

# EDOs: problemes d'examen

## Equacions Diferencials

<https://mat-web.upc.edu/etseib/ed/>

Grau en Enginyeria en Tecnologies Industrials (GETI)

ETSEIB – UPC

## Equip docent d'Equacions Diferencials

Departament de Matemàtiques

ETS d'Enginyeria Industrial de Barcelona (ETSEIB)

Universitat Politècnica de Catalunya (UPC)

### **1** *Ex. Final 23-24 Q2 [p1]*

Considerem el sistema d'EDOs  $x' = y^2 - 2xy$ ,  $y' = 8x^2 - 4xy$ .

- (a) Trobeu tots els seus punts d'equilibri.
- (b) Determineu, si és possible, l'estabilitat de cada punt d'equilibri pel mètode de linealització.
- (c) Trobeu el valor de  $k$  per tal que  $V(x, y) = kx^2 + y^2$  sigui una quantitat conservada. Quina és l'estabilitat del  $(0, 0)$  com a punt d'equilibri?
- (d) Sigui  $(x(t), y(t))$  la solució que compleix  $(x(0), y(0)) = (\sqrt{2}, 0)$ . Quin és el límit d'aquesta solució quan  $t \rightarrow +\infty$ ? I quan  $t \rightarrow -\infty$ ?
- (e) Què podem dir de l'estabilitat dels punts d'equilibri trobats a l'apartat (a), en els casos en què l'apartat (b) no decideix? [*Ind.*: un dibuix del retrat de fase us pot ajudar.]

### **2** *Ex. Final 23-24 Q1 [p1]*

Considereu, al pla de coordenades  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ , el sistema lineal  $X' = AX$  de matriu  $A = \begin{pmatrix} 2\mu & \mu + 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ , on  $\mu \in \mathbb{R}$  és un paràmetre.

- (a) Classifiqueu el sistema en funció del paràmetre  $\mu$ .

Als apartats (b, c, d), denotem  $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$  la solució que compleix la condició inicial  $X(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

- (b) Trobeu tots els valors de  $\mu$  per als quals  $X(t)$  tendeix a l'origen quan  $t \rightarrow -\infty$ .
- (c) Trobeu tots els valors de  $\mu$  per als quals  $X(t)$  tendeix a l'origen quan  $t \rightarrow +\infty$ .
- (d) En el cas  $\mu = -1$ , quin és el límit de  $X(t)$  quan  $t \rightarrow +\infty$ ?

[*Ind.*: Un dibuix del retrat de fase us pot ser útil; no cal que trobeu la solució explícitament.]

A l'apartat (e), denotem  $\tilde{X}(t) = \begin{pmatrix} \tilde{x}(t) \\ \tilde{y}(t) \end{pmatrix}$  la solució que compleix la condició inicial  $\tilde{X}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

- (e) En el cas  $\mu = 2$ , la solució  $\tilde{X}(t)$  talla l'eix  $y$ ? [Justifiqueu la resposta.]

[*Ind.*: un dibuix del retrat de fase us pot ser útil; no cal que trobeu la solució explícitament.]

### **3** *Ex. Final 22-23 Q2 [p1]*

Considereu el següent sistema no lineal al pla, depenent d'un paràmetre  $\mu \in \mathbb{R}$ ,

$$x' = \mu x - 2xy, \quad y' = -2y + x^2.$$

- (a) Determineu quants punts d'equilibri té aquest sistema en funció de  $\mu$ , i trobeu-los.

- (b) Supposeu  $\mu \neq 0$ . Per a cada punt d'equilibri trobat a l'apartat (a), classifiqueu el sistema linealitzat en funció del paràmetre  $\mu$  i, si és possible, determineu la seva estabilitat en el sistema no lineal pel mètode de linealització.
- (c) Considereu ara el cas  $\mu = 0$ . Estudieu l'estabilitat dels punts d'equilibri, aplicant si és possible el mètode de linealització o, en cas contrari, usant alguna funció de Lyapunov de la forma  $V(x, y) = \alpha x^2 + y^2$ .
- (d) Determineu, en funció de  $\mu \in \mathbb{R}$ , la regió del pla on el sistema contrau àrees.

**4 Ex. Final 21-22 Q2 [p1]**

Considereu el sistema autònom  $x' = -2x + x^2 + y^2$ ,  $y' = y^2 - x^2$ .

- (a) Trobeu les zones del pla on el sistema expandeix o contrau àrees.
- (b) Trobeu tots els punts d'equilibri del sistema.
- (c) Estudieu, on sigui possible, l'estabilitat de cada punt d'equilibri pel mètode de linealització.
- (d) On la linealització no decideixi l'estabilitat, raoneu si l'apartat (a) permet deduir alguna informació sobre l'estabilitat del punt d'equilibri: Pot ser atractiu? Pot ser repulsiu? Pot ser un centre no lineal?  
[Nota: No useu el mètode de Lyapunov.]

**5 Ex. Final 21-22 Q1 [p1]**

Considerem el sistema autònom

$$x' = f(x, y) = -8x^2y + 16y^3, \quad y' = g(x, y) = -4x - 4x^3 + 8xy^2,$$

donat pel camp vectorial  $\vec{F} = (f, g)$ , i que té l'origen com a punt d'equilibri.

- (a) Definim un altre camp vectorial  $\vec{G} = (P, Q) = (-g, f)$ . Aquest camp  $\vec{G}$  és conservatiu, és a dir, prové d'un potencial escalar: una funció  $V(x, y)$  tal que  $\frac{\partial V}{\partial x} = P$ ,  $\frac{\partial V}{\partial y} = Q$ . Trobeu aquesta funció  $V(x, y)$  escollint-la de manera que  $V(0, 0) = 0$ .
- (b) Estudieu si  $V(x, y)$  és una quantitat conservada del sistema original, donat pel camp vectorial  $\vec{F}$ .
- (c) Proveu que  $V(x, y)$  és definida positiva i, usant-la com a funció de Lyapunov, determineu l'estabilitat de l'origen (tenint en compte l'apartat (b)).

**6 Ex. Parcial 20-21 Q2 [p1]**

Considerem l'EDO de segon ordre  $x'' = f(x)$ , que descriu el moviment sobre la recta  $\mathbb{R}$  d'una partícula (de massa 1), sobre la qual actua una força  $f(x) = x(x - 2)$ .

- (a) Reescriu l'EDO com un sistema d'EDOs de primer ordre, prenent  $y = x'$  com a segona funció incògnita. Trobeu tots els punts d'equilibri d'aquest sistema.
- (b) Trobeu una funció  $U(x)$  tal que  $E(x, y) = \frac{y^2}{2} + U(x)$  sigui una quantitat conservada del sistema.
- (c) Estudieu l'estabilitat dels punts d'equilibri del sistema.
- (d) Supposem que la partícula parteix del repòs imposant, a l'EDO de segon ordre original, condicions inicials de la forma  $x(0) = x_0$ ,  $x'(0) = 0$ . Trobeu els valors de  $x_0$  (que no siguin punts d'equilibri) per als quals la solució tendeix a un punt d'equilibri quan  $t \rightarrow +\infty$ . [Nota: No és necessari conèixer la solució del sistema.]

