

Teoria (25 minuts)

(2 punts)

- Considerem el sistema 2D de primer ordre autònom en forma normal

$$(1) \quad \begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases}$$

per a algunes funcions $f, g : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 .

- Què és el camp de vectors associat a aquest sistema?
- Quina relació existeix entre el camp de vectors i les solucions del sistema?
- Quina relació existeix entre les trajectòries del sistema inicial i les del sistema

$$\begin{cases} x' = 3f(x, y) \\ y' = 3g(x, y) \end{cases} ?$$

- Definiu amb precisió que (x_0, y_0) és un punt d'equilibri de (1).
- Definiu amb precisió que (x_0, y_0) és un punt d'equilibri estable de (1).

Important: Responen en aquest mateix full. Es valorarà la claredat i brevetat de la resposta. Pot ser útil incloure alguns dibuixos.

Resolució:

- El camp de vectors associat al sistema es construeix mitjançant la regla següent: a cada punt $(x, y) \in D$ li assignem el vector amb origen en aquest punt i direcció $(f(x, y), g(x, y))$.
- Donada una corba $(x(t), y(t))$, el vector tangent a la corba en el punt $(x(t), y(t))$ ve donat per $(x'(t), y'(t))$. Per tant, veiem que la corba $(x(t), y(t))$ és solució del sistema si, i només si, la corba és tangent en tots els seus punts al camp de vectors. Doncs, hem relacionat un problema analític (resoldre el sistema d'EDO's inicial) amb un problema geomètric (trobar corbes tangents a un camp de vectors).
- El factor 3 davant de les funcions $f(x, y)$ i $g(x, y)$ fa que els vectors del camp de vectors associat al tercer sistema inguin la mateixa direcció y sentit que els vectors del camp associat al sistema inicial, però triple longitud. Per tant, les trajectòries són les mateixes però recorregudes a triple velocitat.
- $f(x_0, y_0) = g(x_0, y_0) = 0$, i.e., que $(x(t), y(t)) = (x_0, y_0)$ és una solució constant per a tot t .
- Si $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tal que

$$\|X(0) - X_0\| \leq \delta \implies \|X(t) - X_0\| \leq \varepsilon \quad \forall t > 0$$

on $X_0 = (x_0, y_0)$, $X(t) = (x(t), y(t))$ i $X(0) = (x(0), y(0))$.

Problemes

1. Considerem el sistema no lineal $X' = F(X)$:

3 punts

$$(1) \quad \begin{cases} x' = \mu x - y - x(x^2 + y^2) \\ y' = x + \mu y - y(x^2 + y^2) \end{cases} \quad \mu \in \mathbb{R}$$

l'origen és un punt d'equilibri d'(1).

(a) Estudieu l'estabilitat del sistema linealitzat al $(0,0)$ segons els valors de μ . Què podeu deduir de l'estabilitat del sistema no lineal?

• Sigui $X' = AX$ el sistema linealitzat al $(0,0)$ i considereu $\mu < 0$. Aleshores:

(b) Trobeu $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ la solució del PVI: $X' = AX$, $X(0) = X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$.

(c) Calculeu la distància del punt $X(t) = (x(t), y(t))$, solució de l'apartat anterior, a l'origen en funció de t i de la distància de $X_0 = (x_0, y_0)$ a l'origen. Quant temps t_* cal esperar per a que la nostra solució $X(t)$ estigui a la meitat de la distància inicial?

(d) En el cas $\mu = 0$, què es pot dir de l'estabilitat del $(0,0)$ per al sistema no lineal (1) amb el mètode de Lyapunov?

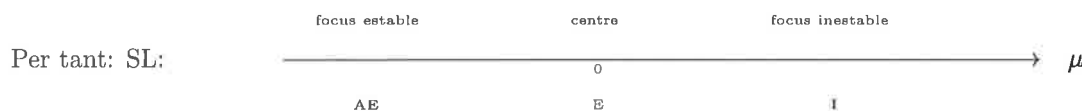
Resolució:

(a) El punt $(0,0)$ és punt d'equilibri $F(0,0) = (0,0)$

$$DF(x,y) = \begin{pmatrix} \mu - 3x^2 - y^2 & -1 - 2xy \\ 1 - 2xy & \mu - x^2 - 3y^2 \end{pmatrix} \Rightarrow DF(0,0) = \begin{pmatrix} \mu & -1 \\ 1 & \mu \end{pmatrix} = A$$

$$D = \mu^2 + 1 > 0; \quad T = 2\mu; \quad \Delta = T^2 - 4D = 4\mu^2 - 4(\mu^2 + 1) = -4 < 0 \rightarrow \text{vap's complexes}$$

$$p(\lambda) = \lambda^2 - T\lambda + D = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{T \pm \sqrt{T^2 - 4D}}{2} = \frac{T \pm \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{2\mu \pm \sqrt{-4}}{2} = \mu \pm i$$



