

Teoria (30 minuts, 2punts)

- (a) Donat el PVI $x' = x^2$, $x(0) = x_0$, calculeu la solució $x(t)$ explícitament.
- (b) Representeu-la en el pla (t, x) distingint els cassos
 - (i) $x_0 > 0$
 - (ii) $x_0 = 0$
 - (iii) $x_0 < 0$Quin és l'interval de definició de la funció $x(t)$ en cada cas?
- (c) Representeu el retrat de fases (croquis de les òrbites) de l'equació $x' = x^2$.
- (d) Si $x_0 > 0$ i l'interval de definició de $x(t)$ és (a, b) , quant val $\lim_{t \rightarrow a} x(t)$, $\lim_{t \rightarrow b} x(t)$?
- (e) Idem si $x_0 = 0$.
- (f) Idem si $x_0 < 0$.

Problemes (3h temps)

1. (3 punts) Donada una funció $H(x, y)$, $C^\infty \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, direm que el sistema diferencial Hamiltonià associat a la funció $H(x, y)$ és

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y} \\ \frac{dy}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x} \end{cases}$$

- (a) Donat un sistema diferencial Hamiltonià, calculeu la derivada temporal de la funció $H(x, y)$ i comproveu que és una quantitat conservada (o també una integral primera) per al sistema.

A partir d'ara prendrem $H(x, y) = \frac{1}{2} \left(y^2 - x^2 + \frac{x^4}{2} \right)$

- (b) Escriviu el sistema diferencial Hamiltonià associat.
 (c) Calculeu-ne els punts d'equilibri.
 (d) Estudieu l'estabilitat de cada punt d'equilibri del sistema diferencial no lineal amb el mètode de linealització.
 (e) Justifiqueu que les òrbites es troben sobre les corbes $y = \pm \sqrt{E - \mathcal{U}(x)}$, concretant qui és E i $\mathcal{U}(x)$.
 (f) Representeu el retrat de fases (o croquis de les òrbites) del sistema diferencial donant també el sentit de recorregut de les òrbites. (Indicació: representeu la funció $\mathcal{U}(x)$.)

2. (2.5 punts) Considereu el sistema al pla $X' = AX$, amb $A = \begin{pmatrix} \mu^2 & -10 \\ 10 & -4 \end{pmatrix}$.

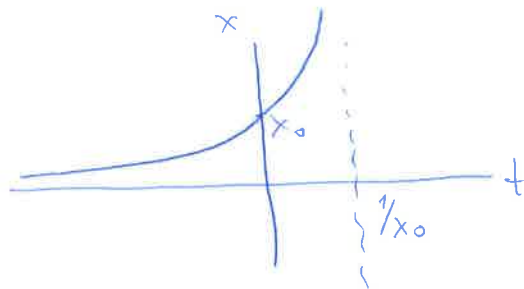
- (a) Classifiqueu el sistema, de la manera més detallada possible, en funció del paràmetre $\mu \in \mathbb{R}$. Quins són els punts de bifurcació?
 (b) Per a $\mu = 4\sqrt{3}$, trobeu les condicions inicials tals que $X(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. (Nota: $\sqrt{2304} = 48$)
 (c) Feu el retrat de fase (croquis de les òrbites) en el cas $\mu = 4$.
 (d) Per a $\mu = 2$, considereu el PVI: $X' = AX, X(0) = X_0$. Expressen la solució en funció d'una base adequada tal que, en aquesta base, les components descriuen una circumferència.
 (e) Per a $\mu = 2$, trobeu un canvi de coordenades $(\bar{x}, \bar{y})$, on les òrbites siguin circumferències. És a dir, trobeu $T: (x, y) \rightarrow (\bar{x}, \bar{y})$ on (x, y) són les coordenades cartesianes.
 3. (2.5 punts) Es pinça pel seu punt mig una corda de guitarra de longitud L i es deixa anar. Per l'efecte del pinçament la corda descriu inicialment un triangle isòsceles d'altura $h \ll L$. Trobeu la forma de la corda a temps $t > 0$, seguint els següents apartats:

- (a) Escriviu l'equació corresponent (suposeu que la velocitat de propagació de les ones és una constant c coneguda), amb les condicions inicials i de vora adients.
 (b) Resoleu per separació de variables.
 (c) Observeu periodicitat en temps de la solució? Quines són totes les freqüències dels modes normals de la corda?

