

Problemes. ENTREGUEU EN FULLS SEPARATS.(3h temps)

1. Considereu el següent sistema no lineal, dependent d'un paràmetre $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} x' = \alpha x(1 - y^2) - y(1 - x^2), \\ y' = x(1 - y^2) + \alpha y(1 - x^2), \end{cases}$$

que té com a punts d'equilibri $(0,0)$, $(1,1)$, $(-1,1)$, $(-1,-1)$ i $(1,-1)$. Aquests punts són el centre i els vèrtexs del quadrat $A = [-1, 1] \times [-1, 1]$.

(a) Trobeu els valors de α per als quals una trajectòria $(x(t), y(t))$ amb condició inicial $(x(0), y(0)) \in A$ es mantindrà en el quadrat A per a tot $t \geq 0$.

Ind.: Avalueu el camp vectorial sobre els costats del quadrat.

(b) Per als punts d'equilibri $(0,0)$ i $(1,1)$, trobeu la matriu del sistema linealitzat i classifiqueu-lo en funció de α . Què podem deduir de l'estabilitat d'aquests punts d'equilibri en el sistema no lineal?

(c) Usant com a funció de Lyapunov $V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 - x^2y^2)$, completeu l'estudi de l'estabilitat del punt d'equilibri $(0,0)$.

Solució.

(a) El camp vectorial és

$$F(x, y) = (\alpha x(1 - y^2) - y(1 - x^2), x(1 - y^2) + \alpha y(1 - x^2)).$$

Sobre els costats del quadrat A , tenim:

$$\begin{aligned} F(x, \pm 1) &= (\mp(1 - x^2), \pm\alpha(1 - x^2)), & -1 \leq x \leq 1; \\ F(\pm 1, y) &= (\pm\alpha(1 - y^2), \pm(1 - y^2)), & -1 \leq y \leq 1. \end{aligned}$$

Per a cadascun dels 4 costats, veiem que el camp vectorial apunta cap a l'exterior de A si $\alpha > 0$, apunta cap a l'interior si $\alpha < 0$, i té la mateixa direcció del costat si $\alpha = 0$. Així doncs, perquè una trajectòria amb condició inicial en A es mantingui sobre A per a tot $t \geq 0$, hem de tenir $\alpha \leq 0$.

(b) $DF(0,0) = \begin{pmatrix} \alpha & -1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}$, $T = 2\alpha$, $D = \alpha^2 + 1$, $\Delta = T^2 - 4D = -4$. És focus atractor si $\alpha < 0$, centre si $\alpha = 0$, i focus repulsor si $\alpha > 0$;

$DF(1,1) = \begin{pmatrix} 2 & -2\alpha \\ -2\alpha & -2 \end{pmatrix}$, $T = 0$, $D = -4(\alpha^2 + 1)$. És una sella per a tot $\alpha \in \mathbb{R}$.

Per al sistema no lineal, deduïm que el punt d'equilibri $(0,0)$ és atractor si $\alpha < 0$, repulsor si $\alpha > 0$, i no ho podem decidir per linealització si $\alpha = 0$. D'altra banda, el punt d'equilibri $(1,1)$ és inestable no repulsor per a tot $\alpha \in \mathbb{R}$.

(c) Ens falta veure l'estabilitat del $(0,0)$ en el cas $\alpha = 0$. Notem que la funció V és definida positiva al $(0,0)$. Calculem:

$$W(x, y) = \langle \nabla V(x, y), F(x, y) \rangle \equiv 0, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Per tant, si $\alpha = 0$ el punt d'equilibri $(0,0)$ és estable no atractor, i de fet les trajectòries es mantenen sobre les corbes de nivell de V (ie és un centre no lineal).

2. Considerem el sistema lineal 2D $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ donat per la matriu

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

a) Sigui $\mathbf{x}(t)$ la solució del PVI

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Calculeu $\mathbf{x}(t)$ suposant que $\beta \neq \alpha$. Després, calculeu $\lim_{\beta \rightarrow \alpha} \mathbf{x}(t)$ i comproveu que el límit obtingut és la solució del PVI quan $\beta = \alpha$.

b) Estudieu l'estabilitat del sistema i clasifiqueu el sistema en funció de α i β . Justifiqueu totes les afirmacions.

c) Dibuixeu el croquis del sistema en els casos següents:

i) $\alpha = -1$ i $\beta = 0$.

ii) $\alpha = 0$ i $\beta = 0$.

Justifiqueu tots els dibuixos.

