

Examen Final de Ecuaciones Diferenciales 3 Problemas (7.5 puntos)

Fecha: 13 de enero de 2012

Tiempo total: 3 horas

Problema 1 [2.5 puntos]. Este problema es bastante conceptual, con pocos cálculos. Se pide claridad en la exposición y justificar —darlas no basta— todas las respuestas. $\diamond$

Consideramos el sistema lineal 3D $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ y el sistema lineal 2D $\mathbf{x}' = B\mathbf{x}$ dados por las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -2\alpha & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2\alpha & \alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

- Estudiar la estabilidad del sistema 2D en función de α . Ídem para el sistema 3D.
- ¿Existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que todas las soluciones de sistema 2D son periódicas? En caso afirmativo, ¿qué periodo tienen? Ídem para el sistema 3D.
- ¿Para qué valor de $\alpha \in \mathbb{R}$ preserva área el sistema 2D? ¿Para qué valor de $\alpha \in \mathbb{R}$ preserva volumen el sistema 3D?
- Dibujar el croquis de ambos sistemas (2D y 3D) cuando $\alpha = 1$.
- Describir la relación entre los croquis de ambos sistemas para un α arbitrario.

Solución:

- El sistema 2D tiene traza $T = \alpha - 1$ y determinante $D = 3\alpha$. Por tanto, el sistema 2D es AE cuando $\alpha \in (0, 1)$, I cuando $\alpha \notin [0, 1]$ y E pero no AE cuando $\alpha \in \{0, 1\}$.

El sistema 3D siempre es inestable, pues su tercer VAP es $\lambda_3 = 3 > 0$.

- Los únicos sistemas 2D con todas las soluciones periódicas son los centros. Por tanto, necesitamos que $T = 0$ y $D > 0$, luego $\alpha = 1$ es la única posibilidad. Si $\alpha = 1$, entonces $Q_B(\lambda) = \lambda^2 - T\lambda + D = \lambda^2 + 3$, luego los VAPs de la matriz B son $\lambda_{1,2} = \pm\beta i$, con $\beta = \sqrt{3}$. En particular, el periodo de las soluciones periódicas es

$$T = 2\pi/\beta = 2\pi/\sqrt{3}.$$

El sistema 3D siempre tiene soluciones que no son periódicas, pues el eje vertical es una recta invariante de salida.

- El sistema 2D preserva área si y sólo si traza $B = \alpha - 1 = 0$. Es decir, si y sólo si $\alpha = 1$. El sistema 3D preserva volumen si y sólo si traza $A = 2 + \alpha = 0$. Es decir, si y sólo si $\alpha = -2$.
- Ya sabemos que el sistema 2D es un centro cuando $\alpha = 1$. Además, la velocidad en la posición $(x_1, x_2) = (1, 0)$ es igual a $(x'_1, x'_2) = (-1, -2)$, luego el sentido de giro es horario. Por tanto, el croquis 2D consiste en elipses recorridas en sentido horario. En el caso 3D la componente vertical cumple la EDO $x'_3 = 3x_3$, mientras que las dos componentes horizontales cumplen el sistema 2D. En particular, el eje vertical $r = \{x_1 = x_2 = 0\}$ es una recta invariante de salida y el plano horizontal $\Pi = \{x_3 = 0\}$ es un plano invariante de giros cerrados. Por tanto, las trayectorias no contenidas ni en r ni en Π son espirales que escapan a infinito en la dirección vertical.
- La estructura de las trayectorias del sistema 3D en el caso general es la siguiente: r siempre es una recta invariante de salida y Π es un plano invariante donde las trayectorias se comportan como en el sistema 2D. Por tanto, una vez dibujado el croquis del sistema 2D sobre el plano Π , las trayectorias no contenidas ni en r ni en Π escapan a infinito en la dirección vertical, mientras que sus proyecciones horizontales se comportan como en el sistema 2D.

Examen Final de Ecuaciones Diferenciales 3 Problemas (7.5 puntos)

Fecha: 13 de enero de 2012

Tiempo total: 3 horas

Problema 2 [2.5 puntos]. Este problema sigue las líneas maestras del péndulo sin fricción o de los campos conservativos con un grado de libertad vistos en clase. $\diamond$

El movimiento de una partícula de masa uno que se desplaza sin fricción sobre una recta bajo la acción de la fuerza $F(x) = x - x^2$ cumple la EDO de segundo orden

$$x'' = F(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

- a) Introduciendo la velocidad $v = x'$, escribir esta EDO de segundo orden como un sistema no lineal 2D de primer orden. Calcular la derivada temporal de la energía

$$E(x, v) = v^2/2 + U(x)$$

donde $U(x) = -\int_1^x F(s)ds = x^3/3 - x^2/2 + 1/6$ es el potencial. La posición $x = 1$ es el origen del potencial: $U(1) = 0$.

