

Càlcul Vectorial: problemes d'examen

Equacions Diferencials

<https://mat-web.upc.edu/etseib/ed/>

Grau en Enginyeria en Tecnologies Industrials (GETI)

ETSEIB – UPC

Equip docent d'Equacions Diferencials

Departament de Matemàtiques

ETS d'Enginyeria Industrial de Barcelona (ETSEIB)

Universitat Politècnica de Catalunya (UPC)

1 *Ex. Parcial 23-24 Q2 [p1]*

Considerem a $\mathbb{R}^3$ la corba $C = \{(x, y, z) : z = 2x + y^2, x^2 + y^2 = 1, x \geq 0, y \geq 0\}$.

(a) Calculeu l'àrea de la superfície vertical compresa entre la corba C i la seva projecció sobre el pla $z = 0$.

(b) Calculeu la massa de la corba C , si la densitat ve donada per $\rho(x, y, z) = \frac{x^2}{\sqrt{1 + 4y^2(1 - x)^2}}$.

2 *Ex. Parcial 23-24 Q2 [p2]*

Considerem a $\mathbb{R}^3$ la corba C , parametritzada per $\sigma(t) = (0, 2a + t, a^2 - t^2)$, $-a \leq t \leq a$, i la superfície de revolució S obtinguda fent girar C al voltant de l'eix Z .

(a) Calculeu:

- l'àrea A de la regió del pla YZ limitada per la corba C i l'eix Y ;
- el volum V del sòlid comprès entre la superfície S i el pla XY .

(b) Calculeu el flux del camp vectorial $\vec{F}(x, y, z) = (2x - y, y, x^2y^2 - z)$ a través de la superfície S , orientada per la normal exterior.

(c) Calculeu el flux del camp vectorial $\vec{G} = \text{rot } \vec{F}$ a través de la superfície S , orientada per la normal exterior.

3 *Ex. Parcial 23-24 Q1 [p1]*

Sigui S la superfície obtinguda fent girar la corba $\{(x, y, z) : (x - 2)^2 + z^2 = 1, y = 0, x \geq 2, z \geq 0\}$ al voltant de l'eix Z . Suposem S orientada pel vector normal que té la tercera component positiva. Considerem

també el camp vectorial $\vec{F} = \left(\frac{\alpha y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, 4z^2 \right)$.

(a) Trobeu els valors del paràmetre α per als quals el camp $\vec{F}$ és irrotacional. Per aquests valors de α , quina és la circulació de $\vec{F}$ al llarg de la vora ∂S , orientada de manera compatible amb l'orientació de S ? [Justifiqueu la resposta.]

(b) La vora ∂S està formada per dues circumferències C_1 i C_2 , de radis 3 i 2 respectivament. Doneu parametritzacions de C_1 i C_2 , indicant si són compatibles amb l'orientació de ∂S considerada a l'apartat (a).

(c) Calculeu, per a qualsevol valor de α , la circulació de $\vec{F}$ al llarg de C_1 i C_2 orientades com a l'apartat (a). És conservatiu el camp $\vec{F}$ per algun valor de α ? Hi ha alguna contradicció amb el resultat de l'apartat (a)? [Justifiqueu la resposta.]

4 *Ex. Parcial 23-24 Q1 [p2]*

Considerem a $\mathbb{R}^3$ la funció $g(x, y, z) = (x + z^2) \sin(x^2 + y^2)$, i el camp vectorial $\vec{F} = (-y, x, xy) + \nabla g(x, y, z)$.

(a) Calculeu la circulació de $\vec{F}$ al llarg de la corba $C = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 1, y \geq 0, z = 1\}$, orientada al punt $(0, 1, 1)$ pel vector tangent $(1, 0, 0)$.

- (b) Calculeu el flux de $\vec{G} = \text{rot } \vec{F}$ a través de $S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 1, y \geq 0, 0 \leq z \leq 1\}$, orientada al punt $(0, 1, 1/2)$ pel vector normal $(0, 1, 0)$.

5 Ex. Parcial 22-23 Q2 [p1]

Sigui C la corba de $\mathbb{R}^3$ obtinguda com a intersecció del semiparaboloide $z = 4 - x^2 - y^2$, $y \geq 0$, amb el pla $z = 4 - 2x$, orientada de manera que la coordenada z creixi.

- (a) Doneu una parametrització de C , indicant l'interval on està definida i si és compatible amb l'orientació.
 (b) Calculeu la circulació del camp vectorial $\vec{F} = (y, 0, 0)$ al llarg de C , amb l'orientació indicada.
 (c) Calculeu la circulació del camp vectorial $\vec{G} = (yz e^{xy}, xz e^{xy}, e^{xy})$ al llarg de C , amb l'orientació indicada.
 (d) Calculeu l'àrea de la superfície vertical compresa entre la corba C i la seva projecció sobre el pla XY .

6 Ex. Parcial 22-23 Q2 [p2]

Considerem el camp vectorial $\vec{F}(x, y, z) = (x^2 y z, 2xz + 5y, -xyz^2)$.

- (a) Calculeu el flux de $\vec{F}$ a través de la superfície $S = \{(x, y, z) : x^2 + z^2 = 9, 1 \leq y \leq 2\}$ orientada per la normal exterior, aplicant un teorema integral.
 (b) Calculeu la circulació de $\vec{F}$ al llarg de la corba $C = \{(x, y, z) : x^2 + z^2 = 9, y = 2\}$ orientada al punt $(3, 2, 0)$ pel vector tangent $\vec{T} = (0, 0, 1)$, aplicant un teorema integral.

7 Ex. Parcial 22-23 Q1 [p1]

Sigui W el sòlid de revolució obtingut en girar al voltant de l'eix Z la regió el·líptica

$$T = \left\{ (x, y, z) : y = 0, \frac{(x-5)^2}{9} + \frac{z^2}{4} \leq 1 \right\}.$$

- (a) Calculeu el volum de W .
 (b) Sigui S la part de la frontera de W limitada per $x, y \geq 0$, és a dir, $S = \partial W \cap \{(x, y, z) : x, y \geq 0\}$, orientada per la normal exterior a W . Calculeu el flux del camp vectorial $\vec{F} = (z+2, 1, z)$ a través de S .