**7 Ex. Final 20-21 Q2 [p1]**

Considereu el sistema d'EDOs següent:  $x' = -y + xy$ ,  $y' = x + \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$ .

- (a) Trobeu-ne tots els punts d'equilibri.
- (b) Per a cada punt d'equilibri, determineu-ne l'estabilitat, si és possible, usant el mètode de linealització.
- (c) Determineu l'estabilitat dels altres punts d'equilibri, considerant una funció de Lyapunov de la forma  $V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + ax^3 + bxy^2$ , amb  $a$  i  $b$  adequats.

**8 Ex. Final 19-20 Q1 [p1]**

Determineu, en funció del paràmetre  $\mu \in \mathbb{R}$ , l'estabilitat de l'origen com a punt d'equilibri del sistema

$$x' = \mu x - 6y - x^3 - 2xy^2, \quad y' = 4x + \mu y - 3y^3 + x^2y.$$

[Ind.: Useu el mètode de linealització i, quan sigui necessari, el mètode de Lyapunov amb una funció del tipus  $V(x, y) = ax^2 + by^2$  buscant valors adequats de  $a, b > 0$ .]

**9 Ex. Final 18-19 Q2 [p2]**

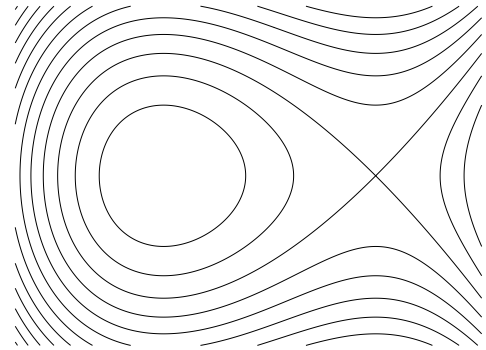
Considerem el sistema d'EDOs  $x' = \frac{\partial H}{\partial y}$ ,  $y' = -\frac{\partial H}{\partial x}$ , definit per una funció donada  $H(x, y)$ .

- (a) Estudieu si  $H(x, y)$  pot ser una quantitat conservada del sistema.

Per als apartats següents, considereu la funció

$$H(x, y) = \frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}.$$

Podeu veure a la figura les corbes de nivell d'aquesta funció.



- (b) Calculeu tots els punts d'equilibri del sistema i determineu-ne l'estabilitat.
- (c) Si imposem una condició inicial de la forma  $(x(0), y(0)) = (x_0, 0)$ , per a quins valors de  $x_0$  la solució  $(x(t), y(t))$  és periòdica? Mateixa pregunta, per a una condició inicial de la forma  $(x(0), y(0)) = (0, y_0)$ . Quin és el sentit de gir d'aquestes solucions?
- (d) Ara imposem la condició inicial  $(x(0), y(0)) = (1/2, -1/\sqrt{6})$ . Existeix algun  $t^* > 0$  tal que  $y(t^*) = 0$ ? En cas afirmatiu, trobeu el valor de  $x(t^*)$ . Quin és, si existeix, el límit de  $x(t)$  quan  $t \rightarrow -\infty$  i quan  $t \rightarrow \infty$ ?

**10 Ex. Final 18-19 Q1 [p1]**

Considereu el sistema  $x' = -2x + 2y$ ,  $y' = 2x + y$ .

- (a) Classifiqueu-lo.
- (b) Doneu la solució general.
- (c) Calculeu la solució amb les condicions inicials  $x(0) = y(0) = 5$ .
- (d) Si les condicions inicials són  $x(0) = 5$ ,  $y(0) = a$ , trobeu els valors de  $a$ , si existeixen, per al quals la solució tendeix a l'origen quan  $t \rightarrow \infty$ .

**11 Ex. Final 18-19 Q1 [p2]**

Considerem l'EDO autònoma de primer ordre  $x' = x^3 - 3x^2 + a$ , on  $a \in \mathbb{R}$  és un paràmetre.

- (a) Si  $a = 0$ , tenim dos punts d'equilibri. Trobeu-los i determineu la seva estabilitat, i dibuixeu el retrat de fase de l'EDO.

- (b) Si  $a = 4$ , tenim dos punts d'equilibri. Trobeu-los i determineu la seva estabilitat, i dibuixeu el retrat de fase de l'EDO.
- (c) Si  $a \neq 0, 4$ , trobeu el nombre de punts d'equilibri de l'EDO i digueu a quins dels intervals  $I_1 = (-\infty, 0)$ ,  $I_2 = (0, 2)$ ,  $I_3 = (2, \infty)$  es troben situats. En funció de  $a$ , determineu l'estabilitat d'aquests punts d'equilibri i dibuixeu el retrat de fase de l'EDO. [Nota: No intenteu trobar els punts d'equilibri; anomeneu-los  $z_1, z_2, \dots$  i localitzeu-los.]

**12** *Ex. Final 18-19 Q1 [p3]*

Considereu el sistema  $x' = 2xy$ ,  $y' = 1 - x^2 - y^2$ .

- (a) Trobeu els seus quatre punts d'equilibri.
- (b) Classifiqueu el sistema linealitzat en cadascun dels punts d'equilibri.
- (c) Si algun dels sistemes linealitzats de (b) és un centre, indiqueu-ne el sentit de gir i el període.
- (d) Si algun dels sistemes linealitzats de (b) és una sella, indiqueu-ne les direccions d'entrada i sortida.
- (e) Existeix un valor de  $\alpha$  per al qual  $V(x, y) = x^3 + 3xy^2 + \alpha x$  sigui una quantitat conservada del sistema inicial?
- (f) Estudieu l'estabilitat dels quatre punts d'equilibri del sistema inicial usant, si és necessari, l'apartat (e).

**13** *Ex. Final 17-18 Q2 [p1]*

- (a) Donada l'EDO de segon ordre  $x'' + 3\alpha x' + 2x = 0$ , escriviu-la com un sistema de primer ordre i classifiqueu aquest en funció del paràmetre  $\alpha \in \mathbb{R}$ .
- (b) Suposant ara que  $\alpha = 1$ , resolcu l'EDO de (a) amb les condicions inicials  $x(0) = 0$ ,  $x'(0) = 1$ .
- (c) També en el cas  $\alpha = 1$ , representeu, en el pla  $(x, x')$ , el retrat de fase del sistema de primer ordre. Ressalteu clarament (per exemple amb un traç més fort) l'òrbita recorreguda per la solució trobada a l'apartat (b), tot indicant quins quadrants visita i en quin ordre.

