

Examen Final de Ecuaciones Diferenciales 3 Problemas (7.5 puntos)

Fecha: 15 de junio de 2012

Tiempo total: 3 horas

Problema 1 [2.5 puntos]. Queremos dibujar el croquis de un sistema lineal 2D y realizar algunos razonamientos gráficos. Los dibujos deben ser claros. $\diamond$

Consideramos el sistema lineal 2D homogéneo a coeficientes constantes $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ con

$$A = \begin{pmatrix} -2r & r \\ r & -r \end{pmatrix}.$$

- a) Clasificar el sistema $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ en función del parámetro $r \in \mathbb{R}$.
- b) A partir de ahora sólo estudiamos el caso $r = 1$.
 - i) Dibujar un croquis completo del sistema $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$.
 - ii) Dibujar el campo de velocidades (también llamado campo de vectores) sobre los dos ejes de coordenadas. ¿Son invariantes los ejes de coordenadas?
 - iii) Sea $\mathbf{x}(t)$ una solución del sistema $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ que parte del primer cuadrante en el instante inicial; es decir, una solución tal que $\mathbf{x}(0) \in C_1$, donde

$$C_1 := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}.$$

¿Podemos afirmar que $\mathbf{x}(t) \in C_1$ para todo $t \geq 0$? Justificar la respuesta. Realizar un estudio similar en cada uno de los otros tres cuadrantes.

- iv) Sea $\mathbf{x}(t)$ una solución tal que $\mathbf{x}(0) \in T_l$, donde T_l es la región triangular

$$T_l := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1 + x_2 \leq l\}, \quad l > 0.$$

¿Podemos afirmar que $\mathbf{x}(t) \in T_l$ para todo $t \geq 0$? Justificar la respuesta.

- v) Calcular la derivada temporal $W(\mathbf{x})$ de la función

$$V(\mathbf{x}) = x_1 + x_2$$

sobre las soluciones del sistema $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$.

Problema 2 [2.5 puntos]. Consideramos el sistema de Lotka-Volterra competitivo ya visto en clase, pero cambiando los parámetros. El croquis también cambia. Los dibujos deben ser claros. $\diamond$

Sean $x(t)$ e $y(t)$ las densidades de población de dos especies X e Y aisladas que compiten por un recurso limitado. Modelamos la evolución de las poblaciones mediante el sistema

$$\begin{cases} x' = kx(1 - x/m - \alpha y) \\ y' = ly(1 - \beta x - y/n) \end{cases},$$

donde todos los parámetros que aparecen son positivos. En este problema supondremos que $k = m = \alpha = 1$, $l = \beta = 1/2$ y $n = 2$.

- a) Encontrar los tres puntos de equilibrio, clasificar el sistema linealizado en cada uno y estudiar, si es posible, la estabilidad de cada uno por el método de linealización.
- b) ¿Cuál es la dinámica de la población X cuando no hay población Y? Dibujar el croquis de esa dinámica en el eje $\{y = 0\}$. Ídem cuando no hay población X, dibujando el croquis en el eje $\{x = 0\}$.
- c) La componente x' se anula en el eje vertical y en una recta r , mientras que y' se anula en el eje horizontal y en una recta s . Calcular y dibujar las rectas r y s . Estas rectas dividen el primer cuadrante en tres regiones. ¿Qué signo tienen las cantidades x' e y' en cada una de estas tres regiones?
- d) Dibujar el croquis del sistema de Lotka-Volterra en el primer cuadrante, dando tanta información como os sea posible. Interpretar biológicamente el resultado.

1) a) $T = \text{traza } A = -3r \begin{cases} > 0, \text{ si } r < 0 \\ = 0, \text{ si } r = 0 \\ < 0, \text{ si } r > 0 \end{cases}$; $D = \det A = r^2 > 0, \forall r \in \mathbb{R}$; $\Delta = T^2 - 4D = 5r^2 > 0, \forall r \in \mathbb{R}$.

