi a 0 quan $t \rightarrow \infty$, hem de tenir $b = 1/4$ o bé $b > 1$.

Problema 3. Considereu el següent problema de valors inicials i condicions mixtes a la frontera:

$$(1) \quad \begin{cases} u_t - u_{xx} = -\cos x, & x \in (0, \pi), t > 0 \\ u(x, 0) = \sin(x/2) - \cos x, & x \in (0, \pi) \\ u(0, t) = -1, & t > 0 \\ u_x(\pi, t) = 0 & t > 0 \end{cases}$$

a) Trobeu una funció $v(x)$ de manera que el canvi $w(x, t) = u(x, t) - v(x)$ transformi el problema (1) en el següent problema

$$(2) \quad \begin{cases} w_t - w_{xx} = 0, & x \in (0, \pi), t > 0 \\ w(x, 0) = \sin(x/2), & x \in (0, \pi) \\ w(0, t) = 0, & t > 0 \\ w_x(\pi, t) = 0 & t > 0 \end{cases}$$

b) Resoleu el problema (2). (Nota: No cal resoldre amb detall el PVF que obtingueu).

c) Desfent el canvi proposat al primer apartat, trobeu $u(x, t)$, solució del problema (1). Quant val $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(x, t)$?

Solució:

a) De $0 = w_t - w_{xx} = u_t - u_{xx} + v''(x) = -\cos x + v''(x)$. Busquem $v(x)$ tal que $v''(x) = \cos x \Rightarrow v(x) = -\cos x + c_1x + c_2$. Imposant les condicions de contorn tenim

$$0 = w(0, t) = u(0, t) - v(0) = -1 - (-1 + c_2) \Rightarrow c_2 = 0,$$

$$0 = w_x(\pi, t) = u_x(\pi, t) - v'(\pi) = 0 - (\sin \pi + c_1) = c_1 \Rightarrow c_1 = 0.$$

Per tant $v(x) = -\cos x$. La condició inicial ara queda $\sin(x/2) = w(x, 0) = u(x, 0) - v(x) = \sin(x/2) - \cos x + \cos x = \sin(x/2)$ (correcte).

b) Per resoldre (2) apliquem separació de variables, és a dir, busquem solucions de la forma $w(x, t) = X(x)T(t)$. De $w_t - w_{xx} = 0$ es dedueix que $X''(x)/X(x) = T'(t)/T(t) \forall x \in (0, \pi), t > 0$. Per tant, existeix λ constant tal que

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{T(t)} = \lambda,$$

d'on obtenim dues edos: $X''(x) - \lambda X(x) = 0$ i $T'(t) = \lambda T(t)$. Si impossem les condicions de contorn (homogènies) tenim

$$0 = w(0, t) = X(0)T(t) \quad \forall t > 0 \Rightarrow X(0) = 0,$$

$$0 = w_x(\pi, t) = X'(\pi)T(t) \quad \forall t > 0 \Rightarrow X'(\pi) = 0.$$

Per tant, cal resoldre un PVF amb condicions de contorn mixtes:

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0, \quad X(0) = X'(\pi) = 0.$$

Els seus vaps i fups són $\lambda_n = -\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2$ i $X_n(x) = \sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right)$ per a $n = 0, 1, 2, \dots$

Resolent ara l'edo $T'(t) = \lambda_n T(t)$ obtenim

$$T_n(t) = e^{-\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2 t}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Conseqüentment, els modes normals venen donats per

$$w_n(x, t) = X_n(x)T_n(t) = \sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right) e^{-\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2 t}$$

amb $n = 0, 1, 2, \dots$, i la solució general del problema homogeni per

$$(3) \quad w(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n w_n(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right) e^{-\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2 t}.$$

Per a determinar la solució del problema (2), hem de determinar els valors de les constants c_n imposant la condició inicial $w(x, 0) = \sin(x/2)$. Usant que

$$w(x, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right)$$

es dedueix que $c_0 = 1$ i $c_n = 0$ si $n \neq 0$. Per tant, la solució és

$$w(x, t) = \left(\sin \frac{x}{2}\right) e^{-t/4}.$$

- c) Usant que $u(x, t) = w(x, t) + v(x)$ es dedueix que $u(x, t) = \left(\sin \frac{x}{2}\right) e^{-t/4} - \cos x$ i que
- $$\lim_{t \rightarrow +\infty} u(x, t) = -\cos x.$$

TEORIA

1. a) Donat el sistema d'EDOs $\mathbf{x}' = F(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, i una funció escalar $V(\mathbf{x})$, quina condició ha de complir el seu gradient per tal que V sigui constant sobre les trajectòries del sistema (és a dir que $V(\mathbf{x})$ sigui una quantitat conservada per al sistema d'EDOs)?

b) Donada una funció energia $H(q, p)$, definim el sistema d'EDOs associat

$$\begin{cases} \frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}, \\ \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \end{cases}$$

Proveu que la funció $H(q, p)$ és una quantitat conservada per al sistema d'EDOs associat.

2. Sigui el sistema lineal $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$, $\mathbf{v}$ vector propi de valor propi $\lambda > 0$ d' A i $r = [\mathbf{v}]$ la recta que passa per l'origen amb direcció $\mathbf{v}$. Proveu que (i) $r = [\mathbf{v}]$ és una recta invariant del sistema $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$, (ii) de sortida si $\lambda > 0$, (iii) d'entrada si $\lambda < 0$ i (iv) una recta de punts d'equilibri si $\lambda = 0$.

Solució: 1. a. $V(\mathbf{x})$ és una quantitat conservada per al sistema si la seva derivada temporal es idènticament nul·la, és a dir,

$$\langle \text{grad } V(\mathbf{x}), \mathbf{F}(\mathbf{x}) \rangle = 0.$$

b. Si ara $\mathbf{x} = (q, p)$, es té

$$\langle \text{grad } H(\mathbf{x}), \mathbf{F}(\mathbf{x}) \rangle = \langle (H_q, H_p), (H_p, -H_q) \rangle = 0.$$

2. Fet als apunts de teoria:

Sea $\mathbf{x}(t)$ la solució del PVI

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

Si $\mathbf{x}_0 \in r$, entonces $A\mathbf{x}_0 = \lambda\mathbf{x}_0$, luego $\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t}\mathbf{x}_0$. Por tanto, cualquier trayectoria que empieza en un punto de la recta r se mantiene dentro de la recta (por eso decimos que la recta es *invariante*) y para decidir si escapa hacia infinito, tiende al origen o se queda fija basta mirar el signo del VAP λ .