- b) Calcular las dos posiciones de equilibrio de la partícula, la energía de cada una y la estabilidad de cada una. Decidir el método a usar en cada caso.
- c) Dibujar la gráfica del potencial $U(x)$, las curvas de nivel de la energía $E(x, v)$ y un croquis aproximado del sistema.
- d) ¿Para qué valores de la energía existen soluciones acotadas?

Solución:

- a) Introduciendo la velocidad $v = x'$, reescribimos la EDO anterior como el sistema no lineal 2D autónomo de primer orden

$$\begin{cases} x' &= v \\ v' &= F(x) \end{cases}.$$

La derivada temporal de la energía es idénticamente nula:

$$\frac{d}{dt}\{E(x, v)\} = \frac{\partial E}{\partial x}(x, v)x' + \frac{\partial E}{\partial v}(x, v)v' = \frac{dU}{dx}(x)v + vF(x) = -F(x)v + vF(x) = 0.$$

- b) Buscamos los puntos de equilibrio del sistema:

$$\begin{cases} x' &= v &= 0 \\ v' &= x - x^2 &= 0 \end{cases} \implies x \in \{0, 1\}, v = 0.$$

La matriz del sistema linealizado en el punto de equilibrio $(x, v) = (x_*, 0)$ es igual a

$$A(x_*) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{dF}{dx}(x_*) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - 2x_* & 0 \end{pmatrix}.$$

Como $\frac{dF}{dx}(0) = 1$, entonces $\det[A(0)] = -1 < 0$ y el sistema linealizado es una silla, luego la posición de equilibrio $x = 0$ es inestable y tiene energía $E(0, 0) = U(0) = 1/6$.

En cambio, $\frac{dF}{dx}(1) = -1$, luego $\det[A(1)] = 1 > 0$ y $\text{traza}[A(1)] = 0$. El sistema linealizado es un centro y la linealización no decide la estabilidad en $x = 1$. Por tanto, aplicaremos el método de Liapounov usando la energía como función de Liapounov. El potencial $U(x)$ se anula y tiene un mínimo local estricto en $x = 1$, ya que $\frac{dU}{dx}(1) = 0$ y $\frac{d^2U}{dx^2}(1) = 1 > 0$. Así pues, la energía $E(x, v) = v^2/2 + U(x)$ se anula y tiene un mínimo local estricto en $(x, v) = (1, 0)$. Por tanto, la función $E(x, v)$ es definida positiva en $(x, v) = (1, 0)$ y su derivada temporal es idénticamente cero, lo cual implica que esa posición de equilibrio es E pero no AE. La energía de esa posición es $E(1, 0) = U(1) = 0$.

- c) El potencial $U(x)$ tiene un mínimo local en $x = 1$, un máximo local en $x = 0$ y no tiene más puntos críticos. Además, $U(0) = 1/6$, $U(1) = 0$ y $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} U(x) = \pm\infty$. Con esto ya se puede dibujar su gráfica.

La energía se conserva, luego las trayectorias están contenidas en las curvas de nivel

$$C(E_0) = \{E(x, v) = E_0\} = \{(x, v) \in \mathbb{R}^2 : v = \pm g(x; E_0)\},$$

donde la función $g(x; E_0) = 2\sqrt{E_0 - U(x)}$ sólo está definida cuando $U(x) \leq E_0$. El signo $\pm$ en la expresión de las curvas $C(E_0)$ implica que son simétricas respecto al eje horizontal. Además, $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x; E_0) = \infty$. Queremos dibujar estas curvas de nivel. Sea $I(E_0) = \{x \in \mathbb{R} : U(x) \leq E_0\}$. Mirando la gráfica del potencial $U(x)$ podemos distinguir cuatro casos:

- Si $E_0 \notin [0, 1/6]$, entonces $I(E_0) = (-\infty, b_0)$ para algún $b_0 \in \mathbb{R}$ y $C(E_0)$ es una curva abierta que escapa a infinito cuando $x \rightarrow -\infty$;
- Si $E_0 = 0$, entonces $I(E_0) = (-\infty, b_0) \cup \{1\}$ para algún $b_0 < 1$ y $C(E_0)$ contiene al punto de equilibrio $(1, 0)$ y a una curva abierta que escapa a infinito cuando $x \rightarrow -\infty$;
- Si $E_0 \in (0, 1/6)$, $I(E_0) = (-\infty, b_0) \cup (a_1, b_1)$ para algunos $b_0 < 0 < a_1 < 1 < b_1$ y $C(E_0)$ contiene una curva cerrada alrededor del punto $(1, 0)$ y una curva abierta que escapa a infinito cuando $x \rightarrow -\infty$;
- Si $E_0 = 1/6$, entonces $I(E_0) = (-\infty, b_0]$ para algún $b_0 > 1$ y $C(E_0)$ tiene forma de un lazo —algo así como una α invertida— alrededor del punto de equilibrio estable $(1, 0)$ con una autointersección en el punto de equilibrio inestable $(0, 0)$.

