

EDPs: problemes d'examen

Equacions Diferencials

<https://mat-web.upc.edu/etseib/ed/>

Grau en Enginyeria en Tecnologies Industrials (GETI)

ETSEIB – UPC

Equip docent d'Equacions Diferencials

Departament de Matemàtiques

ETS d'Enginyeria Industrial de Barcelona (ETSEIB)

Universitat Politècnica de Catalunya (UPC)

1 Ex. Final 23-24 Q2 [p2]

Sigui $u(x, t)$ la solució del problema següent, corresponent a la distribució de temperatures en una barnilla amb una font de calor variable,

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 23e^{-2t} \cos(5x), & 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = 3 \sin x - \sin(3x) + \cos(5x), & 0 < x < \pi, \\ u(0, t) = e^{-2t}, & t > 0, \\ u(\pi, t) = -e^{-2t}, & t > 0. \end{cases}$$

- (a) Trobeu una solució particular de l'EDP, de la forma $u_p(x, t) = e^{-2t}(a \cos(5x) + b \sin(5x))$. Fent el canvi $v(x, t) = u(x, t) - u_p(x, t)$, obtenim un nou problema de la forma

$$\begin{cases} v_t - v_{xx} = 0, & 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ v(x, 0) = g(x), & 0 < x < \pi, \\ v(0, t) = v(\pi, t) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

Determineu la funció $g(x)$.

- (b) Resoleu el nou problema obtingut a l'apartat (a) usant separació de variables, i dedueu-ne la solució $u(x, t)$ del problema original.

2 Ex. Final 23-24 Q1 [p2]

Considerem el problema següent per a una corda vibrant sotmesa a una força externa,

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 4 \sin(2t) + 25 \sin(5x), & x \in (0, \pi), \quad t \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) = 1, & x \in (0, \pi), \\ u_t(x, 0) = -2, & x \in (0, \pi), \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 1 - \sin(2t), & t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

- (a) Trobeu una solució particular de l'EDP, que sigui de la forma $u_p(x, t) = z(t) + w(x)$, i que també satisfaci les dues condicions de contorn i una de les condicions inicials (dedueu quina).
- (b) La nova funció incògnita $v(x, t) = u(x, t) - u_p(x, t)$ serà solució d'un problema de la forma

$$\begin{cases} v_{tt} - v_{xx} = 0, & x \in (0, \pi), \quad t \in \mathbb{R}, \\ v(x, 0) = f(x), & x \in (0, \pi), \\ v_t(x, 0) = g(x), & x \in (0, \pi), \\ v(0, t) = v(\pi, t) = 0, & t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Quines són les funcions $f(x)$ i $g(x)$?

- (c) Trobeu la solució $v(x, t)$ del nou problema, i la solució $u(x, t)$ del problema original.

3 Ex. Final 22-23 Q1 [p1]

Considerem el següent problema de l'equació de calor 1D amb condicions de contorn mixtes,

$$\begin{cases} u_t - 4u_{xx} = 25 \sin(5x/2), & x \in (0, \pi), \quad t > 0, \\ u(x, 0) = \sin(5x/2) + 3 \sin(7x/2), & x \in (0, \pi), \\ u(0, t) = u_x(\pi, t) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

- Trobeu una solució particular $u_p(x)$ de l'EDP que no depengui del temps, i que també satisfaci les condicions de contorn del problema. Formuleu el problema per a la nova funció incògnita $w(x, t) = u(x, t) - u_p(x)$. Quina és la nova condició inicial?
- Resoleu el nou problema per trobar $w(x, t)$, i a continuació trobeu la solució $u(x, t)$ del problema original.
- Calculeu la temperatura mitjana $T(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi u(x, t) dx$, i el seu límit $T^* = \lim_{t \rightarrow \infty} T(t)$.

4 Ex. Final 21-22 Q1 [p2]

Considerem el problema següent, corresponent a l'equació d'ones no homogènia amb condicions de contorn de Dirichlet,

$$\begin{cases} u_{tt} - 4u_{xx} = \sin 3x, & x \in (0, \pi), \quad t \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) = \frac{1}{36} \sin 3x, & x \in (0, \pi), \\ u_t(x, 0) = \sin 3x, & x \in (0, \pi), \\ u(0, t) = 0, & t \in \mathbb{R}, \\ u(\pi, t) = 0, & t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Aquest problema es resol per separació de variables, però primer s'ha d'homogeneïtzar l'EDP.