TEORIA

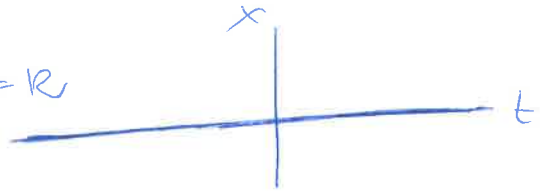
a) $\frac{dx}{x^2} = dt \Rightarrow -\frac{1}{x} = t + C \quad \left\{ \begin{array}{l} \Rightarrow C = -\frac{1}{x_0} \Rightarrow x(t) = \frac{x_0}{1 - x_0 t} \\ x(0) = x_0 \end{array} \right.$

b) $\cdot$ si $x_0 > 0$

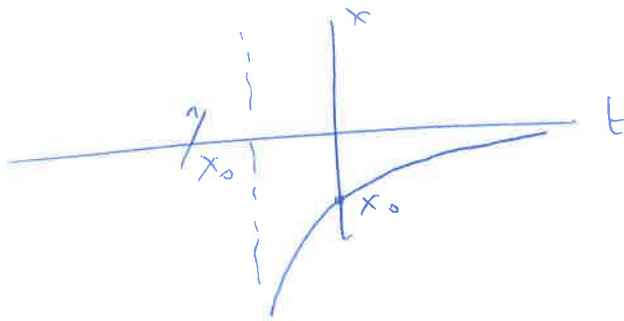


intervall de definiție
 $I = (-\infty, 1/x_0)$

$\cdot$ si $x_0 = 0 \Rightarrow x(t) = 0 \quad \forall t \quad I = \mathbb{R}$



$\cdot$ si $x_0 < 0$, $I = (1/x_0, \infty)$



c) $f(x) > 0$ $f(x) > 0$

(d'accord avec la représentation de l'équation (b))

d) si $x_0 > 0$ $\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = 0$, $\lim_{t \rightarrow 1/x_0} x(t) = +\infty$

e) si $x_0 = 0$ $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} x(t) = 0$

f) si $x_0 < 0$ $\lim_{t \rightarrow 1/x_0} x(t) = -\infty$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$

$$1. a) \frac{dH}{dt}(x(t), y(t)) = \frac{\partial H}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial H}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial y} \left(-\frac{\partial H}{\partial x} \right) = 0$$

$$b) \text{ SML } \begin{cases} x' = y \\ y' = x - x^3 \end{cases}$$

$$c) (-1, 0), (0, 0), (1, 0)$$

$$d) A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - 3x_0^2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A|_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{VAP } \pm 1 \Rightarrow (0,0) \text{ Inestable per al SML (sella)}$$

$$A|_{(\pm 1,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{VAP } \pm \sqrt{2}i \quad \text{No decideix.}$$

e) Sabem que $H(x, y)$ és una integral primera per tant les òrbites es descriuran per les corbes de nivell

$$H(x, y) = C \Leftrightarrow y^2 - x^2 + \frac{x^4}{2} = 2C = E$$

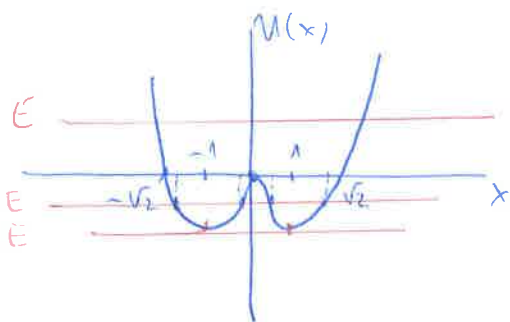
$$\Leftrightarrow y = \pm \sqrt{E - \left(\frac{x^4}{2} - x^2 \right)} = \pm \sqrt{E - \underbrace{U(x)}}$$

f) Per a cada E representem la corba de nivell

$$y = \pm \sqrt{E - U(x)}. \quad \text{És a dir que caldrà prendre } x \text{ t.q.}$$

$$U(x) \leq E$$

Gràfica de la $U(x)$:



Calcular $E = 2C = 2H$ en el punt d'equilibri

En $(0,0)$ $E = 2H(0,0) = 0$

En $(\pm 1,0)$ $E = 2H(\pm 1,0) = -\frac{1}{2}$

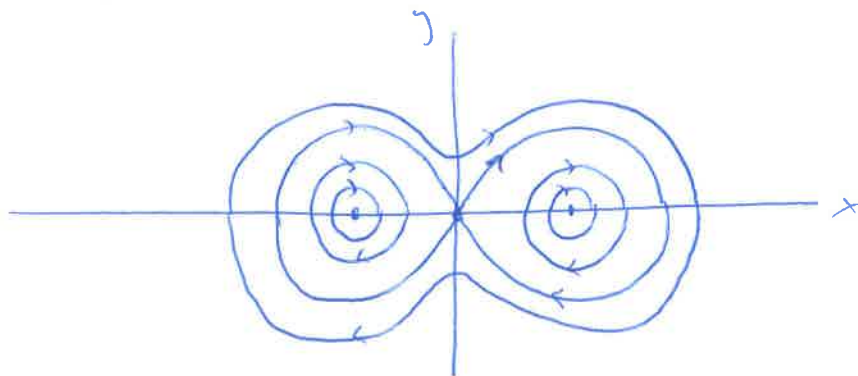
Si $E = -\frac{1}{2} \Rightarrow$ Corba de nivell = es redueix al punt $(\pm 1,0)$

Si $E \in (-\frac{1}{2}, 0)$ llavors $U(x) \leq E \Rightarrow x \in [-x_1, -x_2] \cup [x_2, x_1]$

Si $E = 0$ llavors $U(x) \leq E \Rightarrow x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ i $U(x)$ s'anula en $x = 0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}$.

Si $E > 0$ llavors $U(x) \leq E \Rightarrow x \in [-a, a]$

Així podem deduir per a cada E la corresponent corba de nivell. El conjunt (al variar E) de les corbes de nivell ens dona el retrat de fases del SNL.



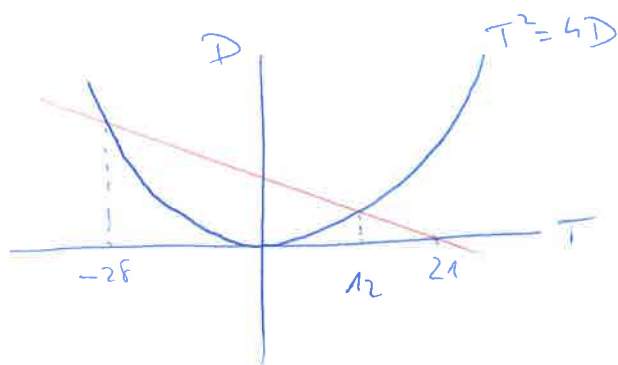
2. a) Una manera de fer-ho:

$$T = \mu^2 - 4$$

$$D = -4\mu^2 + 100$$

$$\Delta = \mu^4 + 8\mu^2 - 384$$

$$\rightarrow D = -4(T+4) + 100 = -4T + 84$$



$$\begin{cases} D = -4T + 84 \\ T^2 = 4D \end{cases} \Rightarrow T = 12, T = -28$$

- Si $T \leq -28 \Leftrightarrow \mu^2 - 4 \leq -28 \Leftrightarrow \mu^2 \leq -24$ Mai