Finalmente, el croquis del sistema se obtiene determinado el sentido de las trayectorias contenidas en las curvas de nivel. Las curvas de nivel se recorren hacia la derecha mientras están en el semiplano superior $\{(x, v) \in \mathbb{R}^2 : v > 0\}$, pues $x'(t) = v(t) > 0$. Análogamente, en el semiplano inferior se recorren hacia la izquierda.

- d) Existe alguna solución acotada de energía E_0 si y sólo si la curva de nivel $C(E_0)$ contiene alguna curva cerrada. Es decir, si y sólo si $0 \leq E_0 \leq 1/6$.

Examen Final de Ecuaciones Diferenciales 3 Problemas (7.5 puntos)

Fecha: 13 de enero de 2012

Tiempo total: 3 horas

Problema 3 [2.5 puntos]. Es el problema computacionalmente más largo, pero todo lo que se pide es “rutinario”. $\diamond$

Consideramos el PVI de calor 1D con condiciones de contorno tipo Neumann constantes

$$\begin{cases} u_t = k^2 u_{xx} & x \in (0, L) \quad t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) & x \in (0, L) \\ u_x(0, t) = \alpha & t > 0 \\ u_x(L, t) = \beta & t > 0 \end{cases}$$

donde $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ es la temperatura inicial, $\alpha \in \mathbb{R}$ es el flujo de calor que sale por el extremo izquierdo y $\beta \in \mathbb{R}$ es el flujo de calor que entra por el extremo derecho.

- a) Dada una solución $u(x, t)$ del PVI, calcular la derivada de la función

$$T(t) = \frac{1}{L} \int_0^L u(x, t) dx.$$

Interpretar físicamente la función $T(t)$ y el resultado obtenido.

- b) Calcular los equilibrios térmicos (es decir, soluciones de la forma $u(x, t) = v(x)$) del problema no homogéneo

$$\begin{cases} u_t = k^2 u_{xx} & x \in (0, L) \quad t > 0 \\ u_x(0, t) = \alpha & t > 0 \\ u_x(L, t) = \beta & t > 0. \end{cases}$$

Comprobar que hay infinitos equilibrios térmicos cuando $\beta = \alpha$, pero no hay ninguno cuando $\beta \neq \alpha$.

- c) Calcular los modos normales (o sea, soluciones de la forma $u(x, t) = X(x)T(t)$) del problema homogéneo

$$\begin{cases} u_t = k^2 u_{xx} & x \in (0, L) \quad t > 0 \\ u_x(0, t) = 0 & t > 0 \\ u_x(L, t) = 0 & t > 0. \end{cases}$$

Indicación: Podeis usar que el PVF resultante no tiene FUPs hiperbólicas (también llamadas exponenciales).

- d) Calcular la solución del PVI cuando $f(x) = x$, $k = 1$, $L = \pi$ y $\alpha = \beta = 0$.

Indicación: Se necesita una de las primitivas

$$\int x \cos(ax) dx = \frac{\cos(ax)}{a^2} + \frac{x \sin(ax)}{a}, \quad \int x \sin(ax) dx = \frac{\sin(ax)}{a^2} - \frac{x \cos(ax)}{a}.$$

Solución:

- a) La función $T(t)$ es igual a la temperatura promedio en el instante t . Aplicando el teorema de derivación bajo el signo de la integral, la ecuación del calor, el teorema fundamental del cálculo y, finalmente, ambas condiciones de contorno, vemos que

$$T'(t) = \frac{1}{L} \int_0^L u_t(x, t) dx = \frac{k^2}{L} \int_0^L u_{xx}(x, t) dx = \frac{k^2}{L} [u_x(x, t)]_{x=0}^{x=L} = k^2(\beta - \alpha)/L.$$

Por tanto, la temperatura promedio aumenta, se mantiene o disminuye cuando el calor que entra por un extremo es mayor, igual o menor que el calor que escapa por el otro extremo, respectivamente.