- Busqueu una solució particular senzilla $v(x)$ (que no depengui de t , per exemple de la forma $v(x) = A \sin \alpha x$) i, fent el canvi de funció $w(x, t) = u(x, t) - v(x)$, plantegeu el problema (EDP + condicions inicials i de contorn) per a la nova funció incògnita $w(x, t)$.
- Aplicant separació de variables, resoleu el problema per a $w(x, t)$ i trobeu la solució $u(x, t)$ del problema original.

5 Ex. Final 20-21 Q2 [p3]

Resoleu el següent problema de contorn per a l'equació de Laplace,

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & x \in (0, 1), \quad y \in (0, 1), \\ u(x, 0) = 0, & x \in (0, 1), \\ u(x, 1) = 2 \sin(\pi x) - 3 \sin(2\pi x), & x \in (0, 1), \\ u(0, y) = 0, & y \in (0, 1), \\ u(1, y) = 0, & y \in (0, 1). \end{cases}$$

6 Ex. Final 19-20 Q1 [p2]

Trobeu la solució del següent problema d'ones 1D amb condicions de contorn mixtes

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & x \in (0, \pi), \quad t \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) = 0, & x \in (0, \pi), \\ u_t(x, 0) = \sin \frac{3x}{2}, & x \in (0, \pi), \\ u(0, t) = u_x(\pi, t) = 0, & t \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

sabent que el problema amb valors a la frontera (PVF) associat té com a valors propis i funcions pròpies,

$$\lambda_n = -(n + \frac{1}{2})^2, \quad X_n(x) = \sin \left[(n + \frac{1}{2})x \right], \quad n \geq 0.$$

7 Ex. Final 18-19 Q2 [p1]

Una solució d'equilibri per a l'equació de la calor $u_t - \alpha^2 u_{xx} = 0$ és aquella que no varia amb t , és a dir, de la forma $u_0(x)$.

- (a) Trobeu tots els equilibris que satisfan $u_0(0) = U_1$ i $u_0(L) = U_2$. [Ind.: Comenceu comprovant que tots els equilibris són de la forma $u_0(x) = Ax + B$.]
 (b) Resoleu el següent problema de calor amb condicions de Dirichlet constants,

$$\begin{cases} u_t - \alpha^2 u_{xx} = 0, & x \in (0, 1), \quad t > 0, \\ u(x, 0) = 75, & x \in (0, 1), \\ u(0, t) = 20, & t > 0, \\ u(1, t) = 60, & t > 0. \end{cases}$$

[Ind.: Useu $w(x, t) = u(x, t) - u_0(x)$, on $u_0(x)$ és la solució d'equilibri associada a les condicions de contorn.]

8 Ex. Final 18-19 Q1 [p4]

Considerem els tres problemes següents, tots al domini $x \in (0, 1)$, $t > 0$ (observeu que el primer problema correspon a una EDP no lineal):

$$(1) \begin{cases} u_t - u_{xx} - (u_x)^2 = 0 \\ u(x, 0) = \ln(2 + 2x) \\ u(0, t) = 0 \\ u(1, t) = \ln 3 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} v_t - v_{xx} = 0 \\ v(x, 0) = f(x) \\ v(0, t) = \alpha \\ v(1, t) = \beta \end{cases} \quad (3) \begin{cases} w_t - w_{xx} = 0 \\ w(x, 0) = g(x) \\ w(0, t) = 0 \\ w(1, t) = 0 \end{cases}$$

- (a) Trobeu una funció $f(x)$ i constants α, β , tals que el canvi de funció $v(x, t) = e^{u(x, t)}$ transformi el problema (1) en el problema (2).
 (b) Trobeu funcions $v_0(x)$ i $g(x)$ tals que el canvi de funció $w(x, t) = v(x, t) - v_0(x)$ transformi el problema (2) en el problema (3).
 (c) Resoleu el problema (3).
 (d) Resoleu el problema (2) i a continuació el problema (1), i trobeu $\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t)$.