Criterio traza-determinante $\Rightarrow \vec{x}' = A\vec{x}$ es un $\begin{cases} \text{nodo propio repulsor, si } r < 0 \\ \text{sistema degenerado, si } r = 0 \\ \text{nodo propio atractor, si } r > 0 \end{cases}$

b) $r=1 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, nodo propio atractor

i) $T=-3, D=1 \Rightarrow Q_A(A) = \lambda^2 - T\lambda + D = \lambda^2 + 3\lambda + 1 \Rightarrow \text{VAPs: } \lambda_{\pm} = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2} < 0$

Nuc $(A - \lambda_{\pm} \text{Id}) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \begin{matrix} -(2+\lambda_{\pm})x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - (1+\lambda_{\pm})x_2 = 0 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} x_1 \\ x_1 \end{pmatrix} : x_1 \in \mathbb{R} \text{ libre} \right\} = \overline{\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \pm \sqrt{5} \end{pmatrix} \right\}}$ tomando $x_1=1$

Por tanto:

$\vec{v}_{\pm} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \pm \sqrt{5} \end{pmatrix}$ VEP de VAP $\lambda_{\pm} = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2} \Rightarrow \begin{cases} r_+ = [\vec{v}_+] = \text{recta de entrada lenta} \\ r_- = [\vec{v}_-] = \text{" " " " rápida} \end{cases}$
pues $\lambda_- < \lambda_+ < 0$

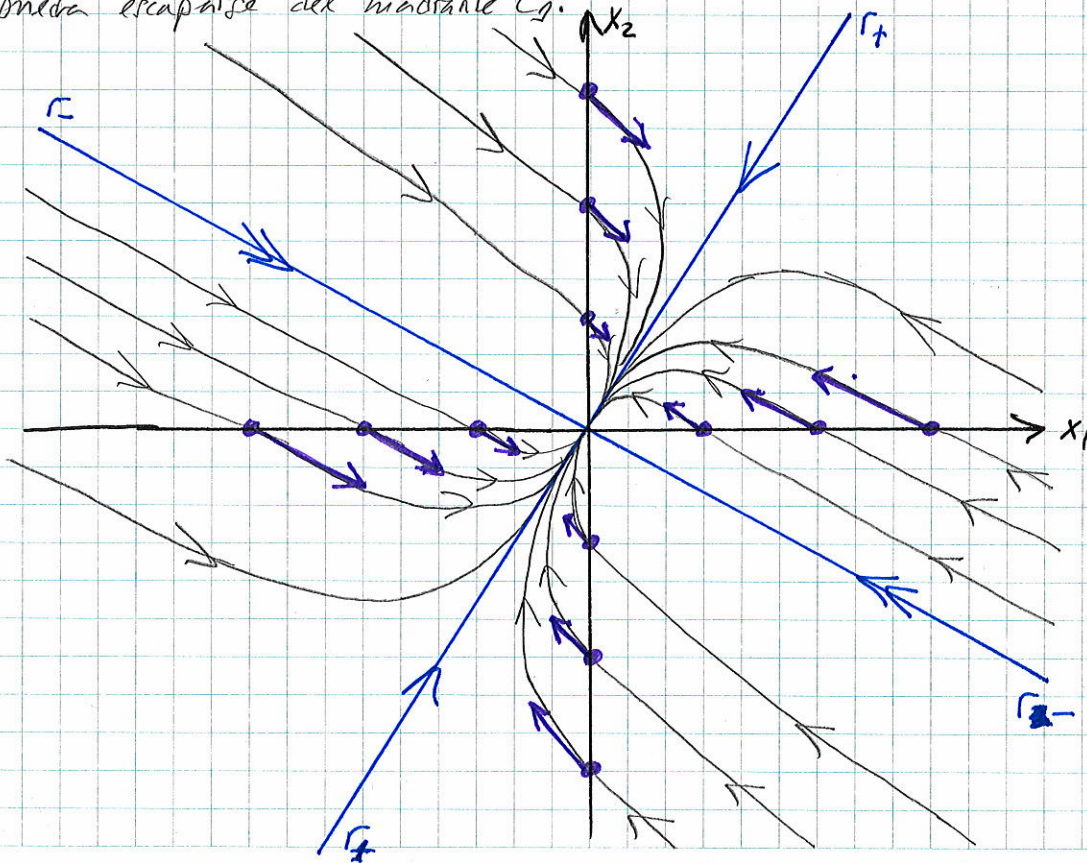
ii) A confirmación, calculamos el campo de velocidades sobre cada eje.