- b) Al imponer que $u(x, t) = v(x)$ cumpla el problema no homogéneo se obtiene que $v''(x) = 0$, $v'(0) = \alpha$ y $v'(L) = \beta$. Sabemos que las únicas soluciones de la EDO $v''(x) = 0$ son las funciones lineales de la forma $v(x) = ax + b$, con $a, b \in \mathbb{R}$. Al imponer las condiciones de frontera resulta que

$$\alpha = v'(0) = a = v'(L) = \beta.$$

Así pues, no hay ningún equilibrio térmico cuando $\beta \neq \alpha$. Por contra, si $\beta = \alpha$, entonces hay infinitos equilibrios térmicos; a saber, $v(x) = \alpha x + b$, con $b \in \mathbb{R}$ libre.

- c) Al imponer que la función $u(x, t) = X(x)T(t)$ cumpla:

- La ecuación $u_t = k^2 u_{xx}$, se obtiene que $X(x)T'(t) = k^2 X''(x)T(t)$, luego

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{k^2 T(t)} = \lambda \in \mathbb{R}.$$

- La condición de frontera $u_x(0, t) = 0$, vemos que $X'(0) = 0$.
- La condición de frontera $u_x(L, t) = 0$, vemos que $X'(L) = 0$.

Por tanto, obtenemos dos problemas separados:

$$\begin{cases} X''(x) = \lambda X(x) \\ X'(0) = X'(L) = 0 \end{cases}, \quad \{T'(t) = \lambda k^2 T(t)\}.$$

Empezamos resolviendo el PVF asociado a la función $X(x)$. Nos dicen que no existen FUPs hiperbólicas, luego no hay VAPs positivos. Miramos si $\lambda = 0$ es un VAP. Para comprobarlo, imponemos que la solución general $X_h(x) = c_1 + c_2 x$ de la EDO homogénea $X''(x) = 0$ cumpla las condiciones de frontera: $X'(0) = c_2 = 0$ y $X'(L) = c_2 = 0$. Este sistema tiene soluciones no triviales: $c_2 = 0$ y $c_1 \in \mathbb{R}$ libre. Así pues, $\lambda = \lambda_0 = 0$ es un VAP y sus FUPs son los múltiplos de la función $X_0(x) = 1$.

Para encontrar los VAPs negativos $\lambda = -\mu^2$, imponemos que la solución general $X_h(x) = c_1 \cos(\mu x) + c_2 \sin(\mu x)$ de la EDO homogénea $X''(x) + \mu^2 X(x) = 0$ cumpla las condiciones de frontera: $X'(0) = c_2 \mu = 0$ y $X'(L) = -c_1 \mu \sin(\mu L) + c_2 \mu \cos(\mu L) = 0$. Queremos que los coeficientes c_1 y c_2 no sean simultáneamente nulos, luego

$$\sin(\mu L) = 0 \Rightarrow \mu = \mu_n = n\pi/L, \quad n \in \mathbb{Z} \Rightarrow \lambda = \lambda_n = -n^2 \pi^2 / L^2, \quad n \geq 1.$$

En la última equivalencia hemos pasado de $n \in \mathbb{Z}$ a los enteros $n \geq 1$, pues los enteros $n \leq 0$ no generan nuevos VAPs negativos. Como $c_1 = 0$, las FUPs de VAP $\lambda = \lambda_n < 0$ son (los múltiplos de) las funciones trigonométricas

$$X_n(x) = \cos(\mu_n x) = \cos(n\pi x/L), \quad n \geq 1.$$

Notamos que en las fórmulas de los VAPs y las FUPs podemos considerar que el índice n es un entero mayor o igual que cero: $n \geq 0$, si juntamos los dos casos anteriores.

Resolviendo la ecuación $T'(t) = \lambda k^2 T(t)$ para $\lambda = \lambda_n = -n^2 \pi^2 / L^2$, obtenemos las funciones $T_n(t) = \exp(-n^2 \pi^2 k^2 t / L^2)$, con $n \geq 0$.

Finalmente, los modos normales son múltiplos de las funciones

$$u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t) = \cos(n\pi x/L) \exp(-k^2 n^2 \pi^2 t / L^2), \quad n \geq 0.$$

d) Al imponer que la superposición de modos normales

$$u(x, t) = a_0/2 + \sum_{n \geq 1} a_n u_n(x, t) = a_0/2 + \sum_{n \geq 1} a_n \cos(nx) \exp(-n^2 t)$$

cumpla la condición $u(x, 0) = f(x) = x$, se deduce que $a_0 = 2\pi^{-1} \int_0^\pi x dx = \pi$ y