9 Ex. Final 17-18 Q2 [p3]

Considerem els dos problemes de contorn següents, corresponents a una EDP homogènia (semblant a l'equació de Laplace):

$$(1) \begin{cases} u_{xx} + u_{yy} - u = 0, \\ u(x, 0) = 0, \\ u(x, 1) = 0, \\ u(0, y) = 0, \\ u(1, y) = g(y), \end{cases} \quad \begin{matrix} x \in (0, 1), \\ y \in (0, 1), \end{matrix} \quad (2) \begin{cases} v_{xx} + v_{yy} - v = 0, \\ v(x, 0) = 0, \\ v(x, 1) = 0, \\ v(0, y) = g(y), \\ v(1, y) = 0, \end{cases} \quad \begin{matrix} x \in (0, 1), \\ y \in (0, 1), \end{matrix}$$

on $g(y)$ és una funció donada.

- (a) Resoleu el problema de contorn (1) usant separació de variables.
 [Ind.: la solució tindrà la forma $\sum d_n X_n(x) Y_n(y)$, amb uns coeficients d_n que dependran de g en una forma que cal explicitar].
 [Nota: no cal que resolgueu explícitament el PVF associat].
 (b) Trobeu també la solució del problema de contorn (2), a partir de l'apartat (a).
 [Ind.: podeu optar entre adaptar la resolució feta a l'apartat (a) o bé, si no heu fet l'apartat (a), justificar la relació entre les solucions $u(x, y)$ de (1) i $v(x, y)$ de (2).]

10 Ex. Final 17-18 Q1 [p3]

Considerem el següent problema de calor 1D no homogeni, amb condicions de contorn mixtes:

$$\begin{cases} u_t - 4u_{xx} = \sin(7x/2) \\ u(x, 0) = 1 + \sin(5x/2) \\ u(0, t) = 1, \quad u_x(\pi, t) = 0 \end{cases} \quad x \in (0, \pi), \quad t > 0.$$

- (a) Busqueu una solució particular $u_p(x)$ de l'EDP, que no depengui de t (equilibri tèrmic), i que també satisfaci les condicions de contorn, de manera que $w(x, t) = u(x, t) - u_p(x)$ és solució d'un problema del tipus

$$\begin{cases} w_t - 4w_{xx} = 0 \\ w(x, 0) = g(x) \\ w(0, t) = 0, \quad w_x(\pi, t) = 0 \end{cases} \quad x \in (0, \pi), \quad t > 0.$$

Determineu les funcions $u_p(x)$ i $g(x)$.

- (b) Supposeu conegut que el problema homogeni obtingut quan suprimim l'única condició no homogènia del problema formulat a l'apartat (a), té com a modes normals (o solucions fonamentals) les funcions

$$w_n(x, t) = e^{-(2n+1)^2 t} \cdot \sin[(n + \frac{1}{2})x], \quad n \geq 0.$$

Amb aquesta informació, trobeu la solució $u(x, t)$ del problema original.

11 Ex. Final 16-17 Q2 [p4]

Considerem el problema següent, corresponent a l'equació d'ones per a una corda vibrant parametritzada per $x \in (0, \pi)$, amb condicions inicials i de contorn:

$$\begin{cases} u_{tt} - 4u_{xx} = 0, \\ u(x, 0) = 2 + \cos 4x, \\ u_t(x, 0) = 0, \\ u_x(0, t) = u_x(\pi, t) = 0. \end{cases}$$

- (a) Si $u(x, t)$ satisfà l'EDP i les condicions de contorn, determineu el signe de la funció següent:

$$G(t) = \int_0^\pi u(x, t) u_{tt}(x, t) dx. \quad [Ind.: \text{Integreu per parts.}]$$

- (b) Calculeu la solució del problema complet (EDP + condicions inicials i de contorn).

12 Ex. Final 16-17 Q2 [p5]

- (a) Donada l'EDO $y'' + 2k y' + y = 0$, amb $k \geq 0$ paràmetre, trobeu-ne la solució general $y(t)$ segons els valors de k .
- (b) Considerem ara l'EDP $u_{tt} + 2k u_t - u_{xx} = 0$ ($x \in \mathbb{R}, t > 0$), que correspon a una corda vibrant amb fricció i de longitud infinita, on la fricció ve descrita pel paràmetre $k \geq 0$ (sense fricció si $k = 0$). Si busquem solucions de la forma $u(x, t) = \sin x \cdot T(t)$, dedueu l'EDO que ha de complir $T(t)$.
- (c) Suposem ara que $0 \leq k < 1$. Entre les solucions per a l'EDP proposades a l'apartat (b), trobeu la que satisfà les condicions inicials $u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = \sin x$ ($x \in \mathbb{R}$). [Ind.: Useu l'apartat (a).]