8 Ex. Parcial 22-23 Q1 [p2]

Considereu el camp vectorial $\vec{F}(x, y) = (x^3 + \alpha y^2, x^4)$, essent α un paràmetre, i el domini pla $D = [0, 2] \times [0, 1]$.

- (a) Calculeu la circulació de $\vec{F}$ al llarg de la vora ∂D^+ , orientada de manera compatible amb D .
 (b) És conservatiu el camp vectorial $\vec{F}$ per algun valor del paràmetre α ? [Justifiqueu la resposta.]

9 Ex. Parcial 21-22 Q2 [p1]

Una partícula es mou sobre el pla, des del punt $(0, 1)$ fins al punt $(0, 2)$ fent el recorregut següent: primer des de $(0, 1)$ fins a $(1, 0)$ al llarg de la circumferència $x^2 + y^2 = 1$ (en sentit horari), després pel segment de $(1, 0)$ a $(2, 0)$, i finalment des de $(2, 0)$ fins a $(0, 2)$ al llarg de la circumferència $x^2 + y^2 = 4$ (en sentit antihorari). Calculeu el treball (circulació) efectuat per la força $\vec{F} = (x^3 - 3x^2y - y^3, y^2)$ sobre aquesta partícula.

10 Ex. Parcial 21-22 Q2 [p2]

Calculeu el flux del camp vectorial $\vec{G} = \text{rot } \vec{F}$, essent $\vec{F} = (yz^3, x^2z, xy^2)$, a través de la superfície

$$S = \left\{ (x, y, z) : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{4} = 1, x \geq -1 \right\},$$

orientada al punt $(2, 0, 0)$ pel vector normal $\vec{N} = (1, 0, 0)$.

11 *Ex. Parcial 21-22 Q1 [p1]*

Considereu el cilindre el·líptic $S = \{(x, y, z) : x^2 + 2y^2 = 1, 0 \leq z \leq 1\}$ orientat per la normal exterior al cilindre sòlid. Calculeu el flux del camp $\vec{F} = (2xy + 2yz, -y^2 - z^2, y^2 + z^2)$ a través de S .

12 *Ex. Parcial 21-22 Q1 [p2]*

Sigui C la circumferència de $\mathbb{R}^3$, amb centre $(3, 0, 0)$ i radi 1, continguda al pla vertical XZ (és a dir, $y = 0$). Fent girar aquesta circumferència al voltant de l'eix Z , obtenim com a superfície de revolució un tor. Sigui S la porció d'aquest tor definida per $x \geq 0, y \geq 0$.

- (a) La vora de S està formada per dues corbes, $\partial S = C_1 \cup C_2$. Doneu parametritzacions d'aquestes corbes, que siguin compatibles amb l'orientació de S donada pel vector normal $(0, 0, 1)$ en el punt $\left(\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}}, 1\right)$.
- (b) Considereu el camp vectorial $\vec{F} = (x^2z, -2y^2z, xy)$. Aplicant el teorema de Stokes, calculeu el flux de $\vec{G} = \text{rot } \vec{F}$ a través de la superfície S , orientada com s'indica a l'apartat (a).

13 *Ex. Parcial 20-21 Q2 [p1]*

La corba $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = \cos z, y = \sin z, 0 \leq z \leq \pi/3\}$ és un tros d'una hèlix circular. Calculeu la seva longitud i les coordenades del seu centre geomètric (és a dir, suposant densitat constant).

14 *Ex. Final 20-21 Q2 [p2]*

Donat el camp $\vec{F} = (1, x + z, y)$, calculeu el flux del seu rotacional, $\text{rot } \vec{F}$, a través de la superfície $S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + z \leq 1\}$, orientada per la normal exterior.

15 *Ex. Parcial 19-20 Q1 [p1]*

Considereu el camp vectorial $\vec{F}(x, y, z) = (x^2y, xy^2 - 3z^4, 5x^2 - 5y^2 + 3z + 7)$. Sigui W la regió de $\mathbb{R}^3$ tancada per la semiesfera $S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 4, z \leq 0\}$ i pel disc $T = \{(x, y, z) : z = 0, x^2 + y^2 \leq 4\}$.

- (a) Calculeu el flux de $\vec{F}$ sortint de la regió W .
- (b) Calculeu el flux de $\vec{F}$ a través del disc T orientat pel vector $\vec{k} = (0, 0, 1)$.
- (c) Calculeu el flux de $\vec{F}$ a través de la semiesfera S orientada pel vector normal de component vertical positiva.

16 *Ex. Parcial 19-20 Q1 [p2]*

- (a) Considerem a $\mathbb{R}^2$ el camp vectorial $\vec{F}_\alpha = (2xy + e^y, x^2 + xe^y + \alpha x)$, on $\alpha \in \mathbb{R}$ és un paràmetre. Trobeu el valor α_0 per al qual el camp $\vec{F}_{\alpha_0}$ prové d'un potencial escalar, i trobeu en aquest cas el potencial.
- (b) Donada la corba $C = \left\{(x, y) : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1, y \geq 0\right\}$ calculeu, per a qualsevol valor de α , la circulació de $\vec{F}_\alpha$ al llarg de C orientada en sentit antihorari.
- [Ind.: Escriviu $\vec{F}_\alpha = \vec{F}_{\alpha_0} + \vec{G}$, on α_0 és el valor trobat a l'apartat (a) i $\vec{G}$ és un camp vectorial "senzill".]

17 *Ex. Parcial 18-19 Q2 [p1]*

Considerem, sobre el semiplà $y = 0, z \geq 0$, la semicircumferència C de centre $(1, 0)$ i radi $1/2$. Fent girar C al voltant de l'eix Z , generem una superfície de revolució S .