**14** *Ex. Final 17-18 Q2 [p2]*

Considereu el sistema  $x' = -y(x + 1)$ ,  $y' = x(y + 2)$ .

- (a) Trobeu tots els seus punts d'equilibri.
- (b) Per a cada punt d'equilibri, calculeu el sistema linealitzat i classifiqueu-lo.
- (c) Si algun dels sistemes linealitzats de (b) és un centre, indiqueu-ne el sentit del gir i el període.
- (d) Existeix un valor de  $\alpha$  per al qual  $V(x, y) = x + y - \ln(x + 1) - \alpha \ln(y + 2)$  sigui una quantitat conservada?
- (e) Estudieu l'estabilitat dels punts d'equilibri del sistema inicial usant, si és necessari, l'apartat (d).

**15** *Ex. Final 17-18 Q1 [p1]*

Considerem el següent sistema d'EDOs, depenent d'un paràmetre  $\mu > 0$ ,

$$x' = -\mu y, \quad y' = (\mu - 1)x + \sqrt{8}y$$

Classifiqueu el sistema, i determineu l'estabilitat de l'origen (estable, inestable, atractor, repulsor) segons els valors de  $\mu$ .

**16** *Ex. Final 17-18 Q1 [p2]*

Considereu la següent EDO lineal de segon ordre no homogènia:  $x'' + 3x' + 2x = \frac{1}{1 + e^t}$ .

- (a) Escriviu l'EDO lineal homogènia associada i trobeu-ne un conjunt fonamental de solucions  $\{x_1(t), x_2(t)\}$ , i la solució general.
- (b) Trobeu la solució general de l'EDO lineal no homogènia original.  
[Ind.: Les integrals que cal calcular són immediates, si bé el canvi  $s = e^t$  us pot ajudar.]

**17** *Ex. Final 17-18 Q1 [p4]*

- (a) Donada l'EDO  $x' = 2x(3 - x)$ , trobeu-ne els punts d'equilibri i determineu la seva estabilitat (estable, inestable, atractor, repulsor).

Ara considereu el següent sistema no lineal 2D, 
$$\begin{cases} x' = x(3 - x^2 - y^2), \\ y' = y(3 - x^2 - y^2). \end{cases}$$

- (b) Trobeu tots els punts d'equilibri del sistema.
- (c) Determineu, si és possible, l'estabilitat del  $(0,0)$  com a punt d'equilibri, usant el mètode de linealització.
- (d) Determineu si la funció  $G(x, y) = \frac{y}{x}$  és una integral primera (o quantitat conservada) del sistema, és a dir, si és constant sobre qualsevol solució  $(x(t), y(t))$ .
- (e) Donada qualsevol solució  $(x(t), y(t))$  del sistema, definim la funció  $u(t) = x(t)^2 + y(t)^2$ . Proveu que  $u(t)$  és sempre solució d'una EDO de la forma  $u' = h(u)$ , i trobeu la funció  $h(u)$ .
- (f) Usant els apartats anteriors, determineu l'estabilitat dels punts d'equilibri  $(x_0, y_0) \neq (0,0)$  del sistema.

**18** *Ex. Final 16-17 Q2 [p1]*

Resoleu els apartats següents per a cadascun dels sistemes d'EDOs:

$$\begin{cases} x' = 2x - y + xy, \\ y' = x - 2y + xy, \end{cases} \quad \begin{cases} x' = -y + xy - x^3 + x^4, \\ y' = x - x^2 - y^3. \end{cases}$$

- (a) Escriviu el sistema linealitzat entorn del  $(0,0)$  i calculeu-ne els valors propis.
- (b) Digueu si aquest sistema linealitzat pertany a algun d'aquests quatre grups: sella, node, focus, centre.
- (c) Estudieu l'estabilitat del sistema linealitzat (estable, inestable, atractor, repulsor).
- (d) A partir dels valors propis del sistema linealitzat dedueix, si és possible, si el  $(0,0)$  és estable, inestable, atractor o repulsor per al sistema no lineal.
- (e) Quan no sigui possible la deducció que es demana al punt (d), estudieu l'estabilitat del  $(0,0)$  pel sistema no lineal usant  $V(x, y) = (x^2 + y^2)/2$  com a funció de Lyapunov.

**19** *Ex. Final 16-17 Q2 [p2]*

Resoleu el PVI següent,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1-a & 1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ b \end{pmatrix},$$

on  $a, b \in \mathbb{R}$  són paràmetres. Estudieu, en funció de  $a$  i  $b$ , si la solució trobada tendeix a l'origen quan  $t \rightarrow +\infty$ .  
[Ind.: Els valors propis de la matriu poden dependre de  $a$ , però els vectors propis no en depenen.]

**20** *Ex. Final 16-17 Q2 [p3]*

- (a) Donada l'EDO  $x' = b - x^2$ , on  $b \in \mathbb{R}$  és un paràmetre, trobeu tots els seus punts d'equilibri i estudieu la seva estabilitat en funció del paràmetre  $b$  (si són estables o inestables i, eventualment, atractors o repulsors).

- (b) Considerant ara el sistema  $x' = y - x^2$ ,  $y' = 0$ , trobeu tots els seus punts d'equilibri, feu un croquis del retrat de fase del sistema i, a partir d'aquest, estudeu l'estabilitat dels punts d'equilibri (si són estables o inestables i, eventualment, atractors o repulsors). [Ind.: trobeu rectes invariants i useu l'apartat (a).]

**21** *Ex. Final 16-17 Q2 [p6]*

Volem estudiar l'estabilitat de l'origen com a punt d'equilibri del sistema  $x' = xy - y^2$ ,  $y' = kx^2 + mxy$ , on  $k, m \in \mathbb{R}$  són paràmetres, aplicant el mètode de Lyapunov amb una funció  $V(x, y) = ax^2 + y^2$ . Com han de ser  $k$  i  $m$ , i com hem escollir  $a$  en funció de  $k$  i  $m$ , perquè el mètode ens permeti decidir l'estabilitat de l'origen? En aquest cas, quin tipus d'estabilitat obtenim?

**22** *Ex. Final 16-17 Q1 [p1]*

Considereu el següent sistema d'EDOs no lineal en el pla, on  $a \in \mathbb{R}$  és un paràmetre:

$$x' = y, \quad y' = -x - 2ay + \frac{x^2}{3},$$

- (a) Trobeu tots els seus punts fixos (d'equilibri) d'aquest sistema, i la matriu del sistema linealitzat en cadascun d'ells.
- (b) Per a tots els punts fixos diferents del  $(0, 0)$ , què podem dir de la seva estabilitat per al sistema no lineal a partir del sistema linealitzat?
- (c) Apliqueu el mètode de les funcions de Lyapunov per estudiar (en funció del paràmetre  $a$ ) l'estabilitat del  $(0, 0)$  per al sistema no lineal, usant la funció definida positiva  $V(x, y) = \left(\frac{1}{2} + a^2\right)x^2 + \frac{y^2}{2} + axy - \frac{x^3}{9}$ .  
[Nota: no cal que comproveu que  $V$  és definida positiva.]
- (d) Per a quin valor de  $a$  la funció  $V(x, y)$  és una quantitat conservada (integral primera) del sistema no lineal? En aquest cas, què podem concloure en relació al  $(0, 0)$ ?