13 Ex. Final 16-17 Q1 [p6]

Considereu el problema següent, que correspon a la distribució de temperatures $u(x, t)$ en una barnilla de longitud $\pi/2$, amb condicions de contorn mixtes, i amb una font de calor externa,

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = \sin 5x, \\ u(x, 0) = 2 \sin 3x + \sin 5x, \\ u(0, t) = u_x(\pi/2, t) = 0, \end{cases} \quad \begin{matrix} 0 < x < \pi/2, \\ t > 0. \end{matrix}$$

- (a) Trobeu una solució particular estacionària $u_0(x)$ de l'EDP (és a dir, una solució que no depengui de t), que també satisfaci les condicions de contorn, i formuleu el problema que ha de satisfer la funció diferència $w(x, t) = u(x, t) - u_0(x)$.
- (b) Trobeu la solució $w(x, t)$ d'aquest nou problema, per separació de variables. [Nota: no cal que resolgueu explícitament el PVF associat.]
- (c) Per al problema original, trobeu la temperatura límit en el punt $x = \pi/2$, quan $t \rightarrow \infty$.

14 *Ex. Final 15-16 Q2 [p3]*

Resoleu el problema de Laplace 2D amb condicions de frontera mixtes, donat per

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & x \in (0, 1), \quad y \in (0, 1), \\ u(x, 0) = 0, & x \in (0, 1), \\ u(x, 1) = 2 - 3 \cos(\pi x), & x \in (0, 1), \\ u_x(0, y) = 0, & y \in (0, 1), \\ u_x(1, y) = 0, & y \in (0, 1). \end{cases}$$

[Nota: no cal que resolgueu amb detall el PVF que obtingueu.]

15 *Ex. Final 15-16 Q1 [p3]*

Considereu el següent problema amb condicions mixtes a la frontera,

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = -\cos x, & x \in (0, \pi), \quad t > 0, \\ u(x, 0) = \sin(x/2) - \cos x, & x \in (0, \pi), \\ u(0, t) = -1, & t > 0, \\ u_x(\pi, t) = 0, & t > 0, \end{cases}$$

- (a) Trobeu una funció $v(x)$ de manera que el canvi $w(x, t) = u(x, t) - v(x)$ transformi el problema original en el problema següent,

$$\begin{cases} w_t - w_{xx} = 0, & x \in (0, \pi), \quad t > 0, \\ w(x, 0) = \sin(x/2), & x \in (0, \pi), \\ w(0, t) = 0, & t > 0, \\ w_x(\pi, t) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

- (b) Resoleu el problema de l'apartat (a). [Nota: no cal que resolgueu amb detall el PVF que obtingueu.]
- (c) Desfent el canvi proposat a l'apartat (a), trobeu solució $u(x, t)$ del problema original. Quin és el valor de $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(x, t)$?

16 *Ex. Final 14-15 Q2 [p3]*

Considereu l'equació de la calor amb condicions de contorn mixtes,

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & x \in (0, \pi), \quad t > 0, \\ u(x, 0) = 1 + \sin x + \cos^3(x/2), & x \in (0, \pi), \\ u_x(0, t) = e^{-t}, & t > 0, \\ u(\pi, t) = 1, & t > 0. \end{cases}$$

- (a) Busqueu una solució particular de la forma $v(x, t) = A + B e^{-t} \sin x$ del problema

$$\begin{cases} v_t - v_{xx} = 0, & x \in (0, \pi), \quad t > 0, \\ v_x(0, t) = e^{-t}, & t > 0, \\ v(\pi, t) = 1, & t > 0. \end{cases}$$

- (b) Calculeu els valors propis i funcions pròpies del PVF $X''(x) - \lambda X(x) = 0$, $X'(0) = 0$, $X(\pi) = 0$.

(c) Resoleu

$$\begin{cases} w_t - w_{xx} = 0, & x \in (0, \pi), \quad t > 0, \\ w(x, 0) = \cos^3(x/2), & x \in (0, \pi), \\ w_x(0, t) = 0, & t > 0, \\ w(\pi, t) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

[Ind.: recordeu que $\cos^3 \theta = \frac{3}{4} \cos \theta + \frac{1}{4} \cos 3\theta$.]

(d) A partir dels resultats obtinguts als apartats anteriors, trobeu la solució del problema original.

