MA1(UPC)

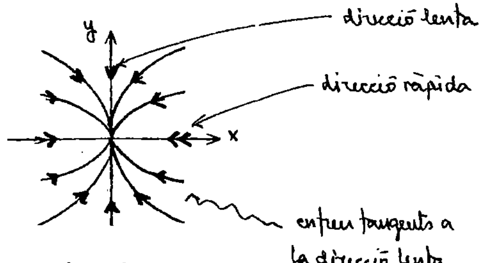
1 det $A\neq 0$: vap's λ_1, λ_2 simples i reals

A diagonalitza.
Sigui $\{v_1, v_2\}$ base de vep's, i
$S = \begin{pmatrix} \square & \square \end{pmatrix}$
$v_1 \quad v_2$

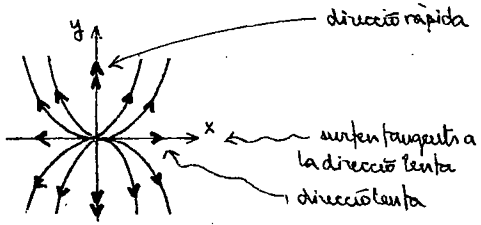
Aleshores, el canvi
$X(t) \to S^{-1}X(t)$
transforma el sistema
$\dot{X} = AX$
en el sistema
$\dot{X} = DX$
amb $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{pmatrix}$

solució general del sistema
$\begin{cases} \dot{x}(t) = \lambda_1 x(t) \\ \dot{y}(t) = \lambda_2 y(t) \end{cases}$
és
$\begin{cases} x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \\ y(t) = c_2 e^{\lambda_2 t} \end{cases} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

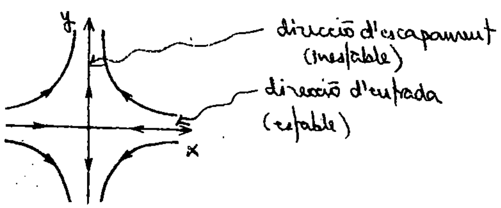
Equacions de les òrbites:
$y = \pm c\,|x|^{\lambda_2/\lambda_1}$



1a) $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$
node (o nus) propi estable



1b) $0 < \lambda_1 < \lambda_2$
node (o nus) propi inestable



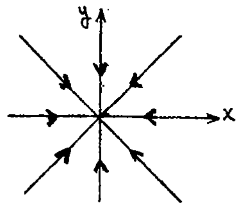
1c) $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$
sella

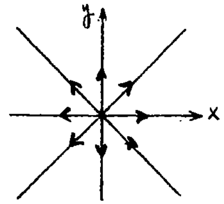
2 det $A\neq 0$ i vap's $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \neq 0$

2 a) A diagonalitza

Tindrem el sistema $\begin{cases} x(t) = \lambda x(t) \\ y(t) = \lambda y(t) \end{cases}$ de solució general $\begin{cases} x(t) = c_1 e^{\lambda t} \\ y(t) = c_2 e^{\lambda t} \end{cases}$

i òrbites del tipus $y = \pm c x \quad c \in \mathbb{R}$

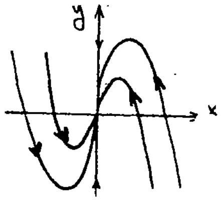

2a.1) $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$
node (o nus) propi estable

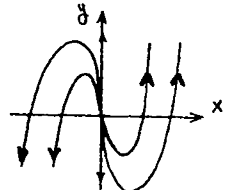

2a.2) $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$
node (o nus) propi inestable

2 b) A no diagonalitza

Per tant, en una base de Jordan podem suposar la matriu del sistema $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$. En una base de Jordan tindrem aleshores

$\begin{cases} x' = \lambda x \\ y' = x + \lambda y \end{cases}$ i solució general $\begin{cases} x(t) = c_1 e^{\lambda t} \\ y(t) = (c_1 t + c_2) e^{\lambda t} \end{cases} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

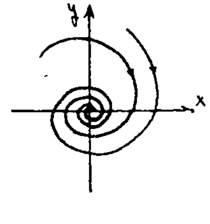

2b.1) $\lambda < 0$
node (o nus) impropi estable

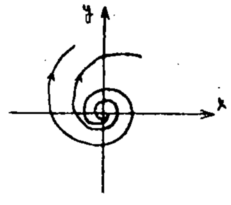

2b.2) $\lambda > 0$
node (o nus) impropi inestable

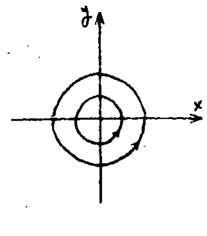
3 det $A\neq 0$ i vap's complexes $(\alpha \pm i\beta)$

Si v_1 i v_2 són els vep's associats a $\lambda = \alpha + i\beta$ (sup. $\beta > 0$) i $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ i prenem variables $x(t), y(t)$ en la base $\{\mathrm{Re}\,v_1, \mathrm{Im}\,v_1\}$ aleshores tenim que la solució s'escriu:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{\alpha t} \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\beta t & \sin\beta t \\ -\sin\beta t & \cos\beta t \end{pmatrix}}_{\text{rotació d'angle } -\beta t} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$


3a) $\alpha < 0$
focus estable

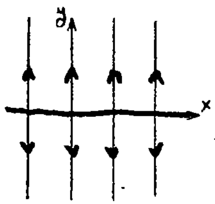

3b) $\alpha > 0$
focus inestable

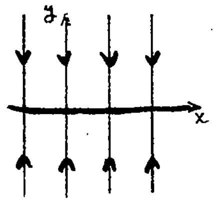

3c) $\alpha = 0$
centre

4 det $A = 0$

4 a) b) $\lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0$

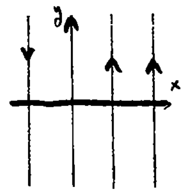
En una base de vep's podem suposar $A = \begin{pmatrix} 0 & \\ & \lambda_2 \end{pmatrix}$
és a dir $\begin{cases} \dot{x}(t) = 0 \\ \dot{y}(t) = \lambda_2 y(t) \end{cases}$
de solució $\begin{cases} x(t) = c_1 \\ y(t) = c_2 e^{\lambda_2 t} \end{cases}$


4a) $\lambda_1 = 0, \lambda_2 > 0$


4b) $\lambda_1 = 0, \lambda_2 < 0$

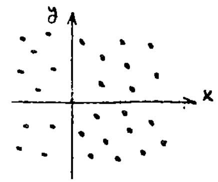
4 c) $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. A no diagonalitza

Sistema:
$\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = x \end{cases}$
Tots els punts de $x = 0$ són fixes.


4c) $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$
A no diagonalitzable

4 d) $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. A diagonalitza

Sistema:
$\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = 0 \end{cases}$
Tots els punts de $\mathbb{R}^2$ són fixes.


4d) $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$
A diagonalitzable