

Examen Final de Ecuaciones Diferenciales 3 Problemas (7.5 puntos)

Fecha: 27 de junio de 2013

Tiempo total: 2 horas 30 minutos

Problema 1 [2.5 puntos]. Consideramos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & -1 & 0 \\ 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

cuyos VAPs son $\lambda = -2$ y $\lambda_{\pm} = \alpha \pm i$. (No hace falta que comprobéis este dato.)

- Calcular la solución general real del sistema $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$.
- ¿Para qué valores del parámetro $\alpha \in \mathbb{R}$ es atractor el sistema $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$? ¿Y repulsor? ¿Y estable, pero no atractor? ¿Y inestable, pero no repulsor?
- Calcular todas las rectas invariantes y todos los planos invariantes del sistema $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$. Dibujar el croquis aproximado del sistema $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ para $\alpha = -1$, $\alpha = 0$ y $\alpha = 1$. Explicar en cada uno de esos tres casos cómo se comportan las trayectorias que no están contenidas en ningún plano o recta invariante.

Solución:

- Los VAPs son $\lambda = -2$ y $\lambda_{\pm} = \alpha \pm \beta i$ con $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\beta = 1$. Los VEPs son $\mathbf{v} = (0, 0, 1)$ y $\mathbf{v}_{\pm} = (1, \mp i, 0) = \mathbf{u} \pm \mathbf{w}i$ con $\mathbf{u} = (1, 0, 0)$ y $\mathbf{w} = (0, -1, 0)$. La solución general es

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_h(t) &= c_1 e^{\lambda t} \mathbf{v} + c_2 e^{\alpha t} (\mathbf{u} \cos(\beta t) - \mathbf{w} \sin(\beta t)) + c_3 e^{\alpha t} (\mathbf{u} \sin(\beta t) + \mathbf{w} \cos(\beta t)) \\ &= \begin{pmatrix} c_2 e^{\alpha t} \cos t + c_3 e^{\alpha t} \sin t \\ c_2 e^{\alpha t} \sin t - c_3 e^{\alpha t} \cos t \\ c_1 e^{-2t} \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

- Si $\alpha < 0$, entonces los tres VAPs tienen parte real negativa, luego el sistema es atractor. Si $\alpha > 0$, entonces un VAP es negativo y los otros dos VAPs tienen parte real positiva, luego el sistema es inestable, pero no repulsor. Si $\alpha = 0$, entonces un VAP es negativo y los otros dos VAPs son simples y tienen parte real nula, luego el sistema es estable, pero no atractor.
- La única recta invariante es $r = [\mathbf{v}] = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = 0\}$, pues sólo hay un VAP real. La recta r siempre es una recta invariante estable, pues $\lambda = -2 < 0$. El único plano invariante es el plano horizontal $\Pi = [\mathbf{u}, \mathbf{w}] = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\}$. El plano Π es un plano invariante estable cuando $\alpha < 0$, inestable cuando $\alpha > 0$ y de giros cerrados cuando $\alpha = 0$. Las trayectorias no contenidas ni en r ni en Π , se comportan del siguientes modo:
 - Si $\alpha < 0$, son espirales cuya “amplitud” y “altura” tienden ambas a cero;
 - Si $\alpha = 0$, son “hélices” que se acumulan en el plano Π ; y
 - Si $\alpha > 0$, son espirales cuya “amplitud” aumenta y cuya “altura” tiende a cero.

Problema 2 [2.5 puntos]. Consideramos el sistema no lineal 2D

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x - y + x^3. \end{cases}$$

- Encontrar sus tres puntos de equilibrio, clasificar el sistema linealizado en cada uno y estudiar, si es posible, la estabilidad de cada uno por el método de linealización.
- Sea $(x(t), y(t))$ la solución del PVI asociado a las condiciones iniciales

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0.$$

¿Para qué condiciones iniciales (x_0, y_0) es creciente $x(t)$ en el instante $t = 0$? ¿Y decreciente? ¿Para qué condiciones iniciales (x_0, y_0) tiene $x(t)$ un máximo local estricto en el instante $t = 0$? ¿Y un mínimo local estricto?

c) Calcular la derivada temporal de la función

$$V(x, y) = x^2/2 - x^4/4 + y^2/2.$$

¿Qué se puede deducir sobre la estabilidad del origen por el método de Liapunov? Justificar la respuesta.