Solució:

a) La matriu A és triangular superior amb VAPs $\lambda_1 = \alpha$ i $\lambda_2 = \beta$. Si $\beta \neq \alpha$, llavors la matriu diagonalitza, els seus VEPs són $\mathbf{v}_1 = (1, 0)$ i $\mathbf{v}_2 = (1, \beta - \alpha)$ i la solució general del sistema és:

$$\mathbf{x}_h(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} c_1 e^{\alpha t} + c_2 e^{\beta t} \\ (\beta - \alpha) c_2 e^{\beta t} \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Determinem el coeficients c_1 i c_2 imposant la condició inicial:

$$\begin{pmatrix} c_1 + c_2 \\ (\beta - \alpha) c_2 \end{pmatrix} = \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow c_1 = \frac{1}{\alpha - \beta}, \quad c_2 = \frac{1}{\beta - \alpha} \Rightarrow \mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} \frac{e^{\beta t} - e^{\alpha t}}{\beta - \alpha} \\ e^{\beta t} \end{pmatrix}.$$

Useu la fórmula de L'Hôpital per calcular el límit de la primera component:

$$\lim_{\beta \rightarrow \alpha} \frac{e^{\beta t} - e^{\alpha t}}{\beta - \alpha} = \frac{0}{0} = \lim_{\beta \rightarrow \alpha} \frac{t e^{\beta t}}{1} = t e^{\alpha t}.$$

El límit de la segona component és obvi: $\lim_{\beta \rightarrow \alpha} e^{\beta t} = e^{\alpha t}$. Finalment, comprovem que el límit $\mathbf{x}_*(t) = \lim_{\beta \rightarrow \alpha} \mathbf{x}(t) = e^{\alpha t} (t, 1)$ és la solució del PVI quan $\beta = \alpha$, ja que

$$\mathbf{x}'_*(t) = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \alpha t + 1 \\ \alpha \end{pmatrix} = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} = A \mathbf{x}_*(t), \quad \mathbf{x}_*(0) = e^0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b) No cal aplicar el criteri traça-determinant perquè la matriu és triangular superior i tenim els dos VAPs: $\lambda_1 = \alpha$ i $\lambda_2 = \beta$. És clar que la matriu no diagonalitza quan $\beta = \alpha$ i $\lambda_1 = \lambda_2 = \alpha$ és un VAP doble.

(També es pot comprovar:

$$\dim[\text{Nuc}(A - \alpha \text{Id})] = 2 - \text{rg} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 \neq 2).$$

En particular, el VAP doble $\lambda_1 = \lambda_2 = \alpha$ no és semi-simple quan $\beta = \alpha$.

Recordem que un sistema lineal homogeni a coeficients constants és inestable si i només si té algun VAP amb part real positiva o té algun VAP no semi-simple amb part real nula. I és atractiu/repulsor si i només si tots els VAPs són negatius/positius. Per tant:

- El sistema és inestable si i només si $\alpha > 0$ o $\beta > 0$ o $\alpha = \beta = 0$.
- El sistema és atractiu si i només si $\alpha < 0$ i $\beta < 0$.
- El sistema és repulsor si i només si $\alpha > 0$ i $\beta > 0$.

Ara recordem que un sistema és degenerat quan algun VAP és zero, és una sella quan els dos VAPs són reals i de signes diferents i és un node quan els dos VAPs són reals i del mateix signe. A més, un node és propi si i només si la matriu diagonalitza. Per tant:

- El sistema és degenerat si i només si $\alpha\beta = 0$.
- El sistema és una sella si i només si $\alpha\beta < 0$.
- El sistema és un node propi si i només si $\alpha\beta > 0$ i $\beta \neq \alpha$.
- El sistema és un node impropri si i només si $\alpha\beta > 0$ i $\beta = \alpha$.

c) Els dos sistemes que ens demanen són degenerats. Les trajectòries de sistemes degenerats formen un feix de rectes paral·leles. Es tracta de dibuixar aquest feix en cada cas.

i) Si $\alpha = -1$ i $\beta = 0$, llavors tenim un VAP negatiu de VEP $\mathbf{v}_1 = (1, 0)$ i un VAP nul de VEP $\mathbf{v}_2 = (1, 1)$. Per tant, l'eix horitzontal és una recta d'entrada i la bisectriu del primer i tercer quadrant és una recta de punts d'equilibri. Totes les altres trajectòries són paral·leles a l'eix horitzontal perquè

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ 0 \end{pmatrix} = (x_2 - x_1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

ii) Si $\alpha = \beta = 0$, llavors tenim un VAP nul doble però només un VEP: $\mathbf{v} = (1, 0)$. Per tant, l'eix horitzontal és una recta de punts d'equilibri i totes les altres trajectòries són paral·leles a l'eix horitzontal perquè

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

A més, les trajectòries contingudes al semiplà superior/inferior es mouen cap a la dreta/esquerra perquè la primera equació del sistema ens diu que $x_1' = x_2$.

