

ETSEIB. Eqs diferencials. Examen d'avaluació continuada, 13/4/2016. **Perm A**

1. Sigui C la corba en el semiplà $\{y = 0, x \geq 0\}$ donada per $x(t) = e^t \cos t$, $z(t) = e^t \sin t$, $t \in [-\pi/2, \pi/2]$, i sigui S la superfície que s'obté en fer girar C entorn de l'eix z . Calculeu l'àrea de S . (Indicació: $\int e^{\alpha t} \cos t \, dt = \frac{e^{\alpha t}}{\alpha^2 + 1}(\alpha \cos t + \sin t)$.)

a) $\pi\sqrt{2} \cosh(\pi)$ b) $\frac{4\pi\sqrt{2}}{5} \sinh(\pi)$ c) $\frac{4\pi\sqrt{2}}{5} \cosh(\pi)$ d) $\pi\sqrt{2} \sinh(\pi)$ e) Cap de les anteriors

Resposta: c)

Solució: Apliquem Guldin a $\sigma(t) = (x(t), z(t))$. Tenim $\sigma'(t) = (e^t(\cos t - \sin t), e^t(\sin t + \cos t))$, $\|\sigma'(t)\| = \sqrt{2}e^t$. Llavors

$$\begin{aligned} \text{Àrea}(S) &= 2\pi \bar{x} \text{Long}(C) = 2\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} x(t) \|\sigma'(t)\| \, dt = 2\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{2} e^{2t} \cos t \, dt = \\ &= \frac{2\pi\sqrt{2}}{5} [e^{2t}(2 \cos t + \sin t)]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{4\pi\sqrt{2}}{5} \cosh(\pi). \end{aligned}$$

També es pot calcular sense aplicar T. Guldin.

□

2. Calculeu el moment d'inèrcia respecte de l'eix x de la circumferència en $\mathbb{R}^3$ parametritzada per $\sigma(t) = (\frac{\sqrt{3}\cos t}{2}, \frac{\sqrt{3}\sin t}{2}, \frac{1}{2})$, $t \in [-\pi, \pi]$, quan la seva densitat de massa ve donada per $\rho(x, y, z) = |x|$.

a) $3/2$ b) $5/2$ c) $5/6$ d) 0 e) Cap de les anteriors

Resposta: a)

Solució:

$$\begin{aligned} \sigma'(t) &= \left(-\frac{\sqrt{3}\sin t}{2}, \frac{\sqrt{3}\cos t}{2}, 0\right), \quad \|\sigma'(t)\| = \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \rho(\sigma(t)) &= \frac{\sqrt{3}}{2} |\cos t|, \quad y^2(t) + z^2(t) = (3/4 \sin^2 t + 1/4), \\ I_x &= \int_{-\pi}^{\pi} \|\sigma'(t)\| \rho(\sigma(t)) (y^2(t) + z^2(t)) \, dt \\ &= 3/4 \int_{-\pi}^{\pi} |\cos t| (3/4 \sin^2 t + 1/4) \, dt = \\ &= 6/4 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (3/4 \sin^2 t \cos t + 1/4 \cos t) \, dt = 3/2. \end{aligned}$$

□

3. Sigui $(0, 0, \bar{z})$ el centre de masses de la semiesfera

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}$$

amb densitat superficial $\rho(x, y, z) = z$.

- a) $\bar{z} = 2/5$.
b) $\bar{z} = 1/2$.
c) $\bar{z} = 3/5$.

- d) $\bar{z} = 2/3$.
 e) Cap de les anteriors.

Resposta: d)

Solució: Parametritzem la semiesfera amb la longitud $\theta \in [0, 2\pi]$ i la latitut $\phi \in [0, \pi/2]$. És a dir, $S = \varphi(D) \subset \mathbb{R}^3$ amb

$$\varphi(\theta, \phi) = (\cos \phi \cos \theta, \cos \phi \sin \theta, \sin \phi), \quad D = [0, 2\pi] \times [0, \pi/2].$$

Recordem que l'element de superfície d'aquesta parametrització és $dS = \cos \phi d\theta d\phi$. Per tant, la massa total és

$$m(S) = \int_S \rho dS = \int_D \sin \phi \cos \phi d\theta d\phi = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/2} \sin \phi \cos \phi d\phi = 2\pi \left[\frac{\sin^2 \phi}{2} \right]_{\phi=0}^{\phi=\pi/2} = \pi.$$

Finalment,

$$\bar{z} = \frac{\int_S z \rho dS}{m(S)} = \frac{1}{\pi} \int_D \sin^2 \phi \cos \phi d\theta d\phi = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/2} \sin^2 \phi \cos \phi d\phi = 2 \left[\frac{\sin^3 \phi}{3} \right]_{\phi=0}^{\phi=\pi/2} = \frac{2}{3}.$$

4. El flux del camp $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2, y^2, 0)$ a través de la superfície $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 - y^2\}$ tallada pel cilindre $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1$ i orientada pel vector normal amb tercera component positiva val
- a) $3/2$.
 b) $2/3$.
 c) 0 .
 d) $-3/2$.
 e) Cap de les anteriors.

Resposta: c)

Solució:

La superfície S és la gràfica de la funció $z = x^2 - y^2$ sobre el domini pla

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

El flux demanat és igual a

$$\int_S \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle = \int_D \langle (x^2, y^2, 0), (-2x, -2y, 1) \rangle dx dy = \int_D (-2x^3 - 2y^3) dx dy = 0$$

(per simetria)

5. Calculeu la circulació del camp vectorial $\mathbf{F} = (x^2 + y^2, 2x^2 + 2xy)$ al llarg de la corba C definida per $y = 1 - x^2$, des del punt $(-1, 0)$ fins al punt $(1, 0)$.
Ind.: Considereu el domini comprès entre la corba i l'eix x , i apliqueu el teorema de Green-Riemann.
- (a) $\frac{2}{3}$ (b) 0 (c) $-\frac{1}{3}$ (d) 2 (e) cap de les anteriors.

Resposta: (a)