* Eje horizontal: posición $= \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{velocidad} = \vec{x}' = A\vec{x} = \begin{pmatrix} -2x_1 \\ x_1 \end{pmatrix}$ Hemos dibujado algunas de estas

* Eje vertical: posición $= \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{velocidad} = \vec{x}' = A\vec{x} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_2 \end{pmatrix}$ velocidades en color violeta

Vemos que los ejes de coordenadas no son invariantes pues el campo de velocidades es transversal a ellos, ver las flechas de color violeta.

iii) Si $\vec{x}(t) \in C_1 \forall t > 0$, pues el campo de velocidades en la frontera ∂C_1 siempre apunta hacia el interior de C_1 , lo cual impide que una trayectoria pueda escaparse del cuadrante C_1 .



El mismo razonamiento se aplica en el tercer cuadrante C_3 . En cambio, existen trayectorias que escapan de C_2 y C_3 , ver el croquis.

iv) Empezamos mirando hacia adonde apunta el campo de velocidades sobre la hipotenusa del triángulo T_ℓ ; es decir, sobre los puntos $\vec{x} = (x_1, x_2)$ tales que $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ y $x_1 + x_2 = \ell$.

$$\text{posición} = \vec{x} = (x_1, x_2) \Rightarrow \text{velocidad} = \vec{x}' = A\vec{x} = \begin{pmatrix} x_2 - 2x_1 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix} \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 > 0 \\ x_2 > 0 \end{array} \right.$$

$\vec{n} = (1, 1)$ vector normal exterior al triángulo $\Rightarrow \langle \text{velocidad}, \text{normal exterior} \rangle = \langle \vec{x}', \vec{n} \rangle = -x_1 < 0$
 en la hipotenusa $\Rightarrow$ La velocidad apunta hacia adentro
 $\{x_1 + x_2 = \ell\} \Rightarrow \vec{x}(t) \in T_\ell \quad \forall t > 0$ por el mismo motivo de antes.

$$v) \quad W(\vec{x}) = \frac{d}{dt} \{V(\vec{x})\} = \frac{d}{dt} \{x_1 + x_2\} = x_1' + x_2' = (x_2 - 2x_1) + (x_1 - x_2) = \underline{\underline{-x_1}}.$$

Nota: Este último apartado sirve para probar que ninguna trayectoria puede escaparse del triángulo T_ℓ sin necesidad de estudiar el campo de velocidades como hemos hecho en iv). La idea es:

$\vec{x} = (x_1, x_2) \in T_\ell \Rightarrow W(\vec{x}) = -x_1 \leq 0 \Rightarrow$ El valor de $V(\vec{x}) = x_1 + x_2$ no crece
 $\Rightarrow$ La trayectoria no puede atravesar la hipotenusa de T_ℓ .

2) a) Ecuación para equilibrio $\begin{cases} 0 = x' = x(1-x-y) \\ 0 = y' = y(2-x-y)/4 \end{cases} \begin{matrix} \xrightarrow{x=0} \\ \xrightarrow{x+y=1} \\ \xrightarrow{x+y=2} \\ \xrightarrow{y=0} \end{matrix} \rightsquigarrow \text{Ecuaciones incompatibles}$

Por tanto, tenemos tres posibles combinaciones:

$$O = (0, 0) = \{x=0\} \cap \{y=0\}; \quad A = (1, 0) = \{x+y=1\} \cap \{y=0\}; \quad B = (0, 2) = \{x=0\} \cap \{x+y=2\}.$$

La matriz del sistema linealizado en el punto de equilibrio (x_0, y_0) es:

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\partial x'}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial x'}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial y'}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial y'}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 2x_0 - y_0 & -x_0 \\ -y_0/4 & 1/2 - x_0/4 - y_0/2 \end{pmatrix}$$

Estudiamos cada punto de equilibrio por separado:

Q $M_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \text{raíces: } \lambda_1 = 1 \text{ y } \lambda_2 = \frac{1}{2} \text{ (reales, positivos y simples)}$

Por tanto, el sistema linealizado es un modo propio repetitivo y el sistema no lineal es repetitivo en el punto O .