17 *Ex. Final 14-15 Q1 [p3]*

Es pinça pel seu punt mig una corda de guitarra de longitud L i es deixa anar. Per l'efecte del pinçament la corda descriu inicialment un triangle isòsceles d'altura $h \ll L$. Es tracta de trobar la forma de la corda a l'instant t .

- (a) Escriviu l'equació corresponent (suposeu que la velocitat de propagació de les ones és una constant c coneguda), amb les condicions inicials i de contorn adjacents.
- (b) Resoleu el problema plantejat per separació de variables.
- (c) Observeu periodicitat en el temps de la solució? Quines són totes les freqüències dels modes normals de la corda?

18 *Ex. Final 13-14 Q2 [p3]*

- (a) Resoleu el següent problema de valors inicials per a l'equació de la corda vibrant amb una corda de longitud infinita,

$$u_{tt} - u_{xx} = 0, \quad u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = \sin(3x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0$$

- (b) Resoleu el següent problema de valors inicials amb condicions de frontera de tipus Dirichlet homogeni per a l'equació de la corda vibrant amb una corda de longitud 2π ,

$$u_{tt} - u_{xx} = 0, \quad u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = \sin(3x), \quad u(0, t) = u(2\pi, t) = 0, \quad x \in [0, 2\pi], \quad t \geq 0.$$

[Nota: no cal que resolgueu amb detall el problema de valors a la frontera que s'obté en fer separació de variables.]

- (c) Sigui $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dues funcions senars i periòdiques de període $L > 0$. Considereu el següent problema de valors inicials per a l'equació de la corda vibrant amb una corda de longitud infinita,

$$u_{tt} - u_{xx} = 0, \quad u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0.$$

Resoleu-lo per D'Alembert en termes de f i g i proveu que la solució compleix:

$$u(0, t) = u(L, t) = 0 \quad \forall t \geq 0.$$

Què ens permet concloure aquest resultat en relació als apartats (a) i (b)? [Justifiqueu la resposta.]

19 *Ex. Final 13-14 Q1 [p1(c)]*

Sigui $u(x, t)$ una solució del problema

$$\begin{cases} u_t - k^2 u_{xx} = 0, & 0 < x < L, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = f(x), & 0 < x < L, \\ u(0, t) = u(L, t) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

Proveu que $E(t) = \int_0^L u(x, t)^2 dx$ no és mai creixent.

20 Ex. Final 13-14 Q1 [p3]

- (a) Considerem el problema amb valors a la frontera (PVF)

$$y'' = \lambda y, \quad y(0) = 0, \quad y'(\pi/2) = 0.$$

Deduiu amb detall els valors $\lambda < 0$ per als quals aquest problema admet solució no trivial, i les solucions no trivials corresponents.

- (b) Resoleu el problema següent, per a l'equació de la calor amb condicions de frontera mixtes,

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = \sin x, & x \in (0, \pi/2), \quad t > 0, \\ u(x, 0) = 0, & x \in (0, \pi/2), \\ u(0, t) = u_x(\pi/2, t) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

[Ind.: comenceu trobant una solució $z(x)$ de l'EDP no homogènia, i a continuació considereu (i resoleu) el problema que satisfà la funció $v(x, t) = u(x, t) - z(x)$.]

21 Ex. Final 13-14 Q1 [teo]

Considerem el problema següent per a la corda vibrant infinita,

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \quad u(x, 0) = f(x), \quad x, t \in \mathbb{R}.$$

Quines condicions inicials falten per determinar la solució $u(x, t)$ del problema? I quan tinguem aquestes condicions, quin mètode (fórmula) aplicariem per calcular la solució? Descriviu-lo explícitament.

22 Ex. Final 12-13 Q2 [p3]

Considerem el problema següent, de calor 1D amb condicions de contorn periòdiques,

$$\begin{cases} u_t - k^2 u_{xx} = 0, & x \in (-\pi, \pi), \quad t > 0, \\ u(x, 0) = f(x), & x \in (-\pi, \pi), \\ u(-\pi, t) = u(\pi, t) = 0, & t > 0, \\ u_x(-\pi, t) = u_x(\pi, t) = 0, & t > 0, \end{cases}$$

- (a) Donada una solució
- $u(x, t)$
- del problema, calculeu la derivada de la funció
- $T(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(x, t) dx$
- .