Solución:

a) Las ecuaciones que debemos resolver para encontrar los puntos de equilibrio son:

$$0 = x' = y, \quad 0 = y' = -x - y + x^3.$$

La primera ecuación implica que $y = 0$. Y entonces la segunda ecuación implica que $0 = -x + x^3 = x(x-1)(x+1)$, luego $x \in \{-1, 0, 1\}$. Por tanto, hay tres puntos de equilibrio: $(-1, 0)$, $(0, 0)$ y $(1, 0)$. La matriz del sistema linealizado en el punto de equilibrio $(x_0, 0)$ es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3x_0^2 - 1 & -1 \end{pmatrix},$$

luego $T = \text{traza}[A] = -1$ y $D = \det[A] = 1 - 3x_0^2$. En particular, su polinomio característico es

$$Q_A(\lambda) = \lambda^2 + \lambda + 1 - 3x_0^2.$$

Si $x_0 = 0$, entonces $Q_A(\lambda) = \lambda^2 + \lambda + 1$ y los dos VAPs son complejos conjugados de parte real negativa: $\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$. Por tanto, el sistema linealizado es un foco atractor, lo cual implica que el origen es un punto de equilibrio atractor del SNL.

Si $x_0 = \pm 1$, entonces $D = -2 < 0$, luego el sistema linealizado es una silla, lo cual implica que los puntos de equilibrio $(\pm 1, 0)$ son inestables en el SNL.

b) Usando las condiciones iniciales observamos que

$$x'(0) = y(0) = y_0, \quad y'(0) = -x(0) - y(0) + (x(0))^3 = -x_0 - y_0 + x_0^3.$$

Por tanto:

- Si $y_0 < 0$, entonces $x'(0) < 0$, luego $x(t)$ es decreciente en el instante $t = 0$;
- Si $y_0 > 0$, entonces $x'(0) > 0$, luego $x(t)$ es creciente en el instante $t = 0$;
- Si $y_0 = 0$, entonces $x'(0) = 0$, luego miramos la segunda derivada

$$x''(0) = y'(0) = -x_0 - y_0 + x_0^3 = x_0(x_0 - 1)(x_0 + 1).$$

Así pues:

- Si $y_0 = 0$ y $x_0 \in (-\infty, -1) \cup (0, 1)$, entonces $x'(0) = 0$ y $x''(0) < 0$, luego $x(t)$ tiene un máximo local estricto en $t = 0$;
- Si $y_0 = 0$ y $x_0 \in (-1, 0) \cup (1, +\infty)$, entonces $x'(0) = 0$ y $x''(0) > 0$, luego $x(t)$ tiene un mínimo local estricto en $t = 0$;
- Si $y_0 = 0$ y $x_0 \in \{-1, 0, 1\}$, entonces $x(t) \equiv x_0$ es constante, pues estamos en un punto de equilibrio.

c) La derivada temporal es

$$W(x, y) = \frac{d}{dt} \left\{ \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} + \frac{y^2}{2} \right\} = xx' - x^3x' + yy' = (x - x^3)y + y(-x - y + x^3) = -y^2.$$

El método de Liapunov implica que el origen es un punto de equilibrio atractor, pues aunque $W(x, y) = -y^2$ sólo es semi-definida negativa, el campo de vectores es transversal a la curva de nivel $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : W(x, y) = 0\} = \{y = 0\}$.

Problema 3 [2.5 puntos]. Consideramos el PVI de calor 1D con condiciones de contorno periódicas

$$\begin{cases} u_t = k^2 u_{xx} & x \in (-\pi, \pi) \quad t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) & x \in (-\pi, \pi) \\ u(-\pi, t) = u(\pi, t) & t > 0 \\ u_x(-\pi, t) = u_x(\pi, t) & t > 0. \end{cases}$$

- a) Dada una solución $u(x, t)$ del PVI, calcular la derivada de la función

$$T(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(x, t) dx.$$

Interpretar físicamente la función $T(t)$ y el resultado obtenido.