A $M_A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{VAPs: } \lambda_1 = -1 < 0 \text{ \& } \lambda_2 = 1/4 > 0 \text{ (rends de signes \neq)}$

Por tanto, el sistema linealizado es una silla y el sistema no lineal es inestable, pero no repulsor, en el punto A.

B $M_B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{VARS: } \lambda_1 = -1 < 0 \text{ \& } \lambda_2 = -1/2 < 0 \text{ (real, negative, simple)}$

Por tanto, el sistema linealizado es un nudo propio atractor y el sistema no lineal es atractor en el punto B.

b) $y=0 \Rightarrow \begin{cases} x' = f(x) = x(1-x) \\ y' = 0 \text{ (linija je horizontalna i invarianta)} \end{cases}$
 $x=0 \Rightarrow \begin{cases} x' = 0 \text{ (linija " " vertical " ")} \\ y' = g(y) = y(2-y)/4 \end{cases}$

Además, $x' = f(x) \begin{cases} < 0 & \Leftrightarrow & x < 0 \text{ o } x > 1 \\ = 0 & \Leftrightarrow & x = 0 \text{ " } \\ > 0 & \Leftrightarrow & x \in (0, 1) \end{cases}$

Analogamente, $y' = g(y)$ $\begin{cases} < 0 \Leftrightarrow y < 0 \text{ ou } y > z \\ = 0 \Leftrightarrow y = z \\ > 0 \Leftrightarrow y \in (0, z) \end{cases}$

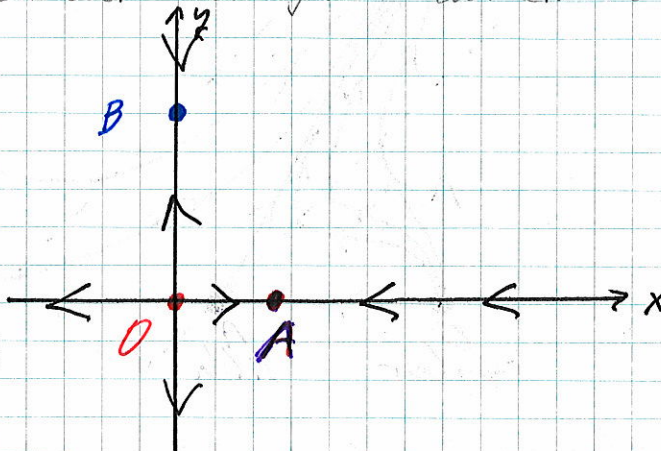
Por tanto, la dinámica sobre los ejes de coordenadas es:

Interpretación biológica:

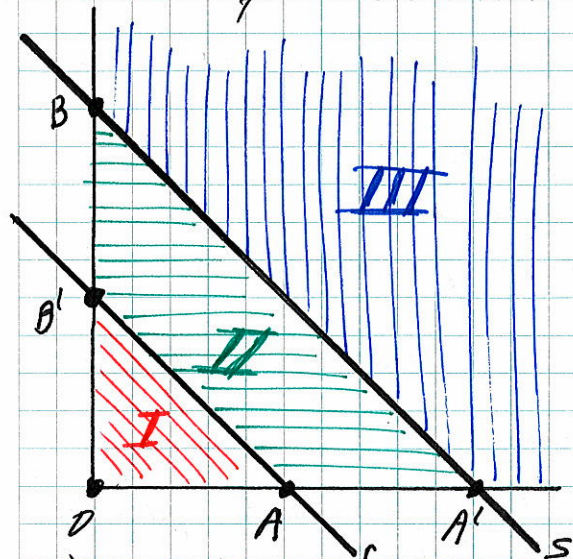
$$* \exists Y \rightarrow \exists X(A) \quad 1 \rightarrow 100$$

$$x \in X \rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 2$$

(Las densidades negativas
no tienen sentido biológico)



