

(1) 2,5 punts Contesteu les següents preguntes (independents entre sí)

(a) Considereu el sistema $X'(t) = AX(t)$ amb $A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & -1 \end{pmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a.1) Classifiqueu-lo.

(a.2) Considereu el problema de Cauchy $X'(t) = AX(t)$, $X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Existeix algun valor de α tal que la solució satisfà $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|X(t)\| = 0$?

(b) Estudieu l'estabilitat del $(0,0)$ punt d'equilibri del sistema $\begin{cases} x' = -4x + x^3 - 2x^2y \\ y' = x^2y \end{cases}$ pel mètode

de Lyapunov, prenent la funció $V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$.

(c) Sigui $u(x, t)$ una solució del PVI

$$\begin{cases} u_t - k^2 u_{xx} = 0 & 0 < x < L, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) & 0 < x < L \\ u(0, t) = 0 & t > 0 \\ u(L, t) = 0 & t > 0 \end{cases}$$

Proveu que $E(t) = \frac{1}{2} \int_0^L u^2(x, t) dx$ mai és creixent.

Resolució:

(a) (i) traça $A = 0$ $\det A = -1 - \alpha^2 < 0 \implies$ sella

(ii) (És un problema de la llista)

VAP d' A $\lambda_{+,-} = \pm \sqrt{1 + \alpha^2}$.

Cal que $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sigui VEP de λ_- :

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda_- \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 1 + \alpha = \lambda_- \\ \alpha - 1 = \lambda_- \end{cases} \implies 1 + \alpha = \alpha - 1 \implies 1 = -1 (\text{impossible})$$

$\implies$ no hi ha cap valor de α .

(b) $W(x, y) = x^2[(x - y)^2 - 4]$ és semidefinida negativa en $(0, 0)$ per tant $(0, 0)$ és estable.

(c) (És un problema de la llista). N'hi ha prou amb provar que $E'(t) \leq 0$:

$$\begin{aligned} E'(t) &= \int_0^L u(x, t) u_t(x, t) dx \stackrel{\uparrow \text{EDP}}{=} k^2 \int_0^L u(x, t) u_{xx}(x, t) dx = \\ &= \begin{cases} \text{per parts} \\ U = u, \quad dU = u_x dx \\ dV = u_{xx} dx, \quad V = u_x \end{cases} \\ &= k^2 [u(x, t) u_x(x, t)]_{x=0}^{x=L} - k^2 \int_0^L u_x^2(x, t) dx \stackrel{\uparrow}{=} \underset{u(0, t) = u(L, t) = 0}{=} -k^2 \int_0^L u_x^2(x, t) dx \leq 0. \end{aligned}$$

(2) 2,5 punts Considerem el sistema $\begin{cases} x' = 3x^2 - xy \\ y' = 12x^3 - 4x^2y \end{cases}$

(a) Trobeu les 2 rectes de punts crítics (equilibri).

(b) Què es pot dir sobre l'estabilitat d'aquests punts d'equilibri usant el mètode de linealització?

- (c) Les òrbites d'aquest sistema són corbes polinomials de grau 2 de la forma $ay + bx^2 = \text{constant}$.
 Calculeu-les. (Indicació: Trobeu a i b , tals que si $(x(t), y(t))$ és una solució, llavors $\frac{d}{dt}(ay(t) + b(x(t))^2) = 0$, i es diu que $C(x, y) = ay + bx^2$ és una quantitat conservada o una integral primera.)
- (d) Useu la informació de l'apartat (c) i dibuixeu el retrat de fase del sistema.
- (e) A partir del retrat de fase, discutiu l'estabilitat de tots els punts d'equilibri.