- (a) Calculeu l'àrea de S .
- (b) Calculeu la circulació del camp vectorial $\vec{F} = \left(xy + z, \frac{x^2}{2} + z, x + y\right)$ al llarg de la vora ∂S , si considerem S orientada per la normal exterior.

- (c) Calculeu el flux del camp vectorial $\vec{G} = (x, y, xy)$ a través de S , amb la mateixa orientació que a l'apartat (b).

18 *Ex. Parcial 18-19 Q2 [p2]*

Donada la regió plana $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 2x, x^2 + y^2 \geq 2\}$, sigui $C = \partial D$ la corba frontera orientada positivament (antihoràriament).

- (a) Descriu C com una corba regular a trossos, indicant per a cada tros una parametrització i el seu interval de definició. Indiqueu si les parametritzacions escollides respecten l'orientació.
- (b) Calculeu la circulació del camp vectorial $\vec{F} = (0, x^2 + y^2)$ al llarg de C^+ , amb l'orientació indicada. [Ind.: Apliqueu directament la definició de circulació.]

19 *Ex. Parcial 18-19 Q1 [p1]*

Signi S la superfície definida per $x^2 + (y - 1)^2 = 1, 0 \leq z \leq 1 + x + y$.

- (a) Calculeu la seva àrea.
- (b) Calculeu el flux del camp $\vec{F}(x, y, z) = (y^2, z, x^3)$ a través de S orientada de tal manera que, en el punt $(0, 0, 1/2)$, el vector normal és $(0, -1, 0)$.

20 *Ex. Parcial 18-19 Q1 [p2]*

- (a) Feu servir el teorema de Green per calcular la circulació del camp $\vec{F}(x, y) = (xy, x^2y^2)$ al llarg del trapezi de vèrtexs $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 2)$ i $(0, 1)$ recorregut en sentit horari.
- (b) Prové el camp $\vec{F}$ d'un potencial escalar? [Justifiqueu la resposta.]

21 *Ex. Parcial 17-18 Q2 [p1]*

Considereu la superfície $S = \{(x, y, z) : z = x^2 + y^2, (x - 1)^2 + y^2 \leq 1\}$, orientada pel vector normal que tingui la tercera component positiva, i la seva vora ∂S orientada de manera compatible. Donat el camp vectorial $\vec{F} = (y, z, x)$, calculeu la seva circulació al llarg de ∂S^+ de les dues maneres següents:

- (a) directament (aplicant la definició de circulació);
- (b) aplicant el teorema de Stokes.

22 *Ex. Parcial 17-18 Q2 [p2]*

- (a) Calculeu el flux del camp vectorial $\vec{F} = (2y^2, y, -z)$ a través de la superfície (part d'un paraboloid) definida per $S = \{(x, y, z) : z = -(x - 1)^2 - y^2, z \geq 2x - 5\}$, orientada per $\vec{N}_S = (0, 0, 1)$ al punt $(1, 0, 0)$.
- (b) Deduiu de (a) el flux del mateix camp vectorial $\vec{F}$ a través de la superfície (tros de pla) definida per $T = \{(x, y, z) : z = 2x - 5, z \leq -(x - 1)^2 - y^2\}$, que orientem per $\vec{N}_T = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2, 0, 1)$.

23 *Ex. Parcial 17-18 Q1 [p1]*

Signi S la superfície consistent en la part de l'hiperboloide d'una fulla $P = \{z^2 + 1 = x^2 + y^2\}$ que es troba dins de l'esfera $E = \{x^2 + y^2 + z^2 = 3\}$, i suposem que orientem S pel vector normal $\vec{N} = (1, 0, 0)$ en el punt $(1, 0, 0)$. Considerem el camp vectorial $\vec{F} = (y^2z^2, 2xz, xy^2)$, i el seu rotacional $\vec{G} = \text{rot } \vec{F}$.

- (a) Descriu la vora ∂S com a unió de les corbes C_1 (inferior) i C_2 (superior) obtingudes en interseccar P i E . Parametritzeu C_1 i C_2 , de tal manera que l'orientació d'aquestes parametritzacions sigui compatible amb la de S .
- (b) Calculeu el flux del camp $\vec{G}$ a través de S , amb l'orientació considerada, usant el teorema de Stokes.

- (c) Descriu els discs horitzontals T_1 i T_2 tals que $\partial T_1 = C_1$ i $\partial T_2 = C_2$. Si orientem aquests discs pels vectors normals $\vec{N}_1 = (0, 0, -1)$ i $\vec{N}_2 = (0, 0, 1)$ respectivament, trobeu els fluxos del camp $\vec{G}$ a través de T_1 i T_2 .

24 *Ex. Parcial 17-18 Q1 [p2]*

Useu el teorema de Green per calcular l'àrea encerclada per la cardioide, definida en coordenades polars per $r = 1 + \cos \theta$, $\theta \in [0, 2\pi]$.

25 *Ex. Parcial 17-18 Q1 [p3]*

Segui S la placa definida com la part del cilindre $x^2 + y^2 = 4$ continguda dins el cilindre sòlid $x^2 + z^2 \leq 4$, i amb $x, y, z \geq 0$.

- Doneu una parametrització de S , indicant clarament quin és el domini.
- Si la densitat a cada punt de la placa coincideix amb la distància al pla XZ , calculeu la massa de la placa.
- Calculeu el flux del camp $\vec{F}(x, y, z) = (y, x, x^2 z)$ a través de S , orientada pel vector normal que té la component y positiva.

26 *Ex. Parcial 16-17 Q2 [p1]*

Una paret de planta circular donada per l'equació $x^2 - 2x + y^2 = 0$, té en cada punt una alçària $x^2 + y^2$. Calculeu l'àrea de la paret.