- c) Las rectas $r \equiv x+y=1$ & $s \equiv x+y=2$ son paralelas. Además, la recta r interseca los ejes de coordenadas en los puntos $A=(1,0)$ y $B'=(0,1)$, mientras que s los interseca en $A'=(2,0)$ y $B=(0,2)$.



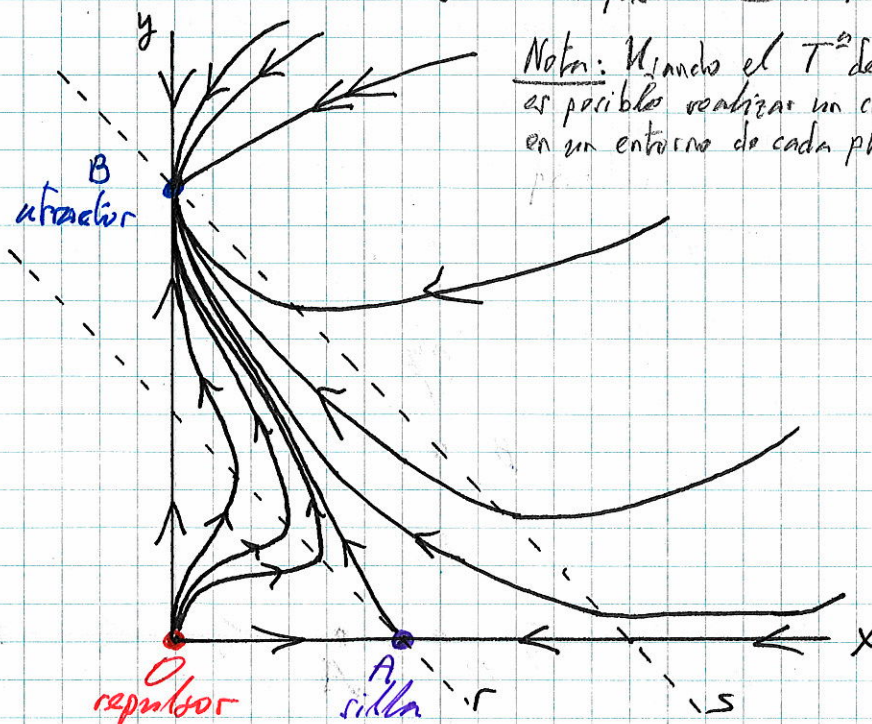
Las tres regiones son:

- I) El triángulo OAB' donde $x' > 0, y' > 0$, luego ambas especies proliferan
- II) El trapecio $AA'B'B'$ donde $x' < 0, y' > 0$, luego la especie Y gana la competición
- III) La región no acotada $\{(x,y) \in \mathbb{R}_+^2 : x+y > 2\}$ donde ambas especies disminuyen: $x' < 0, y' < 0$.

- d) Para dibujar el croquis necesitamos las siguientes observaciones:

- 1) Los ejes de coordenadas son invariantes, luego el 1º cuadrante también.
- 2) La dinámica sobre los ejes de coordenadas ya la tenemos (apartado b).
- 3) Cualquier trayectoria que empiece en I, debe salir por el segmento $\overline{AB'}$.
- 4) " " " " " II, tiende al punto B cuando $t \rightarrow \infty$.
- 5) " " " " " III, o bien pasa a II o tiende a B .

Croquis:



Nota: Usando el T^2 de Hartman-Grobman es posible realizar un croquis preciso en un entorno de cada pto de equilibrio.

Interpretación biológica: Y gana la competición, excepto cuando no hay Y .