**23** *Ex. Final 16-17 Q1 [p2]*

Considereu l'EDO  $x' = x^4 - 4x^3 + 3x^2$ .

- (a) Trobeu tots els seus punts d'equilibri i estudeu la seva estabilitat, decidint si són estables o inestables i, eventualment, atractors o repulsors.
- (b) Si  $x(t)$  és una solució que compleix  $x(0) = x_0$ , i suposem que  $0 < x_0 < 1$ , quin ha de ser el valor de  $x_0$  per tal que  $x(t)$  tingui  $t = 0$  com a punt d'inflexió? [Ind.: estudeu el signe de  $x''(t)$ .]

**24** *Ex. Final 16-17 Q1 [p3]*

Trobeu la solució general del sistema  $X' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 6 & -3 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 2e^{-t} \end{pmatrix}$ .

**25** *Ex. Final 16-17 Q1 [p4]*

Considereu el següent sistema lineal al pla,  $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 2\alpha - 3 \\ 3 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ , on  $\alpha \in \mathbb{R}$  és un paràmetre.

- (a) Estudeu la seva estabilitat i classifiqueu-lo en funció de  $\alpha$ .
- (b) En el cas  $\alpha = 0$ , podem assegurar que hi ha òrbites periòdiques? En cas afirmatiu, determineu el seu període i el seu sentit de gir. [Justifiqueu la resposta.]

**26 Ex. Final 16-17 Q1 [p5]**

- (a) Donada l'EDO de segon ordre  $x'' + ax' + bx = 0$ , on  $a, b \in \mathbb{R}$  són paràmetres, determineu la condició sobre  $a$  i  $b$  per tal que existeixi una solució no trivial  $x_1(t)$  tal que  $x_1'(t) = x_1(t)$  per a tot  $t$ .
- (b) Si es compleix la condició de l'apartat (a), quina altra condició han de complir els paràmetres  $a$  i  $b$  perquè existeixi una segona solució no trivial  $x_2(t)$  tal que  $x_2'(t) = kx_2(t)$  per a tot  $t$ , amb algun  $k \neq 1$ ?

**27 Ex. Final 15-16 Q2 [p1]**

Considereu l'equació diferencial  $x'' - 2x' - ax = 0$ , on  $a \in \mathbb{R}$  és un paràmetre.

- (a) Escriviu-la com un sistema lineal de primer ordre, i classifiqueu aquest sistema (tipus i estabilitat) en funció del paràmetre  $a$ .
- (b) Trobeu els valors de  $a$  per als quals la solució de l'equació diferencial que compleix les condicions inicials  $x(0) = 1$ ,  $x'(0) = -1$ , satisfà que  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} x'(t) = 0$ .
- (c) Ara considereu l'equació no homogènia  $x'' - 2x' - 3x = 9t$ . Sabent que té una solució particular que és un polinomi de grau 1, trobeu-ne la solució que compleix les condicions inicials  $x(0) = 1$ ,  $x'(0) = -1$ . [Ind.: podeu escriure l'EDO com un sistema lineal no homogeni.]

**28 Ex. Final 15-16 Q2 [p2]**

Considerem el sistema d'EDOs  $x' = y^2 - xy$ ,  $y' = x^2 - xy$ .

- (a) Trobeu-ne els punts d'equilibri i estudieu la seva estabilitat amb el mètode de linealització.
- (b) Proveu que la funció  $V(x, y) = x^2 + y^2$  és una quantitat conservada per al sistema (és a dir, és constant sobre les trajectòries).
- (c) Representeu el retrat de fase global del sistema. [Ind.: useu (b).]
- (d) Raoneu l'estabilitat dels punts d'equilibri a partir de (c).
- (e) A partir de (c), discutiu si hi ha alguna òrbita periòdica fora dels punts d'equilibri.

**29 Ex. Final 15-16 Q1 [p1]**

Donat un paràmetre  $\alpha > 0$ , considerem el sistema no lineal 2D  $x' = \alpha x(1 - y)$ ,  $y' = x - y$ .

- (a) L'origen és un punt d'equilibri del sistema. Estudieu la seva estabilitat pel mètode de linealització.
- (b) Trobeu l'altre punt d'equilibri del sistema. Estudieu la seva estabilitat pel mètode de linealització i digueu per a quin valor del paràmetre  $\alpha > 0$  el seu sistema linealitzat és un node impropri.
- (c) Ara estudieu l'estabilitat del segon punt d'equilibri pel mètode de Lyapunov, fent servir la funció  $V(x, y) = x - \ln x + b(y - 1)^2 - 1 - b$  amb un valor  $b > 0$  adequat.  
[Nota: aquesta funció  $V(x, y)$  té un mínim local estricte al segon punt d'equilibri per a tot  $b > 0$ , però no es demana provar aquesta afirmació.]  
[Ind.: podeu mirar si hi ha alguna trajectòria continguda a la recta  $y = 1$ .]

**30 Ex. Final 15-16 Q1 [p2(a,b)]**

Considereu l'EDO  $x' = ax(x - a)$ , dependent d'un paràmetre  $a \in \mathbb{R}$ .

- (a) Trobeu-ne els punts d'equilibri i estudieu la seva estabilitat, en funció del paràmetre  $a$ .
- (b) Si  $x(t)$  és la solució donada per  $x(0) = 1$ , per a quins valors de  $a$  es compleix que  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ ?

**31** *Ex. Final 15-16 Q1 [p2(c,d)]*

Considereu el sistema  $x' = b(-2x + y)$ ,  $y' = (1 - b)x$ , dependent d'un paràmetre  $b \in \mathbb{R}$ .

- (c) Classifiqueu aquest sistema lineal, en funció del paràmetre  $b$ .
- (d) Si  $(x(t), y(t))$  és la solució donada per  $(x(0), y(0)) = (1, -1)$ , per a quins valors de  $b$  es compleix que  $\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t), y(t)) = (0, 0)$ ?

**32** *Ex. Final 15-16 Q1 [teo]*

- (a) Donat el sistema d'EDOs  $X' = \vec{F}(X)$  i una funció escalar  $V(X)$ , quina condició ha de complir el seu gradient per tal que  $V$  una quantitat conservada del sistema? (recordeu que una funció és quantitat conservada quan és constant sobre les trajectòries del sistema).
- (b) Donada una funció energia  $H(q, p)$ , definim el sistema d'EDOs associat

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q}.$$

Proveu que la funció  $H(q, p)$  és una quantitat conservada d'aquest sistema d'EDOs.