(b) Cas $\mu < 0$: Focus estable (AE)

$$\lambda = \mu + i : u \in \text{Nuc}(A - (\mu + i)I) = \text{Nuc} \begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow u = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_v + i \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_w \quad \text{és vector propi}$$

$$\Rightarrow X(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} e^{\mu t} \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \quad \text{és solució general.}$$

Imposem

$$X(0) = X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c_1 \\ -c_2 \end{pmatrix}$$

i per tant la solució buscada és

$$X(t) = e^{\mu t} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ -y_0 \end{pmatrix}$$

o bé

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{\mu t} \begin{pmatrix} x_0 \cos t - y_0 \sin t \\ x_0 \sin t + y_0 \cos t \end{pmatrix}$$

(c) Calculem

$$\begin{aligned} d^2((x(t), y(t)), (0, 0)) &= x^2(t) + y^2(t) = e^{2\mu t} (x_0^2 \cos^2 t + y_0^2 \sin^2 t - 2x_0 y_0 \sin t \cos t + x_0^2 \sin^2 t + \\ &\quad + y_0^2 \cos^2 t + 2x_0 y_0 \sin t \cos t) = e^{2\mu t} (x_0^2 + y_0^2) \end{aligned}$$

i per tant $d(X(t), 0) = e^{\mu t} d(X(0), 0)$. Aleshores, si volem $d(X(t), 0) = \frac{1}{2} d(X(0), 0) \Rightarrow$

$$e^{\mu t_*} = \frac{1}{2} \Rightarrow \mu t_* = \log \frac{1}{2} = -\log 2 \Rightarrow t_* = -\frac{\log 2}{\mu}.$$

(d) $\mu = 0$, sistema complet

$V(x, y) = x^2 + y^2$ és $C^1(\mathbb{R}^2)$ i definida positiva a $(0, 0)$.

$$\text{Calculem } W(x, y) = \frac{d}{dt}(V(x(t), y(t))) = \nabla V \cdot F = (2x \quad 2y) \begin{pmatrix} -y - x(x^2 + y^2) \\ x - y(x^2 + y^2) \end{pmatrix} =$$

$$= -2xy - 2x^2(x^2 + y^2) + 2yx - 2y^2(x^2 + y^2) = -2(x^2 + y^2)(x^2 + y^2) = -2(x^2 + y^2)^2 < 0, \quad \text{def. negativa al } (0, 0)$$

$\Rightarrow (0, 0)$ és atractor (AE).

2. Considereu el següent sistema no lineal d'equacions diferencials:

(2,5 punt)

$$(*) \quad \begin{cases} x' = x - 2y - x^2 + 2xy - y^2 \\ y' = -y \end{cases}$$

- (a) Trobeu els seus 2 punts d'equilibri i estudieu la seva estabilitat.
- (b) Feu un croquis del sistema linealitzat per a cadascun dels punts d'equilibri.
- (c) Trobeu els valors de a per als quals el sistema no lineal té $y = x + a$ com a recta invariant (és a dir, una solució amb condició inicial sobre la recta es manté sempre sobre la recta).
- (d) Proveu que la recta $y = 0$ és invariant per al sistema $(*)$ i doneu el retrat de fase sobre aquesta recta.
- (e) Feu un croquis aproximat del retrat de fase del sistema no lineal.

Resolució:

- (a) Trobant els zeros del camp vectorial $F(x, y) = (x - 2y - x^2 + 2xy - y^2, -y)$, obtenim com a els punts d'equilibri: $(0, 0)$ $(1, 0)$. Per estudiar l'estabilitat, calculem la matriu jacobiana en cadascun dels punts:

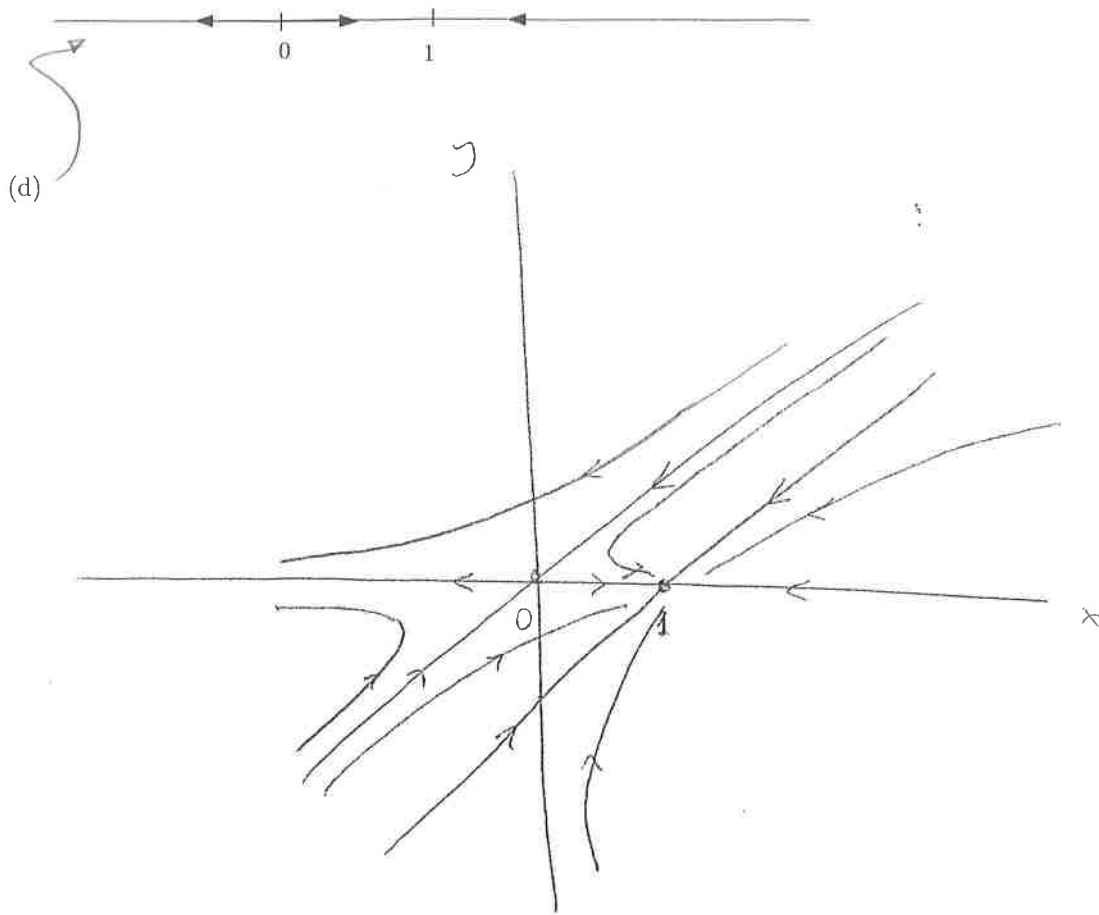
$$DF(0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad DF(1, 0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

La primera matriu té valors propis ± 1 , i per tant el punt d'equilibri $(0, 0)$ és inestable (no repulsor). La segona matriu té -1 com a valor propi doble, i per tant el punt d'equilibri $(1, 0)$ és un atractor.

(b) A partir de les matrius anteriors:

- El sistema linealitzat al $(0, 0)$ és una sella. Els valors propis són -1 i 1 , amb vectors propis $(1, 1)$ i $(1, 0)$ respectivament, que ens donen les direccions atractora i repulsora.
- El sistema linealitzat al $(1, 0)$ és un node propi atractor, ja que la matriu diagonalitza. Totes les direccions són pròpies.

- (c) Una recta $y = x + a$ serà invariant si el camp vectorial en tots els seus punts té pendent 1. Per tant, calculem $F(x, x + a)$ i igualet els seus dos components, obtenint l'equació $-x - 2a - a^2 = -x - a$. Aquesta es compleix per a tot x si $a = 0$ o $a = -1$, la qual cosa ens dona $y = x$ i $y = x - 1$ com a rectes invariants.



- (e) Amb la informació obtinguda i observant també que $y(t)$ decreix quan $y(t) > 0$, i creix quan $y(t) < 0$ (ja que $y' = -y$), podem dibuixar el croquis.

3. (a) Resoleu el següent problema de valors inicials per l'equació de la corda vibrant amb una corda de longitud infinita:

(2,5 punts)

$$u_{tt} = u_{xx}, \quad u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = \sin(3x), \quad x \in \mathbb{R}, t \geq 0.$$

- (b) Resoleu el següent problema de valors inicials amb condicions de frontera de tipus Dirichlet homogeni per l'equació de la corda vibrant amb una corda de longitud 2π :

$$u_{tt} = u_{xx}, \quad u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = \sin(3x), \quad u(0, t) = u(2\pi, t) = 0, \quad x \in [0, 2\pi], t \geq 0.$$

(No cal que resoleu en detall el problema de valors a la frontera que obtenim en fer separació de variables.)