- Si $-28 < T < 0 \Leftrightarrow -28 < \mu^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow -24 < \mu^2 < 4$
 $0 \leq \mu^2$

Si $\mu \in (-2, 2)$ form AE

- Si $T = 0 \Leftrightarrow \mu^2 = 4 \Leftrightarrow \mu = \pm 2$ centre

- Si $T \in (0, 12) \Leftrightarrow 0 < \mu^2 - 4 < 12 \Leftrightarrow 4 < \mu^2 \leq 16 \Leftrightarrow \begin{cases} 2 < \mu \leq 4 \\ \text{or} \\ -4 < \mu \leq -2 \end{cases}$
 form I.

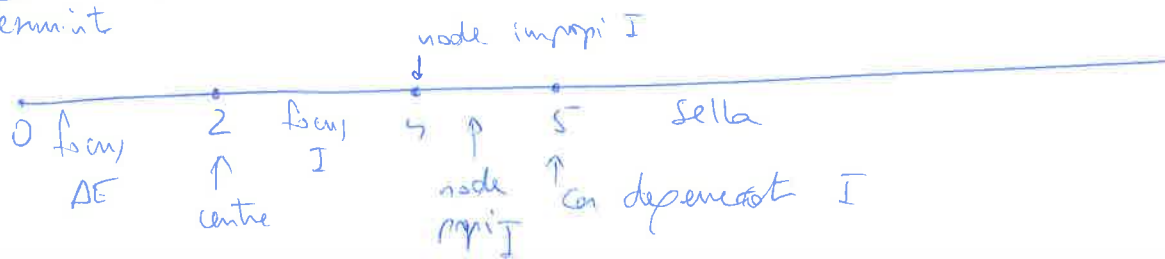
- Si $T = 12 \Leftrightarrow \mu = \pm 4$ node impropri I

- Si $T \in (12, 21) \Leftrightarrow \begin{cases} 4 < \mu \leq 5 \\ \text{or} \\ -5 \leq \mu < -4 \end{cases}$ Node propi I

- Si $T = 21 \Leftrightarrow \mu = \pm 5$ Con dependent I

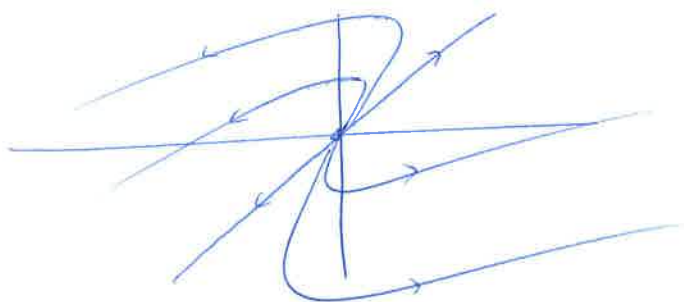
- Si $T > 21 \Leftrightarrow \begin{cases} \mu > 5 \\ \text{or} \\ \mu < -5 \end{cases}$ sella

NOTA: Només caldrà fer la discriminant per a $\mu \geq 0$.
 Remint



b) Per $\alpha = \mu = 4\sqrt{3}$ tenim una sella. L'única vsp
 $\lambda = -2$ té com a vsp $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$. Per tant les condicions
 inicials han de ser $\vec{x}_0 = k \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ amb $k \in \mathbb{R}$.

c) Per $\alpha = \mu = 4$ tenim un node impropri inestable.
 El vsp $\lambda = 6$ vsp $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$: $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 10 \end{pmatrix}$ per tant



d) Per $\alpha = \mu = 2$ tenim $\lambda_{\pm} = \pm i 2\sqrt{21}$.

i vsp $v_{\pm} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \pm i \begin{pmatrix} \sqrt{21} \\ 0 \end{pmatrix}$. Si en centre. Sigui $\begin{cases} \vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \\ \vec{w} = \begin{pmatrix} \sqrt{21} \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$