27 *Ex. Parcial 16-17 Q2 [p2]*

Considereu la superfície $S \subset \mathbb{R}^3$ definida per $S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 4, 0 \leq z \leq 1\}$, orientada per la normal exterior al cilindre. Parametritzeu-la per les coordenades cilíndriques (θ, z) i escriviu el vector diferencial de superfície $d\vec{S}$ en aquestes coordenades. Calculeu el flux del camp $\vec{F}(x, y, z) = (3x, 3y, 3(x^2 + y^2))$ a través de S .

28 *Ex. Parcial 16-17 Q2 [p3]*

Segui S la superfície del tros del paraboloides el·líptic d'equació $z = x^2 + \frac{y^2}{4}$ amb $1 \leq z \leq 2$, i considerem el camp vectorial $\vec{F} = (x + y^2, y + x^3, 1)$.

- Parametritzeu S com una gràfica, tot indicant el domini D de la parametrització.
- Descriu superfícies T_1 i T_2 i un domini sòlid W adequats, per tal que $S \cup T_1 \cup T_2 = \partial W$.
- Calculeu la divergència i el rotacional de $\vec{F}$.
- Calculeu $I = \int_{S^+} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle$ aplicant el teorema de Gauss, si orientem S pel vector normal exterior al sòlid W considerat a (b).
- Calculeu $J = \oint_{\partial S^+} \langle \vec{F}, d\vec{\ell} \rangle$ aplicant el teorema de Stokes, si orientem la vora ∂S de forma compatible amb l'orientació de S considerada a (d).

29 *Ex. Parcial 16-17 Q1 [p1]*

Calculeu la massa de la cardioide $C \subset \mathbb{R}^2$ definida en coordenades polars per $r = R(1 + \cos \theta)$, $\theta \in [0, 2\pi]$, essent R una constant positiva, si la densitat ρ és proporcional a la distància a l'origen, amb un coeficient k .

30 Ex. Parcial 16-17 Q1 [p2]

Calculeu el moment d'inèrcia, respecte l'eix Y , del con circular invertit de radi 1 i altura 2,

$$S = \left\{ (x, y, z) : x^2 + y^2 = \left(1 - \frac{z}{2}\right)^2, 0 \leq z \leq 2 \right\},$$

que suposem homogeni amb densitat superficial $\rho = 1$.

31 Ex. Parcial 16-17 Q1 [p3]

Calculeu l'àrea del domini limitat pel tram de cicloide parametritzat per $\sigma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$, $t \in [0, \pi/2]$, i pels segments OA i AB , essent $A = (0, 4)$ i $B = (\frac{\pi}{2} - 1, 1)$.

32 Ex. Parcial 16-17 Q1 [p4]

Calculeu, mitjançant el teorema de Stokes, la circulació del camp $\vec{F}(x, y, z) = (x^2 + y, yz, xyz)$ al llarg de la vora de la superfície $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 4x^2 + 9y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}$, orientada per la normal interior de l'el·lipsoide. [Nota: no s'admetrà la resposta calculant amb la definició de circulació.]

33 Ex. Parcial 15-16 Q2 [p1]

Sigui S_1 la superfície $x^2 + y^2 = 1$, i S_2 definida per $\frac{x^2}{2} + y^2 + \frac{z^2}{2} = 1$. Denotem per C el tros de corba definit per la intersecció $S_1 \cap S_2$ i contingut en el primer octant $x, y, z \geq 0$.

(a) Expressen les equacions de S_1 i S_2 en coordenades cilíndriques (r, θ, z) i obteniu la parametrització $\sigma(\theta)$ de C .

(b) Si $h(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$, calculeu $I = \int_C h d\ell$.

(c) Sigui $\vec{F}(x, y, z) = (z^2 e^{x+y} - y, z^2 e^{x+y} + x, 2z e^{x+y})$. Calculeu la circulació $I = \int_C \langle \vec{F}, d\vec{\ell} \rangle$ on orientem C segons el sentit creixent de l'angle θ .

[Ind.: Escriviu $\vec{F} = \nabla f + \vec{G}$, per un cert potencial escalar $f(x, y, z)$ i un camp vectorial $\vec{G}(x, y, z)$ més senzill tal que la seva tercera component sigui igual a zero.]

34 Ex. Parcial 15-16 Q2 [p2]

Sigui S l'esfera de radi R centrada a l'origen i orientada per la seva normal exterior. Considerem el camp $\vec{F}(x, y, z) = (-y, x, z^n)$ amb $n \geq 1$.

(a) Calculeu el flux $\int_S \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle$ sense fer servir el teorema de Gauss.

(b) Calculeu el flux $\int_S \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle$ fent servir el teorema de Gauss.

35 Ex. Parcial 15-16 Q2 [p3]

Aplicant el teorema de Stokes, calculeu la circulació del camp vectorial $\vec{F} = (y^3, z^2, x)$ al llarg de la vora de la superfície $S = \{(x, y, z) : y = 1 - x^2, y \geq 0, 0 \leq z \leq 3\}$, de manera que el segment entre els punts $(1, 0, 0)$ i $(1, 0, 3)$ és recorregut de baix a dalt.

36 Ex. Parcial 15-16 Q1 [p1]

(a) Calculeu el centre geomètric de la part dreta de l'astroide $C = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 : x^{2/3} + z^{2/3} = 1, x > 0\}$.

(b) Calculeu l'àrea de la superfície de revolució S obtinguda en girar C al voltant de l'eix Z .

37 Ex. Parcial 15-16 Q1 [p2]

Considerem el camp $\vec{F} = \text{rot } \vec{G}$, essent $\vec{G} = (-y, x, z)$, i sigui S la part de la superfície $z = x^2 + y^2$ limitada per la condició $z \leq 3 + 2y$.

- Representeu S i calculeu el flux de $\vec{F}$ a través de S orientada segons la normal exterior, aplicant el teorema de Stokes.
- Calculeu el camp $\vec{F} = \text{rot } \vec{G}$, i calculeu el flux de $\vec{F}$ a través de S per la definició, comprovant que dóna el mateix resultat que a l'apartat (a).