3 Considereu l'equació de la calor amb condicions inicials mixtes

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & x \in (0, \pi) \quad t > 0 \\ u(x, 0) = 1 + \sin x + \cos^3\left(\frac{x}{2}\right) & x \in (0, \pi) \\ u_x(0, t) = e^{-t} & t > 0 \\ u(\pi, t) = 1 & t > 0 \end{cases}$$

a) Busqueu una solució particular de la forma $v(x, t) = A + Be^{-t} \sin x$ del problema

$$\begin{cases} v_t - v_{xx} = 0 & x \in (0, \pi) \quad t > 0 \\ v_x(0, t) = e^{-t} & t > 0 \\ v(\pi, t) = 1 & t > 0 \end{cases}$$

b) Calculeu els valors propis i funcions pròpies del PVF

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0, \quad X(\pi) = 0, \quad X'(0) = 0$$

c) Resoleu

$$\begin{cases} w_t - w_{xx} = 0 & x \in (0, \pi) \quad t > 0 \\ w(x, 0) = \cos^3\left(\frac{x}{2}\right) & x \in (0, \pi) \\ w_x(0, t) = 0 & t > 0 \\ w(\pi, t) = 0 & t > 0 \end{cases}$$

(Recordeu que $\cos^3(\theta) = \frac{3}{4} \cos(\theta) + \frac{1}{4} \cos(3\theta)$.)

d) A partir dels resultats obtinguts als apartats anteriors, trobeu la solució del problema original.

SOLUCIO:

a) Imposant-ho, surt directament $A = B = 1$.

b) i c) Aplicant el mètode de les variables separades: $w(x, t) = X(x)T(t)$, s'ha de complir:

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0, \quad X(\pi) = 0, \quad X'(0) = 0$$

$$T'(t) - \lambda T(t) = 0$$

Per al primer problema de contorn, prenem $\lambda = -\mu^2$, $X(x) = C_1 \cos(\mu x) + C_2 \sin(\mu x)$ i trobem $\mu_n = n/2$, ie $\lambda_n = -n^2/4$, (VAPs), i $X_n(x) = \cos(\frac{n}{2}x)$, (FUPs) per a $n \geq 1$, n senar. Llavors $T(t) = e^{-\frac{n^2}{4}t}$.

Prenem ara

$$w(x, t) = \sum_{n=1, n \text{ senar}}^{\infty} c_n e^{-\frac{n^2}{4}t} \cos\left(\frac{n}{2}x\right)$$

.

Imposant la condició no homogènia, tenim: $c_n = 0$ excepte $c_1 = 3/4$, $c_3 = 1/4$.

Llavors la solució del problema de l'apartat (c) és

$$w(x, t) = \frac{3}{4}e^{-\frac{t}{4}} \cos\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{4}e^{-\frac{9t}{4}} \cos\left(\frac{3x}{2}\right).$$

d) La solució del problema original és: $u(t, x) = v(x, t) + w(x, t)$.

Teoria (25 minuts)

- (a) Enuncieu el teorema d'estabilitat per a sistemes lineals homogenis amb coeficients constants i el teorema d'estabilitat per linealització de punts d'equilibri per a sistemes autònoms no lineals.
- (b) Comenteu les principals diferències entre els dos teoremes.
- (c) Indiqueu algun exemple (de valors propis de la matriu A corresponent) per a dimensió $n = 3$ on es mostri que un teorema decideix l'estabilitat (o inestabilitat) i l'altre no.

Solució:

(a) Apunts de teoria

(b) Algunes principals diferències són:

- El primer teorema s'aplica a tot el sistema lineal, mentre que el segon s'aplica només a un punt fix concret del sistema no lineal;

- Si entre els VAPs apareix un parell amb la part real zero (i la resta amb part real negativa), el primer teorema implica l'estabilitat del sistema, mentre que el segon teorema no decideix l'estabilitat del punt fix corresponent;

(c) $\lambda_1 = +i, \lambda_2 = -i, \lambda_3 = -3$.