Resolució:

- (a) Les rectes són $x = 0$ i $y = 3x$

(b) $DF(x, y) = \begin{pmatrix} 6x - y & -x \\ 36x^2 - 8xy & -4x^2 \end{pmatrix}$, llavors

$$DF(0, y) = \begin{pmatrix} -y & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} T = -y \\ D = 0 \end{cases} \Rightarrow y < 0(I)$$

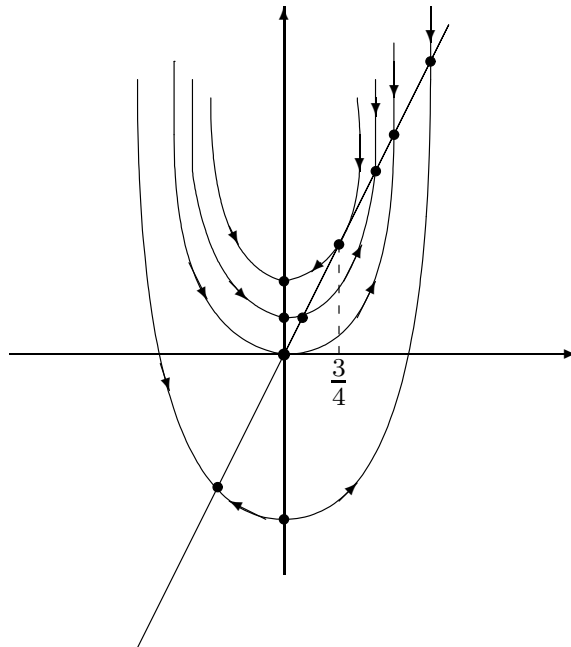
$$DF(x, 3x) = \begin{pmatrix} 3x & -x \\ 12x^2 & -4x^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} T = x(-4x + 3) \\ D = 0 \end{cases} \Rightarrow 0 < x < 3/4(I)$$

- (c) Multiplicant la 1a equació per $4x$ i restant a la 2a, s'obté

$$(y - 2x^2)' = 0 \implies \boxed{y = 2x^2 + C}$$

o bé, imposant: $ay' + 2bxx' = 0 \iff (12a + 6b)x^3 - x^2y(4a + 2b) = 0$ si $b = -2a$. Prenem $a = 1$, $b = -2$, llavors les òrbites s'expressen per $y - 2x^2 = \text{constant}$.

- (d) Observem que les rectes $x = 0$ i $y = 3x$ són plenes de punts d'equilibri



- (e) Del retrat de fase deduïm que per als punt de la recta

$$\begin{aligned} & (0, y > 0) \quad (E) \\ & \bullet (x = 0, y) \begin{cases} \nearrow (0, y > 0) \quad (E) \\ \searrow (0, y \leq 0) \quad (I) \end{cases} \\ & (x, 3x) \quad 0 \leq x \leq 3/4 \quad (I) \\ & \bullet (x, 3x) \begin{cases} \nearrow (x, 3x) \quad 0 \leq x \leq 3/4 \quad (I) \\ \searrow (x, 3x) \quad x \notin [0, 3/4] \quad (E) \end{cases} \end{aligned}$$

(a) Considerem el problema de valors a la frontera

$$y'' = \lambda y, \quad y(0) = 0, \quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0. \quad (*)$$

Deduïu, amb detall, els valors de $\lambda < 0$ per als quals (*) admet solució no trivial, així com les corresponents solucions no trivials.

(b) Resoleu el problema de valor inicial i condicions a la frontera mixtes per a l'equació de la calor:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = +\sin(5x), & x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \quad t > 0 \\ u(x, 0) = 0 \\ u(0, t) = 0 \\ u_x\left(\frac{\pi}{2}, t\right) = 0 \end{cases}$$

Indicació:

(b.1) Calculeu primer una solució $z(x)$ de l'EDP no homogènia.

(b.2) Considereu (i resoleu) ara el problema de valor inicial i condicions de frontera mixtes que satisfà la funció

$$v(x, t) = u(x, t) - z(x).$$

Resolució:

(a) $y'' = \lambda y$, $y(0) = 0$, $y'(\pi/2) = 0$

Si $\lambda = -\mu^2 < 0$, $\mu > 0$; $y(x) = A \cos \mu x + B \sin \mu x$

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(\pi/2) = 0 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\mu \sin \mu(\pi/2) & \mu \cos \mu(\pi/2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\det A_\mu = 0 \iff \mu \cos \mu(\pi/2) = 0 \iff \mu_n(\pi/2) = n\lambda\pi + (\pi/2)$, és a dir, $\mu_n = 2n + 1$