Examen Final de Ecuaciones Diferenciales 3 Problemas (7.5 puntos)

Fecha: 15 de junio de 2012

Tiempo total: 3 horas

Problema 3 [2.5 puntos]. Es el problema computacionalmente más largo, pues hace falta calcular unos coeficientes de Fourier, pero todo lo que se pide es “rutinario”. $\diamond$

Consideramos el PVI de calor 1D no homogéneo con condiciones de contorno tipo Neumann constantes

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 9 \sin(3x) & x \in (0, \pi) \quad t > 0 \\ u(x, 0) = 3 \sin x & x \in (0, \pi) \\ u_x(0, t) = 3 & t > 0 \\ u_x(\pi, t) = -3 & t > 0. \end{cases}$$

- a) Sea $T(t)$ el promedio de la temperatura en el instante t . Dar una fórmula explícita para la función $T(t)$. ¿Se conserva el promedio de la temperatura? Justificar la respuesta.
- b) Calcular los infinitos equilibrios térmicos $v(x)$ del siguiente problema

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 9 \sin(3x) & x \in (0, \pi) \quad t > 0 \\ u_x(0, t) = 3 & t > 0 \\ u_x(\pi, t) = -3 & t > 0. \end{cases}$$

- c) Sea $v(x)$ uno de los anteriores equilibrios térmicos. Probar que el cambio

$$w(x, t) = u(x, t) - v(x)$$

transforma el problema original en un problema de la forma

$$\begin{cases} w_t - w_{xx} = 0 & x \in (0, \pi) \quad t > 0 \\ w(x, 0) = g(x) & x \in (0, \pi) \\ w_x(0, t) = 0 & t > 0 \\ w_x(\pi, t) = 0 & t > 0. \end{cases}$$

- d) Calcular la solución $w(x, t)$ del problema transformado.

Indicación 1: No es necesario resolver explícitamente el PVF resultante, basta decir cuáles son sus VAPs y sus FUPs.

Indicación 2: Usar la identidad trigonométrica

$$2 \sin(\alpha x) \cos(\beta x) = \sin[(\alpha + \beta)x] + \sin[(\alpha - \beta)x].$$

- e) Calcular $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(x, t)$, siendo $u(x, t)$ la solución del problema original.

Solución:

- a) El promedio de la temperatura en el instante t es

$$T(t) = \frac{\text{integral de la temperatura en el instante } t}{\text{longitud del intervalo } (0, \pi)} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi u(x, t) dx.$$

Aplicando la regla de Leibnitz, la EDP que nos dan, el teorema fundamental del cálculo y, finalmente, ambas condiciones de contorno, vemos que

$$\begin{aligned} T'(t) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi u_t(x, t) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (u_{xx}(x, t) + 9 \sin(3x)) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left[u_x(x, t) - 3 \cos(3x) \right]_{x=0}^{x=\pi} = \frac{1}{\pi} [(-3 + 3) - (3 - 3)] = 0. \end{aligned}$$

Por tanto, se conserva el promedio $T(t)$.

- b) Al imponer que $u(x, t) = v(x)$ cumpla el problema dado se obtiene que $v''(x) = -9 \sin(3x)$, $v'(0) = 3$ y $v'(\pi) = -3$. Integrando la EDO, vemos que $v'(x) = a + 3 \cos(3x)$ donde $a \in \mathbb{R}$ es una constante de integración. Al imponer las condiciones de frontera resulta que

$$a + 3 = v'(0) = 3, \quad a - 3 = v'(\pi) = -3 \Rightarrow a = 0.$$

Por tanto, $v'(x) = 3 \cos(3x)$, e integrando otra vez obtenemos los infinitos equilibrios térmicos: $v(x) = b + \sin(3x)$, con $b \in \mathbb{R}$ libre.

