

Examen Final de Ecuaciones Diferenciales 3 Problemas (7.5 puntos)

Fecha: 10 de enero de 2013

Tiempo total: 2 horas 30 minutos

Problema 1 [2.5 puntos]. Consideramos el sistema lineal $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 2\mu - 4 & -1 \\ 4 - \mu & 0 \end{pmatrix}, \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

- Dibujar el diagrama de bifurcaciones correspondiente a la estabilidad (sistema estable, inestable, atractor o repulsor) y a la clasificación (nodo, foco, centro, silla o sistema degenerado) del sistema. Justificar las respuestas.
- Cuando el sistema sea un foco, especificar el sentido de giro. Cuando el sistema sea un nodo, especificar si es propio o impropio. Cuando el sistema sea un centro, especificar el sentido de giro y el periodo de sus soluciones. Justificar las respuestas.
- Calcular la solución general y dibujar un croquis preciso del sistema cuando $\mu = 4$.

Solución:

- Como tenemos un sistema 2D con parámetros, aplicamos el criterio traza-determinante: $T = \text{traza } A = 2\mu - 4$, $D = \det A = 4 - \mu$ y $\Delta = T^2 - 4D = 4\mu^2 - 12\mu = 4\mu(\mu - 3)$, luego

$$T \begin{cases} < 0 \Leftrightarrow \mu < 2, \\ = 0 \Leftrightarrow \mu = 2, \\ > 0 \Leftrightarrow \mu > 2, \end{cases} \quad D \begin{cases} < 0 \Leftrightarrow \mu > 4, \\ = 0 \Leftrightarrow \mu = 4, \\ > 0 \Leftrightarrow \mu < 4, \end{cases} \quad \Delta \begin{cases} < 0 \Leftrightarrow \mu \in (0, 3), \\ = 0 \Leftrightarrow \mu \in \{0, 3\}, \\ > 0 \Leftrightarrow \mu \notin [0, 3]. \end{cases}$$

Dibujamos el diagrama de bifurcaciones usando el siguiente código de colores: azul para los sistemas atractores, verde para los sistemas estables pero no asintóticamente estables, rojo para los sistemas repulsores y naranja para los sistemas inestables pero no repulsores.



- La velocidad en la posición $\mathbf{x} = (0, 1)$ es $\mathbf{x}' = A\mathbf{x} = (-1, 0)$; luego $\mathbf{x}'$ apunta hacia la izquierda del semi-eje vertical positivo. Por tanto, el sentido de giro en todos los focos y en el centro es antihorario.

Sabemos que el sistema es un nodo si y sólo si $\mu \in (-\infty, 0] \cup [3, 4)$. El discriminante Δ sólo se anula cuando $\mu = 0$ y $\mu = 3$. Eso significa que si $\mu \in (-\infty, 0) \cup (3, 4)$, entonces los dos VAPs del sistema son simples y el nodo es propio. Por contra, la matriz no diagonaliza y el nodo es impropio cuando $\mu \in \{0, 3\}$. Para justificarlo, basta observar que el elemento de la matriz A situado en la primera fila y la segunda columna siempre es diferente de cero. (Una matriz 2×2 con un VAP doble es diagonalizable si y sólo si es diagonal.)

Finalmente, calculamos el periodo de las soluciones cuando el sistema es un centro; es decir, cuando $\mu = 2$. En ese caso, los VAPs de la matriz son

$$\lambda_{\pm} = \frac{T \pm \sqrt{\Delta}}{2} = \pm \frac{\sqrt{-8}}{2} = \pm \sqrt{2}i,$$

luego el periodo es $p = 2\pi/\sqrt{2} = \sqrt{2}\pi$.