**33** *Ex. Final 15-16 Q1 [teo]*

Considerem un sistema lineal  $X' = AX$ , sigui  $\vec{v}$  un vector propi de valor propi  $\lambda$  de  $A$ , i  $r = [\vec{v}]$  la recta que passa per l'origen amb direcció  $\vec{v}$ . Proveu que la recta  $r$  és:

- una recta invariant del sistema,
- de sortida si  $\lambda > 0$ ,
- d'entrada si  $\lambda < 0$ ,
- de punts d'equilibri si  $\lambda = 0$ .

**34** *Ex. Final 14-15 Q2 [p1]*

Considereu el sistema no lineal següent, dependent d'un paràmetre  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,

$$x' = \alpha x(1 - y^2) - y(1 - x^2), \quad y' = x(1 - y^2) + \alpha y(1 - x^2),$$

que té com a punts d'equilibri  $(0, 0)$ ,  $(1, 1)$ ,  $(-1, 1)$ ,  $(-1, -1)$  i  $(1, -1)$ . Aquests punts són el centre i els vèrtexs del quadrat  $A = [-1, 1] \times [-1, 1]$ .

- (a) Trobeu els valors de  $\alpha$  per als quals una trajectòria  $(x(t), y(t))$  amb condició inicial  $(x(0), y(0)) \in A$  es mantindrà en el quadrat  $A$  per a tot  $t \geq 0$ . [Ind.: Avalueu el camp vectorial sobre els costats del quadrat.]
- (b) Per als punts d'equilibri  $(0, 0)$  i  $(1, 1)$ , trobeu la matriu del sistema linealitzat i classifiqueu-lo en funció de  $\alpha$ . Què podem deduir de l'estabilitat d'aquests punts d'equilibri en el sistema no lineal?
- (c) Usant com a funció de Lyapunov  $V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 - x^2y^2)$ , completeu l'estudi de l'estabilitat del punt d'equilibri  $(0, 0)$ .

**35** *Ex. Final 14-15 Q2 [p2]*

Considerem el sistema lineal 2D  $X' = AX$  donat per la matriu  $A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ , essent  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

- (a) Sigui  $X(t)$  la solució del PVI  $X' = AX$ ,  $X(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Calculeu  $X(t)$  suposant que  $\beta \neq \alpha$ . Després, calculeu  $\lim_{\beta \rightarrow \alpha} X(t)$  i comproveu que el límit obtingut és la solució del PVI quan  $\beta = \alpha$ .



- (b) Estudieu l'estabilitat del sistema i classifiqueu-lo en funció de  $\alpha$  i  $\beta$ . [Justifiqueu les respostes.]
- (c) Dibuixeu (i justifiqueu) el croquis del sistema en els casos següents:
- \*  $\alpha = -1$  i  $\beta = 0$ .
  - \*  $\alpha = 0$  i  $\beta = 0$ .

**36** *Ex. Final 14-15 Q2 [teo]*

- (a) Enuncieu el teorema d'estabilitat per a sistemes lineals homogenis a coeficients constants i el teorema d'estabilitat per linealització de punts d'equilibri per a sistemes autònoms no lineals.
- (b) Comenteu les principals diferències entre els dos teoremes.
- (c) Indiqueu algun exemple (de valors propis de la matriu corresponent), per a dimensió  $n = 3$ , on es mostri que un teorema decideix l'estabilitat (o inestabilitat) i l'altre no.

**37** *Ex. Final 14-15 Q1 [teo]*

- (a) Donat el PVI  $x' = x^2$ ,  $x(0) = x_0$ , calculeu la solució  $x(t)$  explícitament.
- (b) Representeu-la al pla  $(t, x)$ , distingint els casos:

$$x_0 > 0; \quad x_0 = 0; \quad x_0 < 0.$$

Quin és l'interval de definició de la funció  $x(t)$  en cada cas?

- (c) Representeu el retrat de fase (croquis de les òrbites) de l'equació  $x' = x^2$ .
- (d) Si  $x_0 > 0$  i l'interval de definició de  $x(t)$  és  $(a, b)$ , quant valen  $\lim_{t \rightarrow a} x(t)$  i  $\lim_{t \rightarrow b} x(t)$ ?
- (e) Ídem si  $x_0 = 0$ .
- (f) Ídem si  $x_0 < 0$ .

**38** *Ex. Final 14-15 Q1 [p1]*

Donada una funció  $H(x, y)$  de classe  $C^\infty$ , definida a  $\mathbb{R}^2$ , direm que el sistema diferencial hamiltonià associat a la funció  $H(x, y)$  és

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y}, \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x}.$$

- (a) Donat un sistema diferencial hamiltonià, calculeu la derivada temporal de la funció  $H(x, y)$  i comproveu que és una quantitat conservada (o integral primera) per al sistema.

A partir d'ara prendrem  $H(x, y) = \frac{1}{2} \left( y^2 - x^2 + \frac{x^4}{2} \right)$ .

- (b) Escriviu el sistema diferencial hamiltonià associat.
- (c) Calculeu-ne els punts d'equilibri.
- (d) Estudieu l'estabilitat de cada punt d'equilibri del sistema diferencial no lineal amb el mètode de linealització.
- (e) Justifiqueu que les òrbites es troben sobre les corbes  $y = \pm \sqrt{E - U(x)}$ , concretant qui són  $E$  i  $U(x)$ .
- (f) Representeu el retrat de fase (o croquis de les òrbites) del sistema diferencial, donant també el sentit de recorregut de les òrbites. [Ind.: representeu la funció  $U(x)$ .]

**39** *Ex. Final 14-15 Q1 [p2]*

Considereu el sistema al pla  $X' = AX$ , amb  $A = \begin{pmatrix} \mu^2 & -10 \\ 10 & -4 \end{pmatrix}$ .

- (a) Classifiqueu el sistema, de la manera més detallada possible, en funció del paràmetre  $\mu \in \mathbb{R}$ . Quins són els punts de bifurcació?
- (b) Per a  $\mu = 4\sqrt{3}$ , trobeu les condicions inicials tals que  $X(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ . [Nota:  $\sqrt{2304} = 48$ .]
- (c) Feu el retrat de fase (croquis de les òrbites) en el cas  $\mu = 4$ .
- (d) Per a  $\mu = 2$ , considereu el PVI  $X' = AX$ ,  $X(0) = X_0$ . Expressen la solució en funció d'una base adequada tal que, en aquesta base, les components descriuen una circumferència.
- (e) Per a  $\mu = 2$ , trobeu un canvi de coordenades  $T : (x, y) \mapsto (\bar{x}, \bar{y})$ , on  $(x, y)$  són les coordenades cartesianes i  $(\bar{x}, \bar{y})$  unes noves coordenades, de manera que les òrbites siguin circumferències en les noves coordenades.

**40** *Ex. Final 13-14 Q2 [teo]*

Considerem el sistema 2D de primer ordre autònom en forma normal  $x' = f(x, y)$ ,  $y' = g(x, y)$ , per a algunes funcions  $f, g : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$ .