c) Si escribimos $w(x, t) = u(x, t) - v(x)$ y escogemos $v(x) = \sin(3x)$, entonces

$$\begin{cases} w_t - w_{xx} = (u_t - u_{xx}) - v''(x) = 9 \sin(3x) - 9 \sin(3x) = 0 & x \in (0, \pi) \quad t > 0 \\ w(x, 0) = u(x, 0) - v(x) = 3 \sin x - \sin(3x) =: g(x) & x \in (0, \pi) \\ w_x(0, t) = u_x(0, t) - v'(0) = 3 - 3 = 0 & t > 0 \\ w_x(\pi, t) = u_x(\pi, t) - v'(\pi) = (-3) - (-3) = 0 & t > 0. \end{cases}$$

d) Al imponer que la función $w(x, t) = X(x)T(t)$ cumpla:

- La ecuación $w_t = w_{xx}$, se obtiene que $X(x)T'(t) = X''(x)T(t)$, luego

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{T(t)} = \lambda \in \mathbb{R}.$$

- La condición de frontera $w_x(0, t) = 0$, vemos que $X'(0) = 0$.
- La condición de frontera $w_x(\pi, t) = 0$, vemos que $X'(\pi) = 0$.

Por tanto, obtenemos dos problemas separados:

$$\begin{cases} X''(x) = \lambda X(x) \\ X'(0) = X'(\pi) = 0 \end{cases}, \quad \{T'(t) = \lambda T(t)\}.$$

Ya vimos es clase que el PVF de Neumann homogéneo asociado a la función $X(x)$ tiene VAPs $\lambda_n = -n^2$ y FUPs $X_n(x) = \cos(nx)$, con $n \geq 0$. Resolviendo la ecuación $T'(t) = \lambda T(t)$ para $\lambda = \lambda_n = -n^2$, obtenemos las funciones $T_n(t) = e^{-n^2 t}$. Por tanto, los modos normales son

$$w_n(x, t) = X_n(x)T_n(t) = e^{-n^2 t} \cos(nx), \quad n \geq 0.$$

Al imponer que la superposición de infinitos modos normales

$$w(x, t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} a_n w_n(x, t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} a_n e^{-n^2 t} \cos(nx)$$

cumpla la condición $w(x, 0) = g(x) = 3 \sin x - \sin(3x)$, se deduce que

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi g(x) \cos(nx) dx, \quad n \geq 0,$$

son los coeficientes de Fourier del desarrollo en cosenos de la función $g(x) = 3 \sin x - \sin(3x)$ en el intervalo $[0, \pi]$. Para calcularlos, usamos la identidad trigonométrica sugerida:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi g(x) \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (3 \sin x \cos(nx) - \sin(3x) \cos(nx)) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (3 \sin[(1+n)x] + 3 \sin[(1-n)x] - \sin[(3+n)x] - \sin[(3-n)x]) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{3 \cos[(1+n)x]}{1+n} - \frac{3 \cos[(1-n)x]}{1-n} + \frac{\cos[(3+n)x]}{3+n} + \frac{\cos[(3-n)x]}{3-n} \right]_{x=0}^{x=\pi} \\ &= \frac{(-1)^n + 1}{\pi} \left[\frac{3}{1+n} + \frac{3}{1-n} - \frac{1}{3+n} - \frac{1}{3-n} \right] \\ &= \frac{(-1)^n + 1}{\pi} \left[\frac{6}{1-n^2} - \frac{6}{9-n^2} \right] = \frac{(-1)^n + 1}{\pi} \frac{48}{(n^2-1)(n^2-9)}, \quad n \neq 1, 3. \end{aligned}$$

Hemos usado que $\cos[(1 \pm n)\pi] = (-1)^{1 \pm n} = -(-1)^n$ y $\cos[(3 \pm n)\pi] = (-1)^{3 \pm n} = -(-1)^n$. Análogamente, se comprueba que $a_1 = a_3 = 0$. En particular, $a_n = 0$ si n es impar.

Finalmente, la solución del problema transformado es

$$w(x, t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1, n \text{ par}} a_n w_n(x, t) = \frac{16}{3\pi} + \frac{96}{\pi} \sum_{k \geq 1} \frac{e^{-4k^2 t} \cos(2kx)}{(4k^2-1)(4k^2-9)}.$$

e) La solución del problema original es $u(x, t) = v(x) + w(x, t)$, luego

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u(x, t) = v(x) + \lim_{t \rightarrow +\infty} w(x, t) = v(x) + a_0/2 = \sin(3x) + 16/3\pi.$$

Examen Final de Ecuaciones Diferenciales

Fecha: 15 de junio de 2012

Teoría

Tiempo: 30 minutos

[2.5 puntos]. Lo bueno, si breve, dos veces bueno. $\diamond$

- a) Sea A una matriz $n \times n$ diagonalizable. Supongamos que $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ es una base de VEPs de VAPs $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de la matriz A . Escribir la solución general $\mathbf{x}_h(t)$ del sistema lineal homogéneo a coeficientes constantes $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ y esbozar una explicación somera de porqué tiene la forma dada.
- b) Sea $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ un punto de equilibrio de un sistema no lineal $\mathbf{x}' = \mathbf{F}(\mathbf{x})$. ¿Cuál es la matriz A del sistema linealizado en el punto $\mathbf{x}_0$? Enunciar el teorema que describe cómo determinar la estabilidad del punto $\mathbf{x}_0$ por el método de linealización.
- c) Escribir las dos EDOs que se obtienen al imponer que la función $u(x, t) = X(x)T(t)$ cumpla la EDP $u_{tt} + ku_t - c^2 u_{xx} = 0$.
- d) Sea $u(x, t)$ la solución del PVI de la cuerda vibrante infinita con fricción

$$\begin{cases} u_{tt} + ku_t - c^2 u_{xx} = F(x, t) & x \in \mathbb{R} \quad t \in \mathbb{R} \\ u(x, 0) = f(x) & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x, 0) = g(x) & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Calcular la aceleración inicial $u_{tt}(x, 0)$ en función de los datos del problema.

Advertencia: La fórmula de D'Alembert no juega ningún papel en esta pregunta.

Solución:

- a) La solución general del sistema es

$$\mathbf{x}_h(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1 + \dots + c_n e^{\lambda_n t} \mathbf{v}_n, \quad c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}.$$

Sabemos que si $\mathbf{v}$ es un VEP de VAP λ de la matriz A , entonces $\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t} \mathbf{v}$ es una solución de $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$. Además, las soluciones de $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ forman un subespacio vectorial de dimensión n . Por tanto, la solución general $\mathbf{x}_h(t)$ es la combinación lineal de las n soluciones linealmente independientes $\mathbf{x}_j(t) = e^{\lambda_j t} \mathbf{v}_j$, con $j = 1, \dots, n$.

- b) La matriz del sistema linealizado es

$$A = D\mathbf{F}(\mathbf{x}_0) = \left(\frac{\partial x'_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0) \right)_{1 \leq i, j \leq n},$$

donde $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ y $\mathbf{x}' = (x'_1, \dots, x'_n)$.

En el teorema pedido se establece que:

- Si A tiene algún VAP de parte real positiva, el punto de equilibrio es inestable.
- Si todos los VAPs tienen parte real negativa/positiva, entonces el punto de equilibrio es atractor/repulsor.
- En los otros casos, la linealización no decide la estabilidad.

- c) Al imponer que $u(x, t) = X(x)T(t)$ cumpla la EDP $u_{tt} + ku_t - c^2 u_{xx} = 0$ se obtiene que

$$\begin{aligned} X(x)T''(t) + kX(x)T'(t) - c^2 X''(x)T(t) = 0 & \Rightarrow X(x)(T''(t) + kT'(t)) = c^2 X''(x)T(t) \\ & \Rightarrow \frac{T''(t) + kT'(t)}{c^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Por tanto, las dos EDOs que obtenemos son

$$X''(x) = \lambda X(x), \quad T''(t) + kT'(t) - \lambda c^2 T(t) = 0.$$

- d) Evaluando la EDP en el instante $t = 0$ y usando las dos condiciones iniciales, vemos que

$$u_{tt}(x, 0) = F(x, 0) + c^2 u_{xx}(x, 0) - ku_t(x, 0) = F(x, 0) + c^2 f''(x) - kg(x).$$