38 Ex. Parcial 15-16 Q1 [p3]

Sigui $f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + \frac{z^2}{16}}}$, i sigui $S = \left\{x^2 + y^2 + \frac{z^2}{4} = 1\right\}$.

- Calculeu $\int_S f dS$.
- Calculeu el flux de $\vec{F}(x, y, z) = (x, y, z^2)$ a través de S , orientada pel vector normal exterior.
- Calculeu la circulació de $\vec{F}$ al llarg de la corba $C = S \cap \{x = 0\}$, orientada al punt $(0, 1, 0)$ pel vector tangent $(0, 0, 1)$.

39 Ex. Parcial 14-15 Q2 [p1]

Sigui S la part del cilindre el·líptic d'equació $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ que queda compresa entre els plans $y = 0$, $z = 0$ i $y + z = 2$. Calculeu el flux del camp vectorial $\vec{F}(x, y, z) = (0, 1, 0)$ a través de S , prenent com a orientació la normal exterior al cilindre.

40 Ex. Parcial 14-15 Q2 [p2]

Donat el camp $\vec{F}(x, y, z) = \left(\frac{-yz^2}{(x^2 + y^2)^2}, \frac{xy^2}{(x^2 + y^2)^2}, \frac{e^{-z^2/(x^2 + y^2)}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)$ i la superfície

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq \frac{(x-2)^2}{2} + \frac{y^2}{2} \right\}$$

orientada per la normal interior, calculeu el flux del rotacional de $\vec{F}$ a través de S .

41 Ex. Parcial 14-15 Q2 [p3]

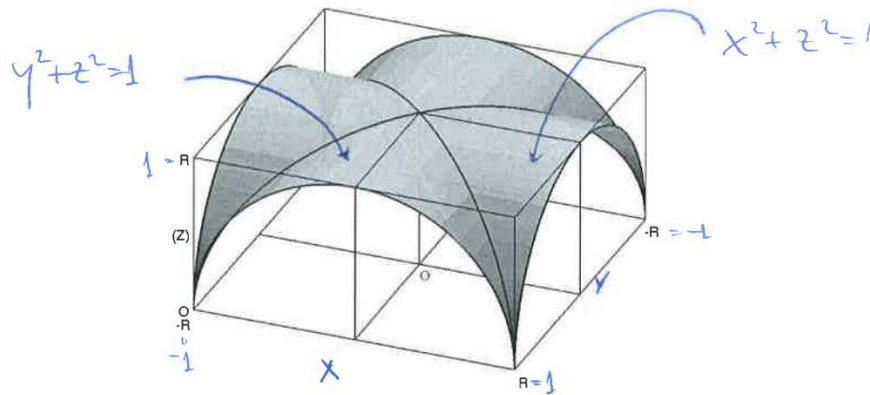
Sigui W el tetràedre sòlid de $\mathbb{R}^3$ delimitat pels tres plans de coordenades i el pla $x + y + z = 1$. Sigui T la base de W i $S = \partial W \setminus T$. En altres paraules, T és el triangle de vèrtexs $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$ i $(0, 1, 0)$, mentre que S està formada per les altres tres cares del tetràedre. Calculeu el flux d'un camp de la forma

$$\vec{F} = (P(x, y, z), Q(x, y, z), 1 + 4(1 - x)z)$$

a través de la superfície S orientada segons el vector normal exterior a W , suposant que $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \equiv 0$.

42 Ex. Parcial 14-15 Q1 [p1]

Calculeu el centre geomètric de la superfície formada a partir de dos cilindres de radi 1, d'equacions $x^2 + z^2 = 1$ i $y^2 + z^2 = 1$, a la part superior $z \geq 0$ (vegeu la figura).



43 Ex. Parcial 14-15 Q1 [p2]

Sigui C la corba definida per $2x + y + 2z = 16$ i $x^2 + y^2 = 64$ orientada pel vector tangent $(0, 2, -1)$ a la corba en el punt $(8, 0, 0)$. Calculeu la circulació del camp $\vec{F} = (2x, x, z)$ al llarg de C .

44 Ex. Parcial 14-15 Q1 [p3]

Considerem el tor de revolució orientat per la normal exterior, que s'obté en fer girar, al voltant de l'eix Z , la circumferència situada al pla $y = 0$ i que té per equació $(x - 2)^2 + z^2 = 1$.

- Calculeu el flux del camp $\vec{F}(x, y, z) = (0, 0, z)$ a través d'aquest tor, usant la definició.
- Calculeu el flux usant algun teorema integral.

45 Ex. Parcial 13-14 Q2 [p1]

Sigui C la corba de $\mathbb{R}^3$ obtinguda com a intersecció de les superfícies d'equacions $9y^2 = 16x^3$ i $z = x^2$, limitada per $0 \leq y \leq 4/3$. Suposem que té una densitat de massa $\rho(x, y, z) = 2x^2 - z$.

- Indiqueu la parametrització de C , si prenem com a paràmetre la coordenada x .
- Calculeu la massa de C .

46 Ex. Parcial 13-14 Q2 [p2]

Calculeu el flux del camp $\vec{F}(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2)$ a través de la superfície

$$S = \left\{ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = \frac{z^2}{b^2}, 0 \leq z \leq b \right\}, \quad a, b > 0,$$

orientada pel vector normal amb tercera component negativa.

47 Ex. Parcial 13-14 Q2 [p3]

Calculeu el moment d'inèrcia respecte l'eix Z de la superfície S definida per la porció del paraboloide hiperbòlic $4z = x^2 - 2y^2$ tallada pel cilindre sòlid de base el·líptica $\frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1$, suposant que la superfície és homogènia amb densitat constant ρ_0 .