Interpreteu físicament la funció $T(t)$ i el resultat obtingut.

- (b) Calculeu explícitament la solució
- $u(x, t)$
- del problema, quan la temperatura inicial és
- $f(x) = 1 + x$
- . A continuació, calculeu
- $\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t)$
- . Què podem dir de la temperatura al punt mig
- $x = 0$
- ?

[Nota: no és necessari resoldre explícitament el PVF resultant; n'hi ha prou amb dir quins són els seus valors propis i les seves funcions pròpies.]

23 Ex. Final 12-13 Q2 [teo]

Considerem el problema següent per a la corda vibrant infinita, on la posició inicial $f(x)$ i la velocitat inicial $g(x)$ vénen definides a trossos,

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) = f(x), & x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x, 0) = g(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad f(x) = g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } -1 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{en cas contrari.} \end{cases}$$

Calculeu la solució $u(x, t)$ quan el punt (x, t) pertany al triangle de vèrtexs $(-1, 0)$, $(1, 0)$ i $(0, 1)$. [Ind.: podeu usar la fórmula de D'Alembert.]

24 *Ex. Final 12-13 Q1 [p3]*

Considerem el problema per a l'equació d'ones 1D donat per

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 6x + 49 \sin 7x, & x \in (0, \pi), \quad t \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) = \pi^2 x - x^3, & x \in (0, \pi), \\ u_t(x, 0) = 0, & x \in (0, \pi), \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, & t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

- (a) Aquest problema modelitza la vibració d'una corda. De quina longitud? Interpreteu físicament les dues condicions inicials del problema. Interpreteu físicament les dues condicions de tipus Dirichlet del problema.
- (b) Calculeu l'únic equilibri elàstic (és a dir, solució de la forma $u(x, t) = v(x)$) del problema

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 6x + 49 \sin 7x, & x \in (0, \pi), \quad t \in \mathbb{R}, \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, & t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

- (c) Proveu que el canvi $w(x, t) = u(x, t) - v(x)$ transforma el problema original en un problema de la forma

$$\begin{cases} w_{tt} - w_{xx} = 0, & x \in (0, \pi), \quad t \in \mathbb{R}, \\ w(x, 0) = f(x), & x \in (0, \pi), \\ w_t(x, 0) = 0, & x \in (0, \pi), \\ w(0, t) = w(\pi, t) = 0, & t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

- (d) Calculeu la solució $w(x, t)$ del problema transformat. [Nota: no és necessari resoldre explícitament el PVF resultant; n'hi ha prou amb dir quins són els seus valors propis i les seves funcions pròpies.]
- (e) Calculeu la solució $u(x, t)$ del problema original. Aquesta solució és periòdica en t , de quin període?

25 *Ex. Final 12-13 Q1 [teo]*

Considerem el problema següent per a la corda vibrant infinita,

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x, t), & x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) = f(x), & x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x, 0) = g(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

i el resollem aplicant la fórmula de D'Alembert,

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(f(x+ct) + f(x-ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(y) dy + \frac{1}{2c} \int_0^t \int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} F(y, s) dy ds.$$

A quins punts i instants hem de conèixer la força externa per poder calcular el desplaçament del punt x a l'instant t ?

26 *Ex. Final 11-12 Q2 [p3]*

Considerem el problema de calor 1D no homogeni amb condicions de contorn de tipus Neumann constants,

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 9 \sin(3x) & x \in (0, \pi) \quad t > 0 \\ u(x, 0) = 3 \sin x & x \in (0, \pi) \\ u_x(0, t) = 3 & t > 0 \\ u_x(\pi, t) = -3 & t > 0 \end{cases}$$

- (a) Sigui $T(t)$ la mitjana de la temperatura a l'instant t . Doneu una fórmula explícita per a la funció $T(t)$. Es conserva la mitjana de la temperatura? [Justifiqueu la resposta.]
- (b) Calculeu els infinits equilibris tèrmics $v(x)$ del problema següent

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 9 \sin(3x) & x \in (0, \pi) \quad t > 0 \\ u_x(0, t) = 3 & t > 0 \\ u_x(\pi, t) = -3 & t > 0 \end{cases}$$