- (a) Què és el camp de vectors associat a aquest sistema?
- (b) Quina relació existeix entre el camp de vectors les solucions del sistema?
- (c) Quina relació existeix entre les trajectòries del sistema inicial i les del sistema  $x' = 3f(x, y)$ ,  $y' = 3g(x, y)$ ?
- (d) Definiu amb precisió que  $(x_0, y_0)$  és un punt d'equilibri del sistema.
- (e) Definiu amb precisió que  $(x_0, y_0)$  és un punt d'equilibri estable del sistema.

[Nota: pot ser útil incloure alguns dibuixos.]

**41** *Ex. Final 13-14 Q2 [p1]*

Considerem el sistema no lineal  $X' = \vec{F}(X)$  depenent d'un paràmetre  $\mu \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{cases} x' = \mu x - y - x(x^2 + y^2), \\ y' = x + \mu y - y(x^2 + y^2), \end{cases}$$

que té l'origen com a punt d'equilibri.

- (a) Estudieu l'estabilitat del sistema linealitzat al  $(0, 0)$  segons els valors de  $\mu$ . Què podem deduir de l'estabilitat del sistema no lineal?

Sigui  $X' = AX$  el sistema linealitzat al  $(0, 0)$  i considereu  $\mu < 0$ .

- (b) Trobeu  $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$  la solució del PVI  $X' = AX$ ,  $X(0) = X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ .
- (c) Calculeu la distància del punt  $X(t) = (x(t), y(t))$ , solució de l'apartat (b), a l'origen en funció de  $t$  i de la distància de  $X_0 = (x_0, y_0)$  a l'origen. Quant temps  $t_*$  cal esperar per tal que la nostra solució  $X(t)$  estigui a la meitat de la distància inicial?
- (d) En el cas  $\mu = 0$ , què es pot dir de l'estabilitat del  $(0, 0)$  per al sistema no lineal de l'apartat (a) amb el mètode de Lyapunov?

**42** *Ex. Final 13-14 Q2 [p2]*

Considereu el sistema no lineal d'equacions diferencials  $x' = x - 2y - x^2 + 2xy - y^2$ ,  $y' = -y$ .

- (a) Trobeu els seus 2 punts d'equilibri i estudieu la seva estabilitat.
- (b) Feu un croquis del sistema linealitzat per a cadascun dels punts d'equilibri.
- (c) Trobeu els valors de  $a$  per als quals el sistema no lineal té  $y = x + a$  com a recta invariant (és a dir, una solució amb condició inicial sobre la recta es manté sempre sobre la recta).

- (d) Proveu que la recta  $y = 0$  és invariant per al sistema no lineal, i doneu el retrat de fase sobre aquesta recta.
- (e) Feu un croquis aproximat del retrat de fase del sistema no lineal.

**43** *Ex. Final 13-14 Q1 [p1(a)]*

Considereu el sistema  $X' = AX$  amb  $A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & -1 \end{pmatrix}$ , on  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

(a1) Classifiqueu-lo.

(a2) Considereu el problema de Cauchy  $X' = AX$ ,  $X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Existeix algun valor de  $\alpha$  tal que la solució satisfà  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|X(t)\| = 0$ ?

**44** *Ex. Final 13-14 Q1 [p1(b)]*

Estudieu l'estabilitat del  $(0, 0)$  com a punt d'equilibri del sistema

$$x' = -4x + x^3 - 2x^2y, \quad y' = x^2y$$

pel mètode de Lyapunov, prenent la funció  $V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ .

**45** *Ex. Final 13-14 Q1 [p2]*

Considerem el sistema  $x' = 3x^2 - xy$ ,  $y' = 12x^3 - 4x^2y$ .

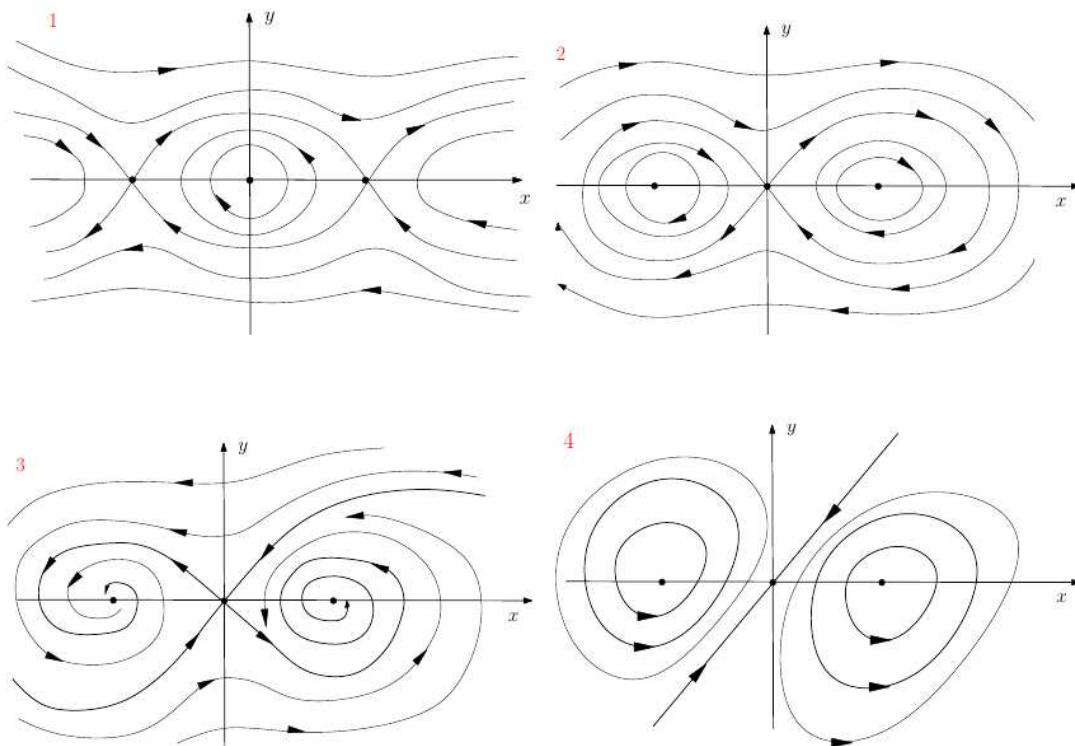
- (a) Trobeu les 2 rectes de punts d'equilibri (o punts crítics).
- (b) Què es pot dir sobre l'estabilitat d'aquests punts d'equilibri usant el mètode de linealització?
- (c) Les òrbites d'aquest sistema són corbes polinomials de grau 2 de la forma  $ay + bx^2 = \text{const.}$  Calculeu-les.  
 [Ind.: trobeu  $a$  i  $b$  tals que si  $(x(t), y(t))$  és una solució, llavors  $\frac{d}{dt}[ay(t) + b(x(t))^2] = 0$ , és a dir que  $C(x, y) = ay + bx^2$  és una quantitat conservada (o integral primera).]
- (d) Usant la informació de l'apartat (c), dibuixeu el retrat de fase del sistema.
- (e) A partir del retrat de fase, discuteix l'estabilitat de tots els punts d'equilibri.