Si donem qualsevol condició inicial
 $\vec{x}_0$, existeixen $a_0, b_0 \in \mathbb{R}$ tals que $\vec{x}_0 = a_0 \vec{u} + b_0 \vec{w}$

i podem expressar la solució

$$x(t) = a(t) \vec{u} + b(t) \vec{w} \quad \text{on} \quad \begin{cases} a(t) = (\cos \beta t) a_0 + (\sin \beta t) b_0 \\ b(t) = (-\sin \beta t) a_0 + (\cos \beta t) b_0 \end{cases}$$

i és complex $(a(t))^2 + (b(t))^2 = a_0^2 + b_0^2$.

e) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \bar{x} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + \bar{y} \begin{pmatrix} \sqrt{21} \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2\bar{x} + \sqrt{21}\bar{y} \\ y = 5\bar{x} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \bar{x} = y/5 \\ \bar{y} = \frac{1}{\sqrt{21}} \left(x - \frac{2y}{5} \right) \end{cases}$$

3. a)



$$f(x) = \begin{cases} \frac{2h}{L}x & \text{si } x \in (0, L/2) \\ 2h - \frac{2h}{L}x & \text{si } x \in [L/2, L) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Ia} & \left\{ \begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0 & x \in (0, L) \quad t \in \mathbb{R} \end{aligned} \right. \\ \text{Ib} & \left\{ \begin{aligned} u(0, t) &= u(L, t) = 0 & \text{(corde fixada als extrems)} \end{aligned} \right. \\ \text{Ic} & \left\{ \begin{aligned} u(x, 0) &= f(x) & \text{(posici3 inicial)} \end{aligned} \right. \\ \text{Id} & \left\{ \begin{aligned} u_t(x, 0) &= 0 & \text{(velocitat inicial)} \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

b) volem $u(x, t) = \sum X(x) T(t)$ derivant de Ia, Ib, Id. $\rightarrow$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} X'' &= \lambda X \\ X(0) &= X(L) = 0 \end{aligned} \right. & \rightarrow \text{vps } \lambda_n = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, n \geq 1 \\ & \text{vps } X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \\ \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} T'' &= c^2 \lambda T \\ T'(0) &= 0 \end{aligned} \right. & \rightarrow T(t) = C_1 \sin\left(\frac{cn\pi t}{L}\right) + C_2 \cos\left(\frac{cn\pi t}{L}\right) \\ & T'(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow T_n(t) = \cos\left(\frac{cn\pi t}{L}\right) \quad n \geq 1$$

Modes normals: $u_n(x, t) = X_n(x) T_n(t) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{cn\pi t}{L}\right)$

Preuem ara $u(x, t) = \sum_{n \geq 1} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{cn\pi t}{L}\right)$

• trobem els b_n adequats $\frac{1}{L}$ i compleixen amb Ic.

$$f(x) = u(x, 0) = \sum_{n \geq 1} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Determinar $f(x)$ en série de Fourier de sinus:

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx =$$

$$= \frac{2}{L} \int_0^{L/2} \frac{2h}{L} x \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx + \frac{2}{L} \int_{L/2}^L \left(2h - \frac{2h}{L}x\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

Calcular $\int x \sin \frac{n\pi x}{L} dx = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{repete}}}{-\frac{Lx}{n\pi}} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + \left(\frac{L}{n\pi}\right)^2 \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$

Finalmente se tiene

$$b_n = \frac{8h}{n\pi} \left[\frac{1}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) + 1 \right]$$

(c) Periodicidad en el tiempo: $\frac{cn}{L} T = 2\pi \Rightarrow \boxed{T = \frac{2L}{c}}$

Frecuencias de los modos normales:

$$\text{El periodo } \Delta t_p = \frac{2\pi}{cn/L} = \frac{2L}{nc} \Rightarrow \text{frecuencia } \frac{2\pi}{P} = \frac{n\pi c}{L}$$