- (c) Sigui $v(x)$ un dels anteriors equilibris tèrmics. Proveu que el canvi $w(x, t) = u(x, t) - v(x)$ transforma el problema original en un problema de la forma

$$\begin{cases} w_t - w_{xx} = 0 & x \in (0, \pi) \quad t > 0 \\ w(x, 0) = g(x) & x \in (0, \pi) \\ w_x(0, t) = 0 & t > 0 \\ w_x(\pi, t) = 0 & t > 0 \end{cases}$$

- (d) Calculeu la solució $w(x, t)$ del problema transformat. [Ind.: No és necessari resoldre explícitament el PVF resultant; n'hi ha prou amb dir quins són els seus valors propis i les seves funcions pròpies. D'altra banda, recordeu la identitat trigonomètrica $2 \sin(\alpha x) \cos(\beta x) = \sin((\alpha + \beta)x) + \sin((\alpha - \beta)x)$.]
- (e) Calculeu $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(x, t)$, essent $u(x, t)$ la solució del problema original.

27 *Ex. Final 11-12 Q2 [teo]*

Donada l'EDP $u_{tt} + ku_t - c^2 u_{xx} = 0$, escriviu les dues EDOs que s'obtenen en imposar que una funció $u(x, t) = X(x)T(t)$ en sigui solució.

28 *Ex. Final 11-12 Q2 [teo]*

Sigui $u(x, t)$ la solució del PVI de la corda vibrant infinita amb fricció,

$$\begin{cases} u_{tt} + ku_t - c^2 u_{xx} = F(x, t) & x \in \mathbb{R} \quad t \in \mathbb{R} \\ u(x, 0) = f(x) & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x, 0) = g(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Calculeu l'acceleració inicial $u_{tt}(x, 0)$ en funció de les dades del problema. [Nota: La fórmula de D'Alembert no juga cap paper en aquesta pregunta.]

29 *Ex. Final 11-12 Q1 [p3]*

Considerem el PVI de calor 1D amb condicions de contorn de tipus Neumann constants

$$\begin{cases} u_t = k^2 u_{xx} & x \in (0, L) \quad t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) & x \in (0, L) \\ u_x(0, t) = \alpha & t > 0 \\ u_x(L, t) = \beta & t > 0 \end{cases}$$

on $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ és la temperatura inicial, $\alpha \in \mathbb{R}$ és el flux de calor que surt per l'extrem esquerre i $\beta \in \mathbb{R}$ és el flux de calor que entra per l'extrem dret.

- (a) Donada una solució $u(x, t)$ del PVI, calculeu la derivada de la funció $T(t) = \frac{1}{L} \int_0^L u(x, t) dx$.

Interpreteu físicament la funció $T(t)$ i el resultat obtingut.

- (b) Calculeu els equilibris tèrmics (és a dir, solucions de la forma $u(x, t) = v(x)$) del problema no homogeni

$$\begin{cases} u_t = k^2 u_{xx} & x \in (0, L) \quad t > 0 \\ u_x(0, t) = \alpha & t > 0 \\ u_x(L, t) = \beta & t > 0. \end{cases}$$

Comproveu que hi ha infinits equilibris tèrmics quan $\beta = \alpha$, pero no n'hi ha cap quan $\beta \neq \alpha$.

- (c) Calculeu els modes normals (és a dir, solucions de la forma $u(x, t) = X(x)T(t)$) del problema homogeni

$$\begin{cases} u_t = k^2 u_{xx} & x \in (0, L) \quad t > 0 \\ u_x(0, t) = 0 & t > 0 \\ u_x(L, t) = 0 & t > 0. \end{cases}$$

[Ind.: Podeu usar que el PVF resultant no té funcions pròpies hiperbòliques (també anomenades exponencials).]

(d) Calculeu la solució del PVI quan $f(x) = x$, $k = 1$, $L = \pi$ i $\alpha = \beta = 0$.

$$[Ind.: \int x \cos(ax) dx = \frac{\cos(ax)}{a^2} + \frac{x \sin(ax)}{a}, \quad \int x \sin(ax) dx = \frac{\sin(ax)}{a^2} - \frac{x \cos(ax)}{a}.]$$

30 *Ex. Final 11-12 Q1 [teo]*

Sigui Ω un domini 3D, és a dir, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$.

- (a) Escriviu l'equació d'ones, l'equació de la calor i l'equació de Laplace associades a Ω .
- (b) Quina relació hi ha entre els equilibris elàstics de l'equació d'ones (o els equilibris tèrmics de l'equació de la calor) i l'equació de Laplace?