**46** *Ex. Final 13-14 Q1 [teo]*

El moviment 1D d'un punt sotmès a la força  $F(x)$  ve descrit per l'EDO  $x'' = -x(x - c)(x + c)$ , on  $c \in \mathbb{R}$  és una constant. Introduint la velocitat  $y = x'$ , convertim l'EDO en un sistema 2D no lineal,

$$x' = y, \quad y' = -x(x - c)(x + c).$$

Dels quatre retrats de fase indicats a la figura (on els punts negres marquen els punts d'equilibri), només un pot correspondre a aquest sistema. Quin és? [Ind.: Raoneu la resposta exclouint els retrats de fase impossibles o no escaients. Sense fer molts càlculs, compareu la direcció i el comportament de les trajectòries mostrades amb el valor de la velocitat  $(x', y')$  del sistema 2D.]



**47** *Ex. Final 12-13 Q2 [p1]*

Considerem la matriu  $A = \begin{pmatrix} \alpha & -1 & 0 \\ 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ , essent  $\alpha \in \mathbb{R}$ , que té valors propis  $\lambda = -2$  i  $\lambda = \alpha \pm i$  (no cal que proveu aquesta dada).

- Calculeu la solució general real del sistema  $X' = AX$ .
- Per a quins valors del paràmetre  $\alpha \in \mathbb{R}$  és atractiu el sistema  $X' = AX$ ? I repulsiu? I estable, però no atractiu? I inestable, però no repulsiu?
- Calculeu totes les rectes invariants i tots els plans invariants del sistema  $X' = AX$ . Dibuixeu el croquis aproximat del sistema  $X' = AX$  per a  $\alpha = -1$ ,  $\alpha = 0$  i  $\alpha = 1$ . Expliqueu en cadascun d'aquests tres casos com es comporten les trajectòries que no estan contingudes en cap pla o recta invariant.

**48** *Ex. Final 12-13 Q2 [p2]*

Considerem el sistema no lineal 2D  $x' = y$ ,  $y' = -x - y + x^3$ .

- Trobeu els seus tres punts d'equilibri, classifiqueu el sistema linealitzat en cadascun d'ells i estudeu-ne, si és possible, l'estabilitat pel mètode de linealització.
- Segui  $(x(t), y(t))$  la solució del PVI associat a les condicions inicials  $x(0) = x_0$ ,  $y(0) = y_0$ . Per a quines condicions inicials  $(x_0, y_0)$  és creixent  $x(t)$  a l'instant  $t = 0$ ? I decreixent? Per a quines condicions inicials  $(x_0, y_0)$  té  $x(t)$  un màxim local estricte a l'instant  $t = 0$ ? I un mínim local estricte?
- Calculeu la derivada temporal de la funció  $V(x, y) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} + \frac{y^2}{2}$ . Què podem deduir sobre l'estabilitat de l'origen pel mètode de Lyapunov? [Justifiqueu la resposta.]

**49** *Ex. Final 12-13 Q2 [teo]*

Quina relació hi ha entre el camp de vectors d'un sistema autònom  $X' = \vec{F}(X)$  i les seves solucions? Quina és la diferència entre les trajectòries i les òrbites d'un sistema autònom?

**50** *Ex. Final 12-13 Q2 [teo]*

Descriviu les dues posicions d'equilibri del pèndol sense fricció i l'estabilitat de cadascuna d'elles. Descriviu els tres tipus de moviments del pèndol sense fricció. Què canvia quan tenim en compte la fricció?

**51** *Ex. Final 12-13 Q1 [p1]*

Considerem el sistema lineal  $X' = AX$ , on  $A = \begin{pmatrix} 2\mu - 4 & -1 \\ 4 - \mu & 0 \end{pmatrix}$ , amb  $\mu \in \mathbb{R}$ .

- (a) Dibuixeu el diagrama de bifurcacions corresponent a l'estabilitat (sistema estable, inestable, atractor o repulsor) i a la classificació (node, focus, centre, sella, o sistema degenerat) del sistema. [Justifiqueu les respostes.]
- (b) Quan el sistema sigui un focus, especifiqueu el sentit de gir. Quan el sistema sigui un node, especifiqueu si és propi o improp. Quan el sistema sigui un centre, especifiqueu el sentit de gir i el període de les seves solucions. [Justifiqueu les respostes.]
- (c) Calculeu la solució general i dibuixeu un croquis precís del sistema quan  $\mu = 4$ .

**52** *Ex. Final 12-13 Q1 [p2]*

Considerem el sistema no lineal 2D  $x' = y(y - 1)$ ,  $y' = x(x - 1)$ .

- (a) Sigui  $V(x, y) = a(x^3 - y^3) + b(y^2 - x^2)$ . Per a quins valors dels paràmetres  $a, b \in \mathbb{R}$  és idènticament nul·la la derivada temporal de  $V(x, y)$ ?
- (b) Trobeu els quatre punts d'equilibri del sistema i estudieu l'estabilitat de cadascun. Decidiu quin mètode feu servir en cada cas.
- (c) Dos dels punts d'equilibri són centres no lineals i els altres dos són selles no lineals. Determineu el sentit de gir i el període límit de les petites oscil·lacions entorn de cada centre. Determineu les direccions estables i inestables (vectors propis) de cada sella.

**53** *Ex. Final 12-13 Q1 [teo]*

- (a) Sigui  $\vec{v}$  un vector propi de valor propi  $\lambda$  d'una matriu quadrada  $A$ . Proveu que la funció  $X(t) = e^{\lambda t} \vec{v}$  és una solució del sistema  $X' = AX$ .
- (b) Sigui  $\lambda$  un valor propi d'una matriu quadrada  $A$ . Siguin  $\vec{u}$  i  $\vec{v}$  vectors tals que  $A\vec{u} = \lambda\vec{u} + \vec{v}$ ,  $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ . Proveu que la funció  $Y(t) = e^{\lambda t}(\vec{u} + t\vec{v})$  és una altra solució del sistema  $X' = AX$ .

**54** *Ex. Final 12-13 Q1 [teo]*

Digueu si és possible determinar l'estabilitat d'un punt d'equilibri d'un sistema no lineal 2D pel mètode de linealització, en cadascun dels casos següents:

- quan el sistema linealitzat és una sella;
- quan el sistema linealitzat és un node;
- quan el sistema linealitzat és un centre;
- quan el sistema linealitzat és un focus;
- quan el sistema linealitzat és degenerat.

[Justifiqueu les respostes.]