48 Av. Cont. 13-14 Q1 [p1]

Considerem la regió $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 - 1 \leq x^2 + y^2, z^2/2 \geq x^2 + y^2, z \geq 0\}$. Donada una funció $f(x, y, z)$ contínua sobre W , expresseu $\iiint_W f(x, y, z) dx dy dz$ en coordenades cilíndriques, i en coordenades esfèriques. [Nota: no s'ha de fer cap integral.]

49 *Av. Cont. 13-14 Q1 [p2]*

Calculeu la càrrega total de la cara lateral del con de radi R i alçada h , si la densitat de càrrega és igual a la distància a la base del con.

50 *Ex. Parcial 13-14 Q1 [p1]*

Considerem la corba C del pla XZ donada per $z = x^2$, $x \in [1, 2]$. Considerem la superfície de revolució S obtinguda en girar C al voltant de l'eix X .

- Doneu una parametrització de S .
- Suposant que la densitat a cada punt de la superfície ve donada per $\rho(x, y, z) = k/x$, calculeu la massa de la superfície.

51 *Ex. Parcial 13-14 Q1 [p2]*

Sigui S la superfície delimitada per $x^2 + y^2 \leq 1$ i el pla $x + y = 2$, orientada de manera que el vector normal té component z positiva. Sigui C la corba frontera de S orientada consistentment.

- Trobeu una parametrització de S i de la corba C . Representeu-les esquemàticament indicant l'orientació de S i de la seva frontera C .
- Calculeu directament la circulació del camp $\vec{F} = (z, x, y)$ sobre la corba C amb l'orientació indicada (utilitzant una parametrització de la corba C).
- Calculeu $\int_{S^+} \langle \text{rot } \vec{F}, d\vec{S} \rangle$.

52 *Ex. Parcial 13-14 Q1 [p3]*

Sigui C la corba tancada en el pla XZ , definida per $x = \cos t$, $z = \sin(2t)$, $-\pi/2 \leq t \leq \pi/2$. Sigui S la superfície que s'obté en girar C entorn de l'eix Z , i sigui W el domini de $\mathbb{R}^3$ envoltat per S .

- Parametritzeu S .
- Calculeu $I = \int_{S^+} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle$, essent $\vec{F}(x, y, z) = (0, 0, z)$, on S^+ correspon a l'orientació de S definida per la normal exterior.
- Useu I per calcular el volum de W .

53 *Av. Cont. 12-13 Q2 [p1]*

Sigui C l'hèlix de radi R parametritzada per $\sigma(t) = (R \cos t, R \sin t, t)$, $0 \leq t \leq 4\pi$, amb densitat lineal

$$\rho(x, y, z) = \begin{cases} \rho_0 & \text{si } z \leq 2\pi, \\ 2\pi\rho_0/z & \text{si } z > 2\pi. \end{cases}$$

- Quantes voltes entorn de l'eix Z dona aquesta corba?
- Calculeu la seva massa $m(C)$.
- Sigui $\bar{z}$ la component vertical del centre de masses $\text{CM}(C) = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$. Digueu si $\bar{z}$ és més gran o més petita que 2π i justifiqueu-ho mitjançant un argument físic, sense realitzar cap càlcul.
- Calculeu $\bar{z}$ i comproveu la propietat anterior usant que $\ln 2 > 1/2$.
- Calculeu la constant c tal que $I_Z = c \cdot m(C) R^2$, on I_Z és el moment d'inèrcia de l'hèlix respecte l'eix Z .

54 *Av. Cont. 12-13 Q2 [p2]*

Considerem la superfície tancada $S = S_1 \cup S_2$ formada pels trossos

$$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \cos(\pi x/2) \cdot \cos(\pi y/2), |x| \leq 1, |y| \leq 1\},$$

$$S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0, |x| \leq 1, |y| \leq 1\},$$

orientada segons el seu vector normal exterior, i el camp $\vec{F} = (P, Q, R)$, de components

$$P(x, y, z) = \cos(\pi x/2), \quad Q(x, y, z) = \cos(\pi y/2), \quad R(x, y, z) = 1.$$

(a) Feu un dibuix aproximat de la superfície S .

(b) Calculeu el flux $\oint_S \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle$.

55 *Ex. Parcial 12-13 Q2 [p1]*

Considerem el camp $\vec{F}_\mu(x, y, z) = (yz + y + z + 1, xz + x + z + 1, xy + x + \mu y + 1)$, on $\mu \in \mathbb{R}$ és un paràmetre.

(a) Per a quin valor $\mu = \mu_0$ el camp $\vec{F}_\mu$ és irrotacional? Trobeu un potencial escalar f tal que $\vec{F}_{\mu_0} = \text{grad } f$.

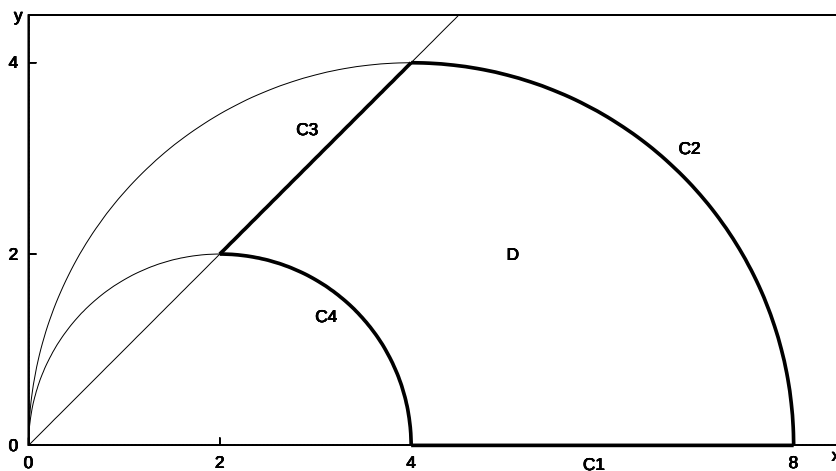
(b) Calculeu la circulació $\oint_C \langle \vec{F}_\mu, d\vec{\ell} \rangle$, on C és la corba tancada $\sigma(t) = (\cos t, \sin t, \cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, i orientada segons aquesta parametrització. [Ind.: $\vec{F}_\mu = \vec{F}_{\mu_0} + (\vec{F}_\mu - \vec{F}_{\mu_0})$.]