- (c) Siguin $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dues funcions senars i periòdiques de període $L > 0$. Considereu el següent problema de valors inicials per l'equació de la corda vibrant amb una corda de longitud infinita:

$$u_{tt} = u_{xx}, \quad u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad x \in \mathbb{R}, t \geq 0.$$

Resoleu-lo per D'Alembert en termes de f i g i proveu que la seva solució verifica:

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad \forall t \geq 0.$$

Què ens permet concloure aquest resultat en relació als apartats (a) i (b)? Justifiqueu la resposta.

Resolució:

(a) D'Alembert: $u(x, t) = \frac{1}{2}(f(x+t) + f(x-t)) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} g(s) ds$, on $f(x) = 0$, $g(x) = \sin(3x)$

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \sin(3s) ds = -\frac{1}{6} [\cos(3s)]_{s=x-t}^{s=x+t} = \frac{1}{6} [\cos(3(x-t)) - \cos(3(x+t))] = \frac{1}{3} \sin(3x) \sin(3t).$$

(b) Busquem solucions en variables separades $u(x, t) = X(x)T(t)$ de

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} \Rightarrow XT'' = X''T \Rightarrow \frac{X''}{X} = \frac{T''}{T} = \mu = \text{const.} \\ u(x, 0) = 0 \Rightarrow X(x)T(0) = 0 \Rightarrow T(0) = 0 \\ u(0, t) = 0 \Rightarrow X(0)T(t) = 0 \Rightarrow X(0) = 0 \\ u(2\pi, t) = 0 \Rightarrow X(2\pi)T(t) = 0 \Rightarrow X(2\pi) = 0 \end{cases}$$

Resolem el PVF:

$$\begin{cases} X'' = \mu X \\ X(0) = X(2\pi) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \text{fups: } X_n(x) = \sin\left(\frac{n}{2}x\right) \\ \text{vap's: } \mu = \mu_n = -\left(\frac{n}{2}\right)^2 \\ n = 1, 2, 3, \dots \end{matrix}$$

Resolem l'equació per T:

$$\begin{aligned} T_n'' &= \mu_n T_n = -\left(\frac{n}{2}\right)^2 T_n \Rightarrow T_n(t) = A \cos\left(\frac{n}{2}t\right) + B \sin\left(\frac{n}{2}t\right) \\ T_n(0) &= 0 \Rightarrow A = 0 \quad T_n(t) = \sin\left(\frac{n}{2}t\right) \quad (\text{fem } B = 1) \end{aligned}$$

Solucions en variables separades: $u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t) = \sin\left(\frac{n}{2}x\right) \sin\left(\frac{n}{2}t\right)$.

$$\text{Busquem } u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n}{2}x\right) \sin\left(\frac{n}{2}t\right)$$

Solució equació inicial cal:

$$\sin(3x) = u_t(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{n}{2} \sin\left(\frac{n}{2}x\right) \Rightarrow \begin{matrix} c_n = 0 & \text{si } n \neq 6 \\ 3c_6 = 1 \Rightarrow c_6 = 1/3 \end{matrix}$$

Solució: $u(x, t) = \frac{1}{3} \sin(3x) \sin(3t)$.

(c) Solució per D'Alembert és:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2}(f(x+t) + f(x-t)) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} g(s) ds \\ u(0, t) &= \frac{1}{2}(f(-t) + f(-t)) + \frac{1}{2} \int_{-t}^t g(s) ds = 0 \end{aligned}$$

ja que $f(t) = -f(-t)$, la integral d'una funció senar en un interval simètric és zero

$$\begin{aligned} u(L, t) &= \frac{1}{2}(f(L+t) + f(L-t)) + \frac{1}{2} \int_{L-t}^{L+t} g(s) ds = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} f(L+t) = f(t) \\ f(L-t) = f(-t) \end{array} \right\} \text{ per periodicitat} \\ &\quad \left\{ \begin{array}{l} \text{canvi } v = s - L, \quad dv = ds \\ g(s) = g(v+L) = g(v) \end{array} \right\} = \frac{1}{2}(f(L+t) + f(L-t)) + \frac{1}{2} \int_{-t}^t g(v) dv = 0. \end{aligned}$$

En relació a (a) i (b), és clar que $f(x) = 0$ i $g(x) = \sin(3x)$ són senars i 2π -periòdiques i per tant les solucions dels 2 apartats són la mateixa funció.