VAP: $\lambda_n = -(2n + 1)^2$, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

FUP: $y_n(x) = \sin(2n + 1)x$, $n = 0, 1, 2, \dots$

(b) Calculem $z(x)$: $-z'' = \sin(5x)$; $z' = \frac{1}{5} \cos(5x)$; $z(x) = \frac{1}{25} \sin(5x)$. $v(x, t) = u(x, t) - z(x)$ satisfà

$$(P) \begin{cases} v_t - v_{xx} = u_t - u_{xx} + z''(x) = \sin 5x - \sin 5x = 0 \\ v(x, 0) = -\frac{1}{25} \sin 5x \\ v(0, t) = 0 \\ v_x(\pi/2, t) = 0 \end{cases}$$

Considerem el problema homogeni associat:

$$(*) \begin{cases} v_t - v_{xx} = 0 \\ v(0, t) = 0 \\ v_x(\pi/2, t) = 0 \end{cases}$$

Resolem (*) per separació de variables: $v(x, t) = X(x)T(t)$

$$\left. \begin{aligned} XT' - X''T &= 0 \\ X(0)T(t) &= 0 \\ X'(\pi/2)T(t) &= 0 \end{aligned} \right\} \implies \left. \begin{aligned} \frac{X''}{X} &= \frac{T'}{T} = \lambda \\ X(0) &= 0 \\ X'(\pi/2) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Cal resoldre

$$(P1) \begin{cases} X''(x) = \lambda X(x) \\ X(0) = X'(\pi/2) = 0 \end{cases} \quad (P2) \quad T'(t) = \lambda T(t)$$

Per (a) les solucions de (P1) són: $X_n(x) = \sin(2n + 1)x$ (o bé $A \sin(2n + 1)x$), $n = 0, 1, \dots$, amb $\lambda_n = -(2n + 1)^2$.

Les solucions de (P2): $T_n(t) = e^{-(2n+1)^2 t}$ (o bé $B e^{-(2n+1)^2 t}$), $n = 0, 1, 2, \dots$

Els modes normals de (*) són $X_n(x)T_n(t) = e^{-(2n+1)^2 t} \sin(2n + 1)x$.

Calculem ara la solució de (P) prenent

$$v(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{-(2n+1)^2 t} \sin(2n+1)x.$$

$$\text{Imposem } v(x, 0) = -\frac{1}{25} \sin 5x = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \sin(2n+1)x \implies$$

$$\implies \begin{cases} c_0 = 0 \\ c_1 = 0 \\ c_2 = -1/25 \\ c_n = 0, & n \geq 3 \end{cases}$$

Per tant, $v(x, t) = -\frac{1}{25} e^{-25t} \sin 5x$ és la solució de (P). Finalment, desfent el canvi de variables:

$$u(x, t) = z(x) + v(x, t) = \frac{1}{25} \sin 5x - \frac{1}{25} e^{-25t} \sin 5x.$$