56 *Ex. Parcial 12-13 Q2 [p2]*

Considerem el domini pla D delimitat pels dos segments C_1 i C_3 i pels dos quarts de circumferència C_2 i C_4 representats a la figura.

(a) Doneu una parametrització $\sigma_j : [a_j, b_j] \rightarrow C_j$, $j = 1, 2, 3, 4$, de cada tros de $\partial D = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4$. Doneu l'interval $[a_j, b_j]$ on està definida cada parametrització.

(b) Calculeu l'àrea de D usant el teorema de Green.

**57** *Ex. Parcial 12-13 Q2 [p3]*

Considerem el camp $\vec{F}(x, y, z) = (y^3, 0, y^3 - 1)$, la porció de cilindre vertical S i la corba C definides per

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq 1 + \cos x\}, \quad C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, z = 1 + \cos x\},$$

ambdues orientades a partir del vector normal exterior a S (noteu que la corba C és la part superior de la frontera de S).

- (a) Calculeu el flux $\int_{S^+} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle$.
- (b) Calculeu la circulació $\int_{C^+} \langle \vec{F}, d\vec{\ell} \rangle$.

58 *Av. Cont. 12-13 Q1 [p1]*

Considerem l'octant d'esfera buida de radi R i densitat superficial constant ρ_0 donat per

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = R^2, x, y, z \geq 0\}.$$

- (a) Calculeu la seva massa $m(S)$.
- (b) Calculeu el seu centre de masses $\text{CM}(S) = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$.
- (c) Calculeu el seu moment d'inèrcia I_Z respecte l'eix Z .

[Ind.: Recordeu, per si són necessàries, les identitats $\cos^3 t = \frac{1}{4}(3 \cos t + \cos(3t))$, $\sin^3 t = \frac{1}{4}(3 \sin t - \sin(3t))$.]

[Nota: Podeu usar la igualtat $I_Z = \frac{2}{3} m(S) R^2$ per comprovar alguns resultats.]

59 *Av. Cont. 12-13 Q1 [p2]*

Siguin $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Considerem el camp $\vec{F}(x, y) = (y, \alpha + \beta x)$ i les corbes

$$C_1 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{4} + y^2 = 1, x \geq 0 \right\}, \quad C_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0, -1 \leq y \leq 1\}.$$

Les dues corbes uneixen els punts $A = (0, -1)$ i $B = (0, 1)$.

- (a) Dibuixeu i parametritzeu les dues corbes.
- (b) Calculeu la circulació del camp $\vec{F}$ al llarg de cada corba, orientades des de A fins a B .
- (c) Sigui $C = C_1 \cup C_2$ la corba tancada orientada en sentit antihorari. Calculeu la circulació $\oint_{C^+} \langle \vec{F}, d\vec{\ell} \rangle$.
- (d) Proveu, usant algun dels apartats anteriors, que el camp $\vec{F}$ no és conservatiu quan $\beta \neq 1$.

60 *Ex. Parcial 12-13 Q1 [p1]*

Considerem la corba $C = \{(r, z) \in \mathbb{R}^2 : z = \frac{2}{3} r^{3/2}, 0 \leq r \leq 3\}$ amb la densitat $\rho(r, z) = \frac{1}{\sqrt{1+r}}$.

- (a) Calculeu la massa de la corba C .
- (b) Calculeu el centre de masses de la corba C .
- (c) Calculeu l'àrea de la superfície de revolució obtinguda en girar la corba C al voltant de l'eix vertical Z .

61 *Ex. Parcial 12-13 Q1 [p2]*

Considerem el camp $\vec{F}(x, y, z) = (3x^2y^2 + 3x^2z, 2x^3y + 2yz, x^3 + y^2)$ i la superfície

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = -1 + 2x^2 + \frac{y^2}{2}, 0 \leq z \leq 4 \right\}.$$

- (a) Calculeu el rotacional del camp $\vec{F}$ i la circulació $\oint_{\partial S} \langle \vec{F}, d\vec{\ell} \rangle$, orientant ∂S per
- (b) Comproveu que el camp $\vec{F}$ prové d'un potencial escalar i calculeu la circulació $\oint_C \langle \vec{F}, d\vec{\ell} \rangle$, on C és la corba (continguda a la superfície S) parametritzada per

$$\sigma(t) = ((\cos t + \sin t) \cos t, 2(\cos t + \sin t) \sin t, 1 + 2 \sin 2t), \quad 0 \leq t \leq \pi/4.$$

- (c) Què podem dir sobre la circulació del camp vectorial $\vec{F}$ al llarg de qualsevol corba tancada continguda a la superfície S ? I si la corba és tancada, però no està continguda a la superfície S ? [Justifiqueu les respostes.]

62 *Ex. Parcial 12-13 Q1 [p3]*

Considerem el camp $\vec{G}(x, y, z) = (y^2z, yz, z - xy)$.

- (a) Calculeu el camp $\vec{F} = \text{rot } \vec{G}$ i comproveu que $\vec{F}$ és un camp solenoidal (divergència nul·la).

- (b) Calculeu el flux $\int_{\partial W} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle$, on W és la regió de $\mathbb{R}^3$ donada per

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + (z - 1)^2 \leq 4, x^2 + y^2 + (z + 1)^2 \leq 4\}$$

i la frontera ∂W ve orientada segons el vector normal exterior a la regió W .

- (c) Calculeu el flux $\int_S \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle$, on la superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4, x \leq 1\}$$

ve orientada segons el vector normal unitari exterior.

