

- 1** Sgui C la corba formada pel contorn del quadrat $[0, 1] \times [0, 1]$ orientada en sentit antihorari. Calculeu la circulació al llarg de C del camp de vectors $\vec{F} = (e^{ax^2} + by, e^{ax^2} - bx)$.

Solució:

Escrivint $\vec{F} = (P, Q)$, tenim $Q_x - P_y = 2ax e^{ax^2} - 2b$ i per tant, pel teorema de Green, la circulació serà

$$\int_0^1 \int_0^1 (2ax e^{ax^2} - 2b) dy dx = \int_0^1 (2ax e^{ax^2} - 2b) dx = [e^{ax^2} - 2bx]_0^1 = e^a - 2b - 1.$$

- 2** Calculeu la massa de la superfície $S = \left\{ (x, y, z) : z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}, 2\alpha x + 2\beta y + z \leq 1 \right\}$ amb funció densitat $\rho(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{(ab)^4 + 4(b^4 x^2 + a^4 y^2)}}$.

Solució:

La superfície es pot posar com la gràfica de la funció $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$, definida sobre l'el·lipse

$$D = \left\{ \left(\frac{x}{a} + \alpha a \right)^2 + \left(\frac{y}{b} + \beta b \right)^2 \leq 1 + \alpha^2 a^2 + \beta^2 b^2 \right\}.$$

L'element de superfície és $dS = \frac{1}{(ab)^2} \sqrt{(ab)^4 + 4(b^4 x^2 + a^4 y^2)} dx dy$, i la massa és

$$M = \frac{1}{(ab)^2} \int_D dx dy = \frac{1}{(ab)^2} \text{Area}(D) = \frac{\pi(1 + \alpha^2 a^2 + \beta^2 b^2)}{ab}.$$

- 3** Considerem la superfície $S = S_1 - S_2$, consistent en l'esfera $S_1 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$ sense l'octant definit per $S_2 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = R^2, x, y, z \geq 0\}$. Calculeu el flux del camp vectorial $\vec{F} = (0, 0, Az + B)$ a través de S , orientada per la normal exterior.

Solució:

Apliquem el teorema de Gauss a S_1 , tenint en compte que la divergència de $\vec{F}$ és constant i el volum de l'esfera sòlida,

$$\oint_{S_1^+} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle = A \cdot \frac{4\pi R^3}{3}.$$

A aquest flux total, li restarem el flux a través de S_2 , que podem parametritzar com una gràfica $z = h(x, y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, amb domini $D = \{(x, y) : 0 \leq x^2 + y^2 \leq R^2, x \geq 0, y \geq 0\}$ (també podem utilitzar les coordenades esfèriques), i vector normal $(-h_x, -h_y, 1) = (*, *, 1)$ (també normal exterior). Obtenim una integral doble, que podem calcular passant a coordenades polars,

$$\int_{S_2^+} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle = \int_D (A\sqrt{R^2 - x^2 - y^2} + B) dx dy = \frac{\pi}{2} \int_0^R (A\sqrt{R^2 - r^2} + B) r dr = \frac{\pi R^2}{12} (2AR + 3B).$$

Fent la resta, obtenim

$$\int_{S^+} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle = \frac{\pi R^2}{12} (14AR - 3B).$$

-
- 4** Donat el quart de cilindre $S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = R^2, x, y \geq 0, 0 \leq z \leq h\}$, calculeu la circulació del camp vectorial $\vec{F} = (\sigma_1 y, \sigma_2 z, \sigma_3 x)$ ($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 = \pm 1$) al llarg de la vora ∂S , orientada de manera que el segment de $(R, 0, 0)$ a $(R, 0, h)$ es recorri en sentit ascendent.

.....

Solució:

Apliquem el teorema de Stokes, sabent que $\text{rot } \vec{F} = (-\sigma_2, -\sigma_3, -\sigma_1)$. Parametritzem S per $\Phi(\theta, z) = (R \cos \theta, R \sin \theta, z)$ amb domini $D = \{(\theta, z) : 0 \leq \theta \leq \pi/2, 0 \leq z \leq h\}$, i tenim el vector normal $\Phi_\theta \wedge \Phi_z = (R \cos \theta, R \sin \theta, 0)$. Però l'orientació d'aquest vector no és compatible amb l'orientació donada de la vora i, per tant, canviarem el signe. D'aquesta manera, obtenim:

$$\begin{aligned} \oint_{\partial S^+} \langle \vec{F}, d\vec{\ell} \rangle &= \int_{S^+} \langle \text{rot } \vec{F}, d\vec{S} \rangle = - \int_D \langle (-\sigma_2, -\sigma_3, -\sigma_1), (R \cos \theta, R \sin \theta, 0) \rangle d\theta dz \\ &= Rh \int_0^{\pi/2} (\sigma_2 \cos \theta + \sigma_3 \sin \theta) d\theta = (\sigma_2 + \sigma_3)Rh. \end{aligned}$$