**55** *Ex. Final 11-12 Q2 [p1]*

Considerem el sistema lineal 2D homogeni a coeficients constants  $X' = AX$  amb  $A = \begin{pmatrix} -2r & r \\ r & -r \end{pmatrix}$ .

- (a) Classifiqueu el sistema  $X' = AX$  en funció del paràmetre  $r \in \mathbb{R}$ .
- (b) A partir d'ara només estudiem el cas  $r = 1$ .
- Dibuixeu un croquis complet del sistema  $X' = AX$ .
  - Dibuixeu el camp de velocitats (també anomenat camp de vectors) sobre els dos eixos de coordenades. Són invariants els eixos de coordenades?
  - Sigui  $X(t)$  una solució del sistema  $X' = AX$  amb condició inicial  $X(0)$  sobre el primer quadrant  $Q_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0\}$ . Podem afirmar que  $X(t) \in Q_1$  per a tot  $t \geq 0$ ? Realitzeu un estudi similar per a cadascun dels altres tres quadrants. [Justifiqueu les respostes.]
  - Sigui  $X(t)$  una solució del sistema  $X' = AX$  amb condició inicial  $X(0)$  pertanyent a la regió triangular  $T_l = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq l\}$ , essent  $l > 0$ . Podem afirmar que  $X(t) \in T_l$  per a tot  $t \geq 0$ ? [Justifiqueu la resposta.]
  - Calculeu la derivada temporal  $W(x, y)$  de la funció  $V(x, y) = x + y$  sobre les solucions del sistema  $X' = AX$ .

**56** *Ex. Final 11-12 Q2 [p2]*

Siguin  $x(t)$  i  $y(t)$  les densitats de població de dues espècies  $X$  i  $Y$  aïllades que competeixen per un recurs limitat. Modelitzem l'evolució de les poblacions mitjançant el sistema de Lotka–Volterra competitiu,

$$x' = kx(1 - x/m - \alpha y), \quad y' = ly(1 - \beta x - y/n),$$

on tots els paràmetres que apareixen són positius. En aquest problema suposarem  $k = m = \alpha = 1$ ,  $l = \beta = 1/2$  i  $n = 2$ .

- (a) Trobeu els tres punts d'equilibri, classifiqueu el sistema linealitzat en cadascun d'ells i estudieu-ne, si és possible, l'estabilitat de cadascun pel mètode de linealització.
- (b) Quina és la dinàmica de la població  $X$  quan no hi ha població  $Y$ ? Dibuixeu el croquis d'aquesta dinàmica sobre l'eix  $\{y = 0\}$ . Ídem quan no hi ha població  $X$ , dibuixant el croquis sobre l'eix  $\{x = 0\}$ .
- (c) La component  $x'$  s'anul·la sobre l'eix vertical i sobre una recta  $r$ , mentre que  $y'$  s'anul·la sobre l'eix horitzontal i sobre una recta  $s$ . Trobeu i dibuixeu les rectes  $r$  i  $s$ . Aquestes rectes divideixen el primer quadrant en tres regions. Quin signe tenen les quantitats  $x'$  i  $y'$  a cadascuna d'aquestes tres regions?
- (d) Dibuixeu el croquis del sistema de Lotka–Volterra al primer quadrant, donant tanta informació com us sigui possible. Interpreteu biològicament el resultat.

**57** *Ex. Final 11-12 Q2 [teo]*

Sigui  $A$  una matriu  $n \times n$  diagonalitzable. Suposem que  $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$  és una base de vectors propis de valors propis  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  de la matriu  $A$ . Escriviu la solució general  $X_h(t)$  del sistema lineal homogeni a coeficients constants  $X' = AX$  i doneu una breu explicació de perquè té aquesta forma.

**58** *Ex. Final 11-12 Q2 [teo]*

Sigui  $X_0 \in \mathbb{R}^n$  un punt d'equilibri d'un sistema no lineal  $X' = \vec{F}(X)$ . Quina és la matriu  $A$  del sistema linealitzat al punt  $X_0$ ? Enuncieu el teorema que descriu com determinar l'estabilitat del punt  $X_0$  pel mètode de linealització.

**59** *Ex. Final 11-12 Q1 [p1]*

Considerem el sistema lineal 3D  $X' = AX$  i el sistema lineal 2D  $X' = BX$  donats per les matrius

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -2\alpha & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2\alpha & \alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

- (a) Estudieu l'estabilitat del sistema 2D en funció de  $\alpha$ . Ídem per al sistema 3D.
  - (b) Existeix  $\alpha \in \mathbb{R}$  tal que totes les solucions del sistema 2D són periòdiques? En cas afirmatiu, quin període tenen? Ídem per al sistema 3D.
  - (c) Per a quin valor  $\alpha \in \mathbb{R}$  el sistema 2D conserva àrea? Per a quin valor  $\alpha \in \mathbb{R}$  el sistema 3D conserva volum?
  - (d) Dibuixeu el croquis d'ambdós sistemes (2D i 3D) quan  $\alpha = 1$ .
  - (e) Descriviu la relació entre els croquis d'ambdós sistemes per a un valor de  $\alpha$  arbitrari.
- [Justifiqueu les respostes.]

**60** *Ex. Final 11-12 Q1 [p2]*

El moviment d'una partícula de massa 1 que es desplaça sense fricció al llarg d'una recta per l'acció de la força  $F(x) = x - x^2$  satisfà l'EDO de segon ordre següent,

$$x'' = F(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

- (a) Introduint la velocitat  $v = x'$ , escriviu aquesta EDO de segon ordre com un sistema lineal 2D de primer ordre. Calculeu la derivada temporal de l'energia

$$E(x, v) = \frac{v^2}{2} + U(x)$$

on  $U(x) = -\int_1^x F(s) ds = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{6}$  és el potencial. (La posició  $x = 1$  és l'origen del potencial:  $U(1) = 0$ .)

- (b) Calculeu les dues posicions d'equilibri de la partícula i l'energia de cadascuna. Estudieu l'estabilitat de cada posició d'equilibri, decidint quin mètode useu per a cadascuna.
- (c) Dibuixeu la gràfica del potencial  $U(x)$ , les corbes de nivell de l'energia  $E(x, v)$  i un croquis aproximat del sistema.
- (d) Per a quins valors de l'energia existeixen solucions fitades?

**61** *Ex. Final 11-12 Q1 [teo]*

Sigui  $X_0$  un punt d'equilibri del sistema no lineal autònom de primer ordre  $X' = \vec{F}(X)$ ,  $X \in U \subset \mathbb{R}^n$ .

- (a) Què vol dir que  $X_0$  sigui un punt d'equilibri del sistema?
- (b) Definiu els possibles tipus d'estabilitat per a un punt d'equilibri  $X_0$ , explicant el significat de cada tipus.
- (c) Què és el sistema linealitzat del sistema anterior en  $X_0$ ? Expliqueu clarament en què consisteix el mètode de linealització.