- (d) Calculeu la circulació $\oint_C \langle \vec{G}, d\vec{\ell} \rangle$ al llarg de la frontera $C = \partial S$ orientada segons el mateix vector normal exterior de l'apartat (c).

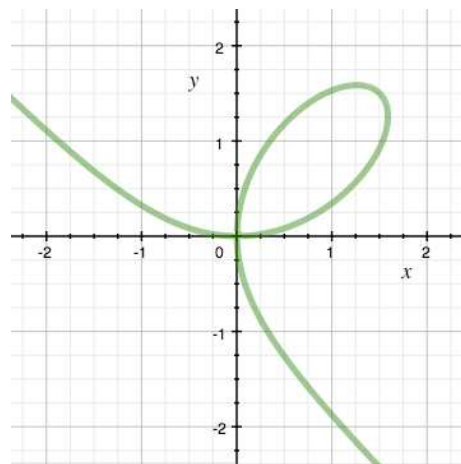
63 *Ex. Parcial 11-12 Q2 [p1]*

El foli de Descartes és la corba plana definida per l'equació implícita $x^3 + y^3 = 3xy$ (vegeu la figura). Sigui C la part del foli continguda al primer quadrant, la qual és una corba tancada simple parametritzada per $\sigma(t) = (x(t), y(t))$, amb

$$x(t) = \frac{3t}{1+t^3}, \quad y(t) = \frac{3t^2}{1+t^3}, \quad 0 \leq t < +\infty.$$

En particular, $\sigma(0) = (0, 0)$ i $\lim_{t \rightarrow +\infty} \sigma(t) = (0, 0)$.

- (a) Marqueu a la figura el sentit amb què la parametrització $\sigma(t)$ recorre la corba C . [Justifiqueu la resposta.]
- (b) Calculeu l'àrea del domini pla tancat per C .



64 *Ex. Parcial 11-12 Q2 [p2]*

Sigui C la corba tancada obtinguda en intersecar el paraboloides circular $P = \{z = x^2 + y^2\}$ i el pla $\Pi = \{z = mx\}$, essent $m \in \mathbb{R}$ un paràmetre. Orientem aquesta corba de manera que es recorri en sentit antihorari quan l'observem des d'un punt situat per damunt de la corba.

- (a) Calculeu la circulació $\oint_C y \, dz$ a partir de la definició.
- (b) Calculeu la circulació $\oint_C y \, dz$ usant Stokes.

65 *Ex. Parcial 11-12 Q2 [p3]*

Calculeu la mitjana de la funció suma $x + y + z$ de tres nombres $x, y, z \geq 0$, tals que $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

66 Ex. Parcial 11-12 Q2 [p4]

Sigui S la superfície de revolució obtinguda en girar la semicircumferència

$$C = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 : (x - R_1)^2 + z^2 = R_2^2, x \geq R_1\}, \quad 0 < R_2 < R_1,$$

al voltant de l'eix Z , orientada segons el vector normal “exterior”, és a dir, vector normal que s'allunya de l'eix. Sigui $\vec{F}(x, y, z) = (x, y, -2z)$.

(a) Calculeu el flux $\int_S \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle$ aplicant Gauss a la regió adequada.

(b) Calculeu el flux $\int_S \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle$ a partir de la definició.

[Ind.: Recordeu, per si són necessàries, les identitats $\cos^3 t = \frac{1}{4}(3 \cos t + \cos(3t))$, $\sin^3 t = \frac{1}{4}(3 \sin t - \sin(3t))$.]

67 Ex. Parcial 11-12 Q1 [p1]

Calculeu el moment d'inèrcia d'una esfera buida de radi R i densitat superficial constant $\rho \equiv \rho_0$, respecte un eix que passa pel seu centre. [Ind.: Podeu usar que $4 \cos^3 \varphi = 3 \cos \varphi + \cos 3\varphi$.]

68 Ex. Parcial 11-12 Q1 [p2]

Sigui S la superfície de revolució obtinguda en girar la corba $C = \{(r, z) : a \leq r \leq b, z = 1/(1 + r^2)\}$, essent $0 < a < b$, al voltant de l'eix Z , orientada segons la normal amb component vertical positiva.

(a) Sigui $\vec{F}(x, y, z) = (2yz^3, 3x^2z^2, 3x^2 + 3y^2)$. Calculeu el flux $\int_S \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle$ aplicant directament la definició.

(b) Sigui $\vec{G} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un camp de classe $\mathcal{C}^1$ tal que $\text{rot } \vec{G} = \vec{F}$. Calculeu la circulació $\oint_{\partial S} \langle \vec{G}, d\vec{\ell} \rangle$.

69 Ex. Parcial 11-12 Q1 [p3]

Calculeu la mitjana de la suma $x + y$ de dos nombres $x, y \geq 0$, tals que $x^2 + y^2 = 1$.

70 Ex. Parcial 11-12 Q1 [p4]

Sigui C la frontera del domini $D \subset \mathbb{R}^2$ obtingut en treure tres discs de radi 1 amb centres $(-3, 0)$, $(0, 0)$ i $(3, 0)$, del disc de radi 10 centrat en $(1, 0)$. Calculeu la circulació

$$\int_C (y + x^3 \cos(x^2)) dx + (e^{y^2} + 2x) dy$$

orientant la circumferència gran en sentit horari i les tres petites en sentit antihorari.

71 Ex. Parcial 11-12 Q1 [p5]

Sigui $S = S_1 \cup S_2$ la superfície regular a trossos donada per

$$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, -1 \leq z \leq 2\}, \quad S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1 + x^2 + y^2, x^2 + y^2 \leq 1\},$$

orientada al punt $(0, 0, 1)$ pel vector normal unitari $\vec{k} = (0, 0, 1)$. Sigui $\vec{F}(x, y, z) = (x^2, 0, 1 + xz)$.

(a) Dibuixeu la superfície S .

(b) Calculeu $\int_S \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle$.