

- 1** Calculeu la circulació de $\mathbf{F}(x, y, z) = (y, cy, d)$ sobre la corba $C = \{(x, y, z) : z = 2bx - 1, z = x^2 + ay^2, x \geq b\}$ amb l'orientació compatible amb el camp normal al pla $(-2b, 0, 1)$ ($a > 0, b > 1$).

Solució:

La corba es pot escriure com a $C = \{(x, y, z) : z = 2bx - 1, (x - b)^2 + ay^2 = b^2 - 1, x \geq b\}$ i una parametrització positiva és

$$(x, y, z) = \left(b + \sqrt{b^2 - 1} \cos t, \sqrt{\frac{b^2 - 1}{a}} \sin t, 2b^2 - 1 + 2b\sqrt{b^2 - 1} \cos t \right), \quad -\pi/2 \leq t \leq \pi/2.$$

Llavors,

$$\begin{aligned} \int_{C^+} \langle \mathbf{F}, d\ell \rangle &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(-\frac{b^2 - 1}{\sqrt{a}} \sin^2 t + c \frac{b^2 - 1}{a} \sin t \cos t - 2db\sqrt{b^2 - 1} \sin t \right) dt \\ &= - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{b^2 - 1}{\sqrt{a}} \sin^2 t dt = -\frac{b^2 - 1}{2\sqrt{a}} \pi. \end{aligned}$$

- 2** Calculeu la circulació del camp $\mathbf{F} = (x^2 \cos(x^2), e^{y^2} + kx)$ al llarg de la frontera del domini

$$D = \{(x, y) : (x - R)^2 + y^2 \leq R^2, y \leq ax\},$$

recorreguda en sentit antihorari. [Ind.: Recordeu que una circumferència $(x - R)^2 + y^2 = R^2$ ve descrita, en coordenades polars, per $r = 2R \cos \theta$, $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$.]

Solució:

Useu el teorema de Green observant que $Q_x - P_y \equiv k$, i per tant hem de calcular l'àrea de D . Fent el canvi a polars, tenim com a nou domini $D^* = \{(r, \theta) : -\pi/2 \leq \theta \leq \alpha, 0 \leq r \leq 2R \cos \theta\}$, essent $\alpha = \arctan a$. Aleshores,

$$\begin{aligned} \oint_{\partial D^+} \langle \mathbf{F}, d\ell \rangle &= k \text{Area}(D) = k \int_{D^*} r dr d\theta = k \int_{-\pi/2}^{\alpha} \int_0^{2R \cos \theta} r dr d\theta \\ &= 2kR^2 \int_{-\pi/2}^{\alpha} \cos^2 \theta d\theta = kR^2 \int_{-\pi/2}^{\alpha} (1 + \cos 2\theta) d\theta = kR^2 \left(\frac{\pi}{2} + \alpha + \frac{1}{2} \sin 2\alpha \right) = kR^2 \left(\frac{\pi}{2} + \arctan a + \frac{a}{1 + a^2} \right). \end{aligned}$$

on hem usat que $\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \tan \alpha \cos^2 \alpha = 2a/(1 + a^2)$.

- 3** Considereu la superfície $S = \{(x, y, z) : x^2 + (y - z)^2 = R^2, y \leq k, z \geq 0\}$ ($R < k$), consistent en un cilindre oblic tallat per dos plans, que suposem orientat per la normal exterior al cilindre. Calculeu el flux del camp vectorial constant $\mathbf{F} = (a, b, c)$ a través de S .

Solució:

Per tancar el cilindre, afegim tapes

$$T_1 = \{y = k, x^2 + (z - k)^2 \leq R^2\}, \quad T_2 = \{z = 0, x^2 + y^2 \leq R^2\}$$

(que són cercles de radi R), orientades per $\mathbf{N}_1 = (0, 1, 0)$ i $\mathbf{N}_2 = (0, 0, -1)$, respectivament. Llavors $S \cup T_1 \cup T_2$ és la frontera d'un sòlid, i tenim S, T_1 i T_2 orientades per la normal exterior. Pel teorema de Gauss, i donat que $\text{div } \mathbf{F} \equiv 0$, la suma dels fluxos de $\mathbf{F}$ a través de S, T_1 i T_2 és 0. Calculem els fluxos a través de les tapes a partir de la component normal:

$$\int_{T_1^+} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle = \int_{T_1} \langle \mathbf{F}, \mathbf{N}_1 \rangle dS = b \text{Area}(T_1) = \pi b R^2, \quad \int_{T_2^+} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle = \int_{T_2} \langle \mathbf{F}, \mathbf{N}_2 \rangle dS = -c \text{Area}(T_2) = -\pi c R^2.$$

Deduïm doncs que $\int_{S^+} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle = \pi(c - b)R^2$

-
- 4** Calculeu la circulació del camp $\mathbf{F}(x, y, z) = (axz^2, 0, x + y + z)$ al llarg de la corba $C = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z = by\}$ orientada de manera compatible amb el camp normal al pla $(0, -b, 1)$.

.....

Solució:

Podem considerar la corba C com la vora de la superfície $S = \{(x, y, z) : z = by, (x, y) \in D\}$, essent $D = \{(x, y) : x^2 + (1 + b^2)y^2 \leq R^2\}$. Tenim $\text{rot } \mathbf{F} = (1, 2axz - 1, 0)$ i, aplicant el teorema de Stokes, tenim

$$\oint_{C^+} \langle \mathbf{F}, d\ell \rangle = \int_{S^+} \langle \text{rot } \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle = -b \int_D (2abxy - 1) dx dy = b \text{Area}(D) = \frac{\pi b R^2}{\sqrt{1 + b^2}} = \frac{\pi b \sqrt{1 + b^2} R^2}{1 + b^2},$$

on, en primer lloc, hem usat que la integral de xy sobre D és 0 per simetria i, després hem aplicat la fórmula de l'àrea d'una el·lipse de semieixos R i $R/\sqrt{1 + b^2}$.