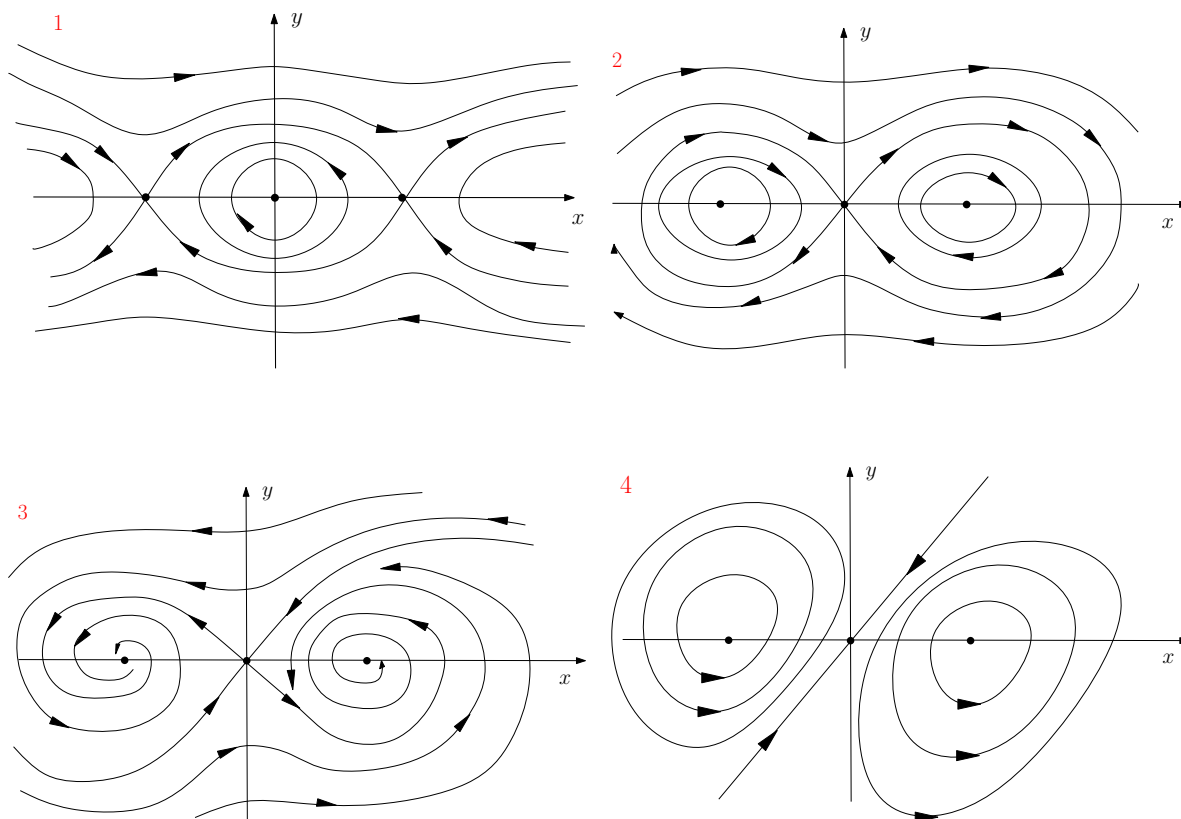
- (1) (1,5 puntos). El movimiento 1D de un punto sometido a la fuerza $F(x)$ se describe por la EDO $x'' = F(x) = -x(x-c)(x+c)$, y c es una constante *real*. Introducimos la velocidad $y = x'$ y convertimos la ecuación al sistema 2D no lineal:

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = -x(x-c)(x+c) \end{cases}$$

De los 4 retratos de fases indicados abajo sólo uno puede corresponder al sistema. ¿Cual es ?

Razonar la respuesta excluyendo los retratos imposibles o no apropiados. Intentad no hacer muchos cálculos, comparad la dirección y el comportamiento de las trayectorias mostradas con el vector de velocidad (x', y') del sistema 2D.

(Los puntos negros en las figuras marcan los equilibrios. Aparte de esos puntos, no hay otros equilibrios.)



Resolució: Según el sistema, si $y > 0$, tenemos $x' > 0$. Entonces, en la parte superior del retrato de fases (con $y > 0$) el vector de velocidad (x', y') tiene orientación *derecha* en todos los puntos. Por lo tanto, excluimos enseguida los retratos (3) y (4), en los cuales algunas trayectorias en la parte superior se dirigen hacia la izquierda.

Para elegir entre (1) y (2), se puede hacer linealización del sistema en el punto fijo $(0,0)$, los VAPs son $\{-c, c\}$. Por tanto, el origen es una silla no lineal, y el retrato correspondiente es (2).

(2) (1 punto). Consideramos el PVI de la cuerda vibrante *infinita*

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, & x, t \in \mathbb{R} \\ u(x, 0) = f(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Qué condiciones iniciales faltan para que podamos calcular la solución $u(x, t)$ del problema ? Y cuando tengamos esas condiciones, que método (formula) aplicamos para calcular la solución ? Describirlo explícitamente.

Resolució: Falta la velocidad inicial $u_t(x, 0) = g(x)$, $x \in \mathbb{R}$. La formula de d'Alembert