- Si $\mu = 4$, entonces el sistema es degenerado inestable y la matriz A tiene VAPs $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = 4$ de VEPs $\mathbf{v}_1 = (1, 4)$ y $\mathbf{v}_2 = (1, 0)$, luego la solución general es

$$\mathbf{x}_h(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} c_1 + c_2 e^{4t} \\ 4c_1 \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Dibujamos el croquis en dos fases. En primer lugar, la recta $r_1 = [\mathbf{v}_1]$ es una recta de puntos de equilibrio, mientras que la recta $r_2 = [\mathbf{v}_2]$ es una recta inestable, repulsora o de salida. En segundo lugar, la velocidad del sistema siempre es horizontal:

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x_1 - x_2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, todas las trayectorias son paralelas al eje horizontal y el signo de $4x_1 - x_2$ nos da el sentido en que avanzan (hacia la izquierda/derecha cuando es negativo/positivo).

Problema 2 [2.5 puntos]. Consideramos el sistema no lineal 2D

$$\begin{cases} x' &= y(y-1), \\ y' &= x(x-1). \end{cases}$$

- Sea $V(x, y) = a(x^3 - y^3) + b(y^2 - x^2)$. ¿Para qué valores de los parámetros $a, b \in \mathbb{R}$ es idénticamente nula la derivada temporal de $V(x, y)$?
- Calcular los cuatro puntos de equilibrio del sistema y estudiar la estabilidad de cada uno. Decidir el método a usar en cada caso.
- Dos de los puntos de equilibrio son centros no lineales y los otros dos son sillas no lineales. Determinar el sentido de giro y el periodo límite de las pequeñas oscilaciones entorno a cada centro. Determinar las direcciones estables e inestables (VEPs) de cada silla.

Solución:

- La derivada temporal de la función $V(x, y)$ es

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt}(x, y) &= 3a(x^2 x' - y^2 y') + 2b(yy' - xx') = (3ax^2 - 2bx)x' + (2by - 3ay^2)y' \\ &= xy(3ax - 2b)(y - 1) + xy(2b - 3ay)(x - 1) = (2b - 3a)xy(x - y). \end{aligned}$$

Por tanto, basta escoger $b = 3a/2$.

- La componente horizontal $x' = y(y-1)$ sólo se anula cuando $y = 0$ o $y = 1$. La componente vertical $y' = x(x-1)$ sólo se anula cuando $x = 0$ o $x = 1$. Por tanto, el sistema tiene exactamente cuatro puntos de equilibrio:

$$(0, 0), \quad (1, 0), \quad (0, 1), \quad (1, 1).$$

La matriz del sistema linealizado en el punto de equilibrio (x_0, y_0) es igual a

$$A = \left(\begin{array}{cc} \frac{\partial x'}{\partial x} & \frac{\partial x'}{\partial y} \\ \frac{\partial y'}{\partial x} & \frac{\partial y'}{\partial y} \end{array} \right)_{|(x,y)=(x_0,y_0)} = \left(\begin{array}{cc} 0 & 2y_0 - 1 \\ 2x_0 - 1 & 0 \end{array} \right).$$

Si $(x_0, y_0) = (0, 0)$ o $(x_0, y_0) = (1, 1)$, los VAPs son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = -1$, luego el sistema linealizado es una silla y ambos puntos de equilibrio son inestables en el sistema no lineal.

Si $(x_0, y_0) = (1, 0)$ o $(x_0, y_0) = (0, 1)$, los VAPs son $\lambda_{\pm} = \pm i$, el sistema linealizado es un centro y la linealización no decide la estabilidad. Pasamos a estudiar su estabilidad mediante el método de Liapunov usando la función $V(x, y) = a(x^3 - y^3) + 3a(y^2 - x^2)/2$ que se obtiene al escoger $b = 3a/2$, pues sabemos que entonces la derivada temporal $W(x, y) = \frac{dV}{dt}(x, y)$ es idénticamente nula.