- b) Calcular explícitamente la solución $u(x, t)$ del PVI cuando la temperatura inicial es $f(x) = 1 + x$. A continuación, calcular $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(x, t)$. ¿Qué se puede decir sobre la temperatura del punto medio $x = 0$?

Indicación: No es necesario resolver explícitamente el PVF resultante, basta decir cuáles son sus VAPs y sus FUPs.

Solución:

- a) Aplicando la regla de Leibniz, la EDP que nos dan, el teorema fundamental del cálculo y, finalmente, la segunda condición de contorno, vemos que

$$\begin{aligned} T'(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u_t(x, t) dx = \frac{k^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u_{xx}(x, t) dx \\ &= \frac{k^2}{2\pi} \left[u_x(x, t) \right]_{x=-\pi}^{x=\pi} = \frac{k^2}{2\pi} [u_x(\pi, t) - u_x(-\pi, t)] = 0. \end{aligned}$$

La función $T(t)$ es el promedio de la temperatura en el instante t . Hemos visto que ese promedio se mantiene constante, lo cual es lógico pues el calor que entra/sale por un lado se compensa exactamente con el calor que sale/entra por el otro lado.

- b) Al imponer que la función $u(x, t) = X(x)T(t)$ cumpla:

- La ecuación $u_t = k^2 u_{xx}$, se obtiene que $X(x)T'(t) = k^2 X''(x)T(t)$, luego

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{k^2 T(t)} = \lambda \in \mathbb{R}.$$

- La condición de frontera $u(-\pi, t) = u(\pi, t)$, vemos que $X(-\pi) = X(\pi)$.
- La condición de frontera $u_x(-\pi, t) = u_x(\pi, t)$, vemos que $X'(-\pi) = X'(\pi)$.

Por tanto, obtenemos dos problemas separados:

$$\begin{cases} X''(x) = \lambda X(x) \\ X(-\pi) = X(\pi) \\ X'(-\pi) = X'(\pi) \end{cases}, \quad \{T'(t) = \lambda k^2 T(t)\}.$$

Sabemos que el PVF periódico asociado a la función $X(x)$ tiene $\lambda_0 = 0$ como VAP simple de FUP $c_0(x) \equiv 1$ y a $\lambda_n = -n^2$ como VAPs dobles de FUPs $c_n(x) = \cos(nx)$ y $s_n(x) = \sin(nx)$, con $n \geq 1$. A continuación, resolviendo la ecuación $T'(t) = \lambda k^2 T(t)$ para $\lambda = \lambda_n = -n^2$, obtenemos las funciones $T_n(t) = e^{-n^2 k^2 t}$. Por tanto, los infinitos modos normales son

$$\begin{aligned} C_0(x, t) &= c_0(x)T_0(t) \equiv 1, \\ C_n(x, t) &= c_n(x)T_n(t) = e^{-n^2 k^2 t} \cos(nx), \quad n \geq 1, \\ S_n(x, t) &= s_n(x)T_n(t) = e^{-n^2 k^2 t} \sin(nx), \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

Al imponer que la superposición de infinitos modos normales

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} (a_n C_n(x, t) + b_n S_n(x, t)) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} e^{-n^2 k^2 t} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \end{aligned}$$

cumpla la condición inicial $u(x, 0) = f(x) = 1 + x$, se deduce que $a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \dots$ son los coeficientes del desarrollo de Fourier completo de $f(x) = 1 + x$ en el intervalo $[-\pi, \pi]$.