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} \left[\frac{\cos(nx)}{n^2} + \frac{x \sin(nx)}{n} \right]_{x=0}^{x=\pi} = \frac{2}{\pi} \frac{\cos(n\pi) - 1}{n^2} = \frac{2}{\pi} \frac{(-1)^n - 1}{n^2},$$

con $n \geq 1$, son los coeficientes de Fourier del desarrollo en cosenos de la función $f(x) = x$ en el intervalo $[0, \pi]$. En particular, $a_0 = \pi$, $a_n = 0$ si $n = 2k \geq 2$ es par y $a_n = -4/\pi n^2$ si $n = 2k + 1 \geq 1$ es impar. Por tanto, la solución final es

$$u(x, t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k \geq 0} \frac{\cos((2k+1)x)}{(2k+1)^2} \exp(-(2k+1)^2 t).$$

Examen Final de Ecuaciones Diferenciales

Fecha: 13 de enero de 2012

Teoría

Tiempo: 30 minutos

[1.5 puntos]. Sea $\mathbf{x}_0$ un punto de equilibrio del sistema no lineal autónomo de primer orden en forma normal

$$\mathbf{x}' = \mathbf{F}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in U \subset \mathbb{R}^n.$$

- ¿Qué significa que $\mathbf{x}_0$ es un punto de equilibrio del sistema?
- ¿Qué tres tipos de estabilidad del sistema anterior en el punto $\mathbf{x}_0$ hemos definido en clase? Explicar el significado de cada tipo.
- ¿Qué es el sistema linealizado del sistema anterior en $\mathbf{x}_0$? Explicar con claridad en qué consiste el método de linealización.

Solución:

- Un punto $\mathbf{x}_0 \in U$ es un punto de equilibrio del sistema $\mathbf{x}' = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ cuando la velocidad del sistema en ese punto sea cero. Es decir, cuando $\mathbf{F}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$.
- Inestable, estable y asintóticamente estable. A grosso modo, un punto de equilibrio es:
 - *Estable* cuando las trayectorias que parten de puntos suficientemente cercanos no se alejan de él;
 - *Asintóticamente estable* cuando las trayectorias que parten de puntos suficientemente cercanos tienden a él; e
 - *Inestable* cuando no es estable; es decir, cuando existen trayectorias que se alejan del punto de equilibrio aunque partan de puntos muy próximos.Las definiciones formales también se aceptan.
- El sistema linealizado del sistema $\mathbf{x}' = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ en un punto de equilibrio $\mathbf{x}_0 \in U$ es el sistema lineal

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}, \quad A = D\mathbf{F}(\mathbf{x}_0) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0) \right)_{1 \leq i, j \leq n}.$$

Estamos usando las notaciones $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ y $\mathbf{F} = (f_1, \dots, f_n)$.

El método de linealización consiste en aplicar los siguientes resultados:

- Si A tiene algún VAP de parte real positiva, el punto de equilibrio es I.
- Si todos los VAPs de A tienen parte real negativa, el punto de equilibrio es AE.
- En los otros casos, la linealización no decide la estabilidad.

[1 punto]. Sea Ω un dominio 3D. Es decir, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$.

- Escribir la ecuación de ondas, la ecuación de calor y la ecuación de Laplace asociadas a Ω .
- ¿Qué relación hay entre los equilibrios elásticos de la ecuación de ondas (o equilibrios térmicos de la ecuación de calor) y la ecuación de Laplace?

Solución:

- Recordamos que el Laplaciano de una función $u : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $u = u(x, y, z)$, es la suma de sus tres derivadas parciales dobles:

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}.$$

Entonces las EDPs pedidas son:

- *Ecuación de ondas 3D*: $u_{tt} = c^2 \Delta u$, con $u = u(x, y, z, t)$, $(x, y, z) \in \Omega$ y $t \in \mathbb{R}$;
- *Ecuación de calor 3D*: $u_t = k^2 \Delta u$, con $u = u(x, y, z, t)$, $(x, y, z) \in \Omega$ y $t > 0$; y
- *Ecuación de Laplace 3D*: $\Delta u = 0$, con $u = u(x, y, z)$ y $(x, y, z) \in \Omega$.

En estas ecuaciones se entiende que el Laplaciano no contiene derivadas respecto t . Además, c y k son constantes positivas.

- Si u es un equilibrio elástico de la ecuación de ondas, entonces $u = u(x, y, z)$ no depende de t . Por tanto,

$$0 = u_{tt} = c^2 \Delta u \implies \Delta u = 0.$$

Pasa lo mismo en los equilibrios térmicos de la ecuación del calor. Así pues, los equilibrios elásticos de la ecuación de ondas (o equilibrios térmicos de la ecuación de calor) son soluciones de la ecuación de Laplace. Esa es la relación pedida.