Para concluir que el punto $(1, 0)$ es estable pero no asintóticamente estable, basta comprobar que la función $V(x, y)$ tiene un mínimo local estricto en $(1, 0)$. Lo haremos calculando el desarrollo de Taylor hasta orden dos de la función $V(x, y)$ en ese punto. Primero, evaluamos algunas derivadas parciales de primer y segundo orden:

$$\frac{\partial V}{\partial x}(1, 0) = \frac{\partial V}{\partial y}(1, 0) = 0, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(1, 0) = \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}(1, 0) = 3a, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}(1, 0) = 0.$$

Por tanto, $V(x, y) \cong V(1, 0) + 3a(x-1)^2 + 3ay^2$ es el desarrollo de Taylor hasta orden dos entorno $(1, 0)$, luego $V(x, y)$ tiene un mínimo local estricto en $(1, 0)$ si $a > 0$.

Los cálculos en $(0, 1)$ son parecidos, pero es necesario escoger $a < 0$ y $b = 3a/2$ para que la función $V(x, y)$ tenga un mínimo local estricto en $(0, 1)$.

- Los puntos $(1, 0)$ y $(0, 1)$ son centros no lineales pues sus sistemas linealizados son centros y el sistema no lineal tiene una cantidad conservada. El periodo límite de las pequeñas oscilaciones es $p = 2\pi$, pues los VAPs de los sistemas linealizados son $\lambda_{\pm} = \pm i$. La matriz del sistema linealizado en el punto $(1, 0)$ es

$$A = \left(\begin{array}{cc} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{array} \right).$$

La velocidad del sistema linealizado $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ en el punto $\mathbf{x} = (1, 0)$ es igual a $\mathbf{x}' = (0, 1)$, luego el sentido de giro es antihorario. Un cálculo similar muestra que las trayectorias giran en sentido horario cerca del otro centro no lineal.

Los puntos $(0,0)$ y $(1,1)$ son sillas. Necesitamos calcular los VEPs de la matriz del sistema linealizado para determinar las direcciones estables e inestables. La matriz del sistema linealizado en el punto $(0,0)$ es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sus VAPs son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = -1$, mientras que sus VEPs son $\mathbf{v}_1 = (1, -1)$ y $\mathbf{v}_2 = (1, 1)$. Por tanto, $\mathbf{v}_1 = (1, -1)$ es la dirección inestable y $\mathbf{v}_2 = (1, 1)$ es la estable.

La matriz del sistema linealizado en el punto $(1,1)$ es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sus VAPs son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = -1$, mientras que sus VEPs son $\mathbf{v}_1 = (1, 1)$ y $\mathbf{v}_2 = (1, -1)$. Por tanto, $\mathbf{v}_1 = (1, 1)$ es la dirección inestable y $\mathbf{v}_2 = (1, -1)$ es la estable.

Problema 3 [2.5 puntos]. Consideramos el PVI de ondas 1D dado por

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 6x + 49 \sin 7x & x \in (0, \pi) \quad t \in \mathbb{R} \\ u(x, 0) = \pi^2 x - x^3 & x \in (0, \pi) \\ u_t(x, 0) = 0 & x \in (0, \pi) \\ u(0, t) = 0 & t \in \mathbb{R} \\ u(\pi, t) = 0 & t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

- Este problema modela la vibración de una cuerda. ¿De qué longitud? Interpretar físicamente las dos condiciones iniciales del problema. Interpretar físicamente las dos condiciones de tipo Dirichlet homogéneas del problema.
- Calcular el único equilibrio elástico (es decir, solución de la forma $u(x, t) = v(x)$) del problema

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 6x + 49 \sin 7x & x \in (0, \pi) \quad t \in \mathbb{R} \\ u(0, t) = 0 & t \in \mathbb{R} \\ u(\pi, t) = 0 & t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

- Probar que el cambio de variables $w(x, t) = u(x, t) - v(x)$ transforma el problema original en un problema de la forma

$$\begin{cases} w_{tt} = w_{xx} & x \in (0, \pi) \quad t \in \mathbb{R} \\ w(x, 0) = f(x) & x \in (0, \pi) \\ w_t(x, 0) = 0 & x \in (0, \pi) \\ w(0, t) = 0 & t \in \mathbb{R} \\ w(\pi, t) = 0 & t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

- Calcular la solución $w(x, t)$ del problema transformado.

Indicación: No es necesario resolver explícitamente el PVF resultante, basta decir cuáles son sus VAPs y sus FUPs.

- Calcular la solución $u(x, t)$ del problema original. Esta solución es periódica en t , pero ¿de qué periodo?

Solución:

- La longitud es $L = \pi$. La condición $u(x, 0) = \pi^2 x - x^3$ fija el desplazamiento inicial de la cuerda. La condición $u_t(x, 0) = 0$ significa que la cuerda está inicialmente en reposo. Las condiciones de contorno $u(0, t) = 0 = u(\pi, t)$ significan que los dos extremos de la cuerda están fijados a altura cero, como las cuerdas de una guitarra.
- Al imponer que una función $u(x, t) = v(x)$ que no depende del tiempo cumple la primera ecuación del problema se obtiene que

$$-v''(x) = 6x + 49 \sin 7x \Rightarrow v(x) = a + bx - x^3 + \sin 7x, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Al imponer que esas funciones cumplan las condiciones de contorno $0 = v(0) = a$ y $0 = v(\pi) = a + b\pi - \pi^3$, se obtiene que $a = 0$ y $b = \pi^2$, luego

$$v(x) = \pi^2 x - x^3 + \sin 7x$$

es el único equilibrio elástico.

c) Es una comprobación simple. Por ejemplo,

$$f(x) = w(x, 0) = u(x, 0) - v(x) = (\pi^2 x - x^3) - (\pi^2 x - x^3 + \sin 7x) = -\sin 7x.$$

d) Al imponer que la función $w(x, t) = X(x)T(t)$ cumpla:

- La ecuación $w_{tt} = w_{xx}$, se obtiene que $X(x)T''(t) = X''(x)T(t)$, luego

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{T(t)} = \lambda \in \mathbb{R}.$$

- La condición inicial $w_t(x, 0) = 0$, vemos que $T'(0) = 0$.
- Las condiciones de contorno $w(0, t) = 0 = w(\pi, t)$, vemos que $X(0) = 0 = X(\pi)$.

Por tanto, obtenemos dos problemas separados:

$$\begin{cases} X''(x) = \lambda X(x) \\ X(0) = 0 = X(L) \end{cases}, \quad \begin{cases} T''(t) = \lambda T(t) \\ T'(0) = 0. \end{cases}$$

En clase ya vimos que el PVF con condiciones de contorno de tipo Dirichlet homogéneas asociado a la función $X(x)$ tiene VAPs $\lambda_n = -n^2$ y FUPs $X_n(x) = \sin(nx)$ para $n \geq 1$.

Resolviendo la ecuación $T''(t) = \lambda T(t)$ para $\lambda = \lambda_n = -n^2$, obtenemos las funciones $T_n(t) = c_1 \cos(nt) + c_2 \sin(nt)$, con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ libres. Imponemos la condición adicional: $0 = T'(0) = c_2 n \Rightarrow c_2 = 0$, luego $T_n(t) = \cos(nt)$ (hemos escogido el valor $c_1 = 1$).

Finalmente, los modos normales son múltiplos de las funciones

$$w_n(x, t) = X_n(x)T_n(t) = \cos(nt) \sin(nx), \quad n \geq 1.$$

Al imponer que la superposición de infinitos modos normales

$$w(x, t) = \sum_{n \geq 1} b_n w_n(x, t) = \sum_{n \geq 1} b_n \cos(nt) \sin(nx)$$

cumpla la condición inicial $w(x, 0) = f(x) = -\sin 7x$ se deduce que $b_7 = -1$ y $b_n = 0$ para todo $n \neq 7$. Por tanto, la solución del problema transformado es

$$w(x, t) = -\cos(7t) \sin(7x).$$

e) La solución del problema original es

$$u(x, t) = v(x) + w(x, t) = \pi^2 x - x^3 + (1 - \cos(7t)) \sin(7x),$$

luego es periódica de periodo $T = 2\pi/7$.

Examen Final de Ecuaciones Diferenciales

Fecha: 10 de enero de 2013

Teoría

Tiempo: 30 minutos

[1 punto].

- a) Sea
- $\mathbf{v}$
- un VEP de VAP
- λ
- de una matriz cuadrada
- A
- . Probar que la función

$$\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t} \mathbf{v}$$

es una solución del sistema $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$.

- b) Sea
- λ
- un VAP de una matriz cuadrada
- A
- . Sean
- $\mathbf{u}$
- y
- $\mathbf{v}$
- dos vectores tales que

$$A\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u} + \mathbf{v}, \quad A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}.$$

Probar que la función

$$\mathbf{y}(t) = e^{\lambda t}(\mathbf{u} + t\mathbf{v})$$

es otra solución del sistema $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$.

Solución:

- a) $\mathbf{x}'(t) = e^{\lambda t} \lambda \mathbf{v} = e^{\lambda t} A\mathbf{v} = A e^{\lambda t} \mathbf{v} = A\mathbf{x}(t)$.
 b) $\mathbf{y}'(t) = e^{\lambda t} \lambda(\mathbf{u} + t\mathbf{v}) + e^{\lambda t} \mathbf{v} = e^{\lambda t}(\lambda\mathbf{u} + \mathbf{v} + t\lambda\mathbf{v}) = e^{\lambda t}(A\mathbf{u} + tA\mathbf{v}) = A e^{\lambda t}(\mathbf{u} + t\mathbf{v}) = A\mathbf{y}(t)$.

[1 punto]. Decir si es posible determinar la estabilidad de un punto de equilibrio de un sistema no lineal 2D por el método de linealización en cada uno de los siguientes casos:

- a) Cuando el sistema linealizado es una silla.
 b) Cuando el sistema linealizado es un nodo.
 c) Cuando el sistema linealizado es un centro.
 d) Cuando el sistema linealizado es un foco.
 e) Cuando el sistema linealizado es degenerado.

Justificar las respuestas.

Solución:

- a) Sí y el punto de equilibrio es inestable, pues uno de los VAPs es positivo.
 b) Sí, pues los VAPs son o bien ambos positivos (en cuyo caso el punto de equilibrio es repulsor) o bien ambos negativos (en cuyo caso el punto de equilibrio es atractor).
 c) No, pues los dos VAPs son imaginarios puros, luego tienen parte real nula.
 d) Sí, pues los dos VAPs son complejos conjugados y de parte real no nula. El punto de equilibrio es atractor/repulsor cuando esa parte real es negativa/positiva.
 e) Si el sistema es degenerado, entonces un VAP es igual a cero y el otro es igual a la traza de la matriz: $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = T = \text{traza } A$. Si $T > 0$, entonces el punto de equilibrio es inestable. Por contra, la linealización no decide la estabilidad cuando $T \leq 0$.

[0.5 puntos]. Consideramos el PVI de la cuerda vibrante infinita

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x, t) & x \in \mathbb{R} \quad t \in \mathbb{R} \\ u(x, 0) = f(x) & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x, 0) = g(x) & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

¿En qué puntos e instantes debemos conocer la fuerza externa para poder calcular el desplazamiento del punto x de la cuerda en el instante t ?

Indicación: La fórmula de D'Alembert es

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(f(x+ct) + f(x-ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(y) dy + \frac{1}{2c} \int_0^t \left\{ \int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} F(y, s) dy \right\} ds.$$

Solución: Para poder calcular $u(x, t)$ aplicando la fórmula de D'Alembert, necesitamos conocer la función $F(y, s)$ en el conjunto

$$\{(y, s) \in \mathbb{R}^2 : x - c(t - s) \leq y \leq x + c(t - s), 0 \leq s \leq t\}.$$

Este conjunto es el triángulo de vértices $(x - ct, 0)$, $(x + ct, 0)$ y (x, t) .