

- t1** El sistema següent, $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 + a + \mu & -1 - a - \mu \\ -1 - a - \mu & -1 + a + \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ depèn d'un paràmetre $\mu \in \mathbb{R}$ (amb $a \in \mathbb{R}$ fixada). Digueu per a quin valor $\mu = \mu_0$ canvia l'estabilitat del sistema (és a dir, passa d'estable a inestable, o d'inestable a estable).

Solució:

El polinomi característic és $\lambda^2 - (-2 + 2a + 2\mu)\lambda - 4a - 4\mu$ i les seves arrels son $\lambda = -2$ i $\lambda = 2a + 2\mu$. El canvi d'estabilitat es produeix quan $2a + 2\mu$ canvia de signe, és a dir quan $\mu = -a$.

Alternativament, ho podem veure a partir de la traça i el determinant, $T = -2 + 2a + 2\mu$, $D = -4a - 4\mu$, i estudiant quan canvien de signe:

- * si $\mu < -a$, tenim $T < 0$ i $D > 0$ i per tant és estable;
- * si $\mu = -a$, tenim $T < 0$ i $D = 0$ i per tant és estable;
- * si $-a < \mu < 1 - a$, tenim $T < 0$ i $D < 0$ i per tant és inestable;
- * si $\mu = 1 - a$, tenim $T = 0$ i $D < 0$ i per tant és inestable;
- * si $\mu > 1 - a$, tenim $T > 0$ i $D < 0$ per tant és inestable.

- t2** Considereu el sistema $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 - \mu - a & -a \\ 2a & a^2 - \mu + a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, essent $\mu \in \mathbb{R}$ un paràmetre. Trobeu el valor μ_0 del paràmetre per al qual el sistema és un centre, i indiqueu-ne el sentit de gir (suposem $a \neq 0$ fixada).

Solució:

El polinomi característic és $\lambda^2 - (2a^2 - 2\mu)\lambda + (a^2 - \mu)^2 + a^2$, i el seu discriminant és $-4a^2 < 0$. Per tant, sempre tenim valors propis complexos conjugats (focus o centre). La part real d'aquests valors propis és $a^2 - \mu$, i per tant és un centre quan $\mu = \mu_0 = a^2$. Per al sentit de gir observem, per exemple, que el camp vectorial en el punt $(1, 0)$ és un vector amb segona component $2a$, i per tant és antihorari si $a > 0$, i és horari si $a < 0$.

t3 El sistema d'EDO's $x' = \sigma_1(y - x^2)$, $y' = \sigma_2(4 + 2x - y - x^2)$, essent $\sigma_1 = \pm 1$, $\sigma_2 = \pm 1$, té dos punts d'equilibri. En un d'ells el sistema linealitzat és una sella. Classifiqueu el sistema linealitzat de l'altre punt d'equilibri.

.....

Solució:

Els punts d'equilibri són les solucions del sistema $y - x^2 = 0$, $4 + 2x - y - x^2 = 0$, que representen els dos punts de tall de dues paràboles: $P_1 = (-1, 1)$, $P_2 = (2, 4)$.

Aplicant el mètode de linealització, considerem la matriu jacobiana del camp vectorial en un punt qualsevol: $D\mathbf{F}(x, y) = \begin{pmatrix} -2\sigma_1 x & \sigma_1 \\ \sigma_2(2 - 2x) & -\sigma_2 \end{pmatrix}$. L'avaluem als punts P_1 i P_2 , i en cadascun d'ells calculem la traça (T), el determinant (D) i el discriminant ($\Delta = T^2 - 4D$) per classificar el sistema linealitzat:

- $D\mathbf{F}(P_1) = \begin{pmatrix} 2\sigma_1 & \sigma_1 \\ 4\sigma_2 & -\sigma_2 \end{pmatrix}$, $T = 2\sigma_1 - \sigma_2$, $D = -6\sigma_1\sigma_2$, $\Delta = 5 + 20\sigma_1\sigma_2$
- $D\mathbf{F}(P_2) = \begin{pmatrix} -4\sigma_1 & \sigma_1 \\ -2\sigma_2 & -\sigma_2 \end{pmatrix}$, $T = -4\sigma_1 - \sigma_2$, $D = 6\sigma_1\sigma_2$, $\Delta = 17 - 16\sigma_1\sigma_2$.

Mirant els signes d'aquests valors en cada cas, deduïm:

- * si $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$, tenim una sella al punt P_1 , i tenim un node propi atractor al punt P_2 ;
- * si $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = -1$, tenim un focus repulsor al punt P_1 , i tenim una sella al punt P_2 ;
- * si $\sigma_1 = -1$, $\sigma_2 = 1$, tenim un focus atractor al punt P_1 , i tenim una sella al punt P_2 ;
- * si $\sigma_1 = \sigma_2 = -1$, tenim una sella al punt P_1 , i tenim un node propi repulsor al punt P_2 .

t4 Considerem l'equació del moviment d'un pèndol sense fricció, $ml\theta'' + mg \sin \theta = 0$, on m és la massa, l és la longitud, $g = 10$ és l'acceleració de la gravetat, i la funció incògnita $\theta(t)$ és l'angle respecte la posició vertical inferior. Sabem que l'energia total és $V(\theta, \omega) = \frac{1}{2}ml^2\omega^2 + mgl(1 - \cos \theta)$, on $\omega(t) = \theta'(t)$ és la velocitat angular. Per a la solució amb condicions inicials $\theta(0) = \pi$, $\theta'(0) = a > 0$, trobeu la velocitat angular $\theta'(t_1)$ en un instant t_1 en què tenim $\theta(t_1) = \pi/3$.

.....

Solució:

Sabem que l'energia és una quantitat conservada: $V(\theta(t), \theta'(t)) \equiv \text{const}$ per a tot t . Per tant, $V(\pi/3, \theta'(t_1)) = V(\pi, a)$, és a dir, $\frac{1}{2}l^2\theta'(t_1)^2 + gl(1 - \cos(\pi/3)) = \frac{1}{2}l^2a^2 + 2gl$, d'on deduïm que $\theta'(t_1) = \pm\sqrt{a^2 + 3g/l}$. Ara bé, com que tenim la condició inicial a la posició superior d'equilibri amb velocitat positiva, el pèndol no oscil·la sinó que sempre gira en el mateix sentit, i per tant $\theta'(t_1) = \sqrt{a^2 + 3g/l} > 0$ (no depèn de m).