Concretamente,

$$\begin{aligned}a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (1+x) dx = 2, \\a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (1+x) \cos(nx) dx = 0, \quad n \geq 1, \\b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (1+x) \sin(nx) dx = 2 \frac{(-1)^{n+1}}{n}, \quad n \geq 1.\end{aligned}$$

La integral sobre el intervalo $[-\pi, \pi]$ de las funciones trigonométricas $\cos(nx)$ y $\sin(nx)$ es igual a cero para todo $n \geq 1$. La función $x \cos(nx)$ es impar, luego su integral sobre el intervalo $[-\pi, \pi]$ es igual a cero. La integral de la función $x \sin(nx)$ se calcula por partes. Por tanto, la solución explícita del problema es

$$u(x, t) = 1 + 2 \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} e^{-n^2 k^2 t} \sin(nx).$$

En particular, resulta que $u(0, t) = 1$ para todo $t > 0$. Es decir, la temperatura del punto medio se mantiene constante. Finalmente, $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(x, t) = 1$ para todo $x \in [-\pi, \pi]$, pues $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-n^2 k^2 t} = 0$ para todo $n \geq 1$.

Examen Final de Ecuaciones Diferenciales

Fecha: 27 de junio de 2013

Teoría

Tiempo: 30 minutos

[2.5 puntos]. Lo bueno, si breve, dos veces bueno. $\diamond$

- a) ¿Qué relación existe entre el campo de vectores de un sistema autónomo $\mathbf{x}' = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ y sus soluciones? ¿Qué diferencia hay entre las trayectorias y las órbitas de un sistema autónomo?
- b) Describir las dos posiciones de equilibrio del péndulo sin fricción y la estabilidad de cada una de ellas. Describir los tres tipos de movimientos del péndulo sin fricción. ¿Qué cambia cuando se tiene en cuenta la fricción?
- c) Consideramos el PVI de la cuerda vibrante infinita

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} & x \in \mathbb{R} \quad t \in \mathbb{R} \\ u(x, 0) = f(x) & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x, 0) = g(x) & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

donde la posición inicial $f(x)$ y la velocidad inicial $g(x)$ están definidas a trozos:

$$g(x) = f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } -1 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{de lo contrario.} \end{cases}$$

Calcular la solución $u(x, t)$ cuando el punto (x, t) está en el triángulo de vértices $(-1, 0)$, $(1, 0)$ y $(0, 1)$.

Indicación: La fórmula de D'Alembert es

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(f(x+ct) + f(x-ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(y) dy.$$

Solución:

- a) Las soluciones (trayectorias) de un sistema autónomo describen curvas (órbitas) que son tangentes a su campo de vectores. La diferencia entre trayectorias y órbitas es que las primeras son soluciones del sistema y explicitan la velocidad a la que se mueven las partículas, mientras que las segundas son las curvas sobre las que se mueven las partículas.
- b) Hay dos posiciones de equilibrio: la inferior y la superior. La primera es estable (pero no asintóticamente estable) y consiste en que el péndulo cuelga en posición vertical, estando la masa por debajo del punto de sujeción. La segunda es inestable (pero no repulsora) y consiste en que el péndulo cuelga en posición vertical, estando la masa por encima del punto de sujeción.

Hay tres tipos de movimientos: de libración, de rotación y asintótico. El primero son las oscilaciones del péndulo alrededor de la posición de equilibrio inferior, sin dar ninguna vuelta completa. El segundo consiste en dar vueltas siempre en el mismo sentido (horario o antihorario). El último es el movimiento que tiende, tanto en el pasado como en el futuro, a la posición de equilibrio superior.

Cuando se tiene en cuenta la fricción, el péndulo pierde energía, lo cual tiene como consecuencia que el movimiento del péndulo siempre tiende a alguna de las dos posiciones de equilibrio. En particular, la posición de equilibrio inferior pasa a ser asintóticamente estable (atractora).

- c) En nuestro caso, $c = 1$, luego la fórmula de D'Alembert queda así:

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(f(x+t) + f(x-t)) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} g(y) dy = \frac{1}{2}(1+1) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} dy = 1+t.$$

Hemos usado que si el punto (x, t) está en el triángulo de vértices $(-1, 0)$, $(1, 0)$ y $(0, 1)$, entonces $-1 \leq x-t \leq y \leq x+t \leq 1$, luego $f(x-t) = f(x+t) = g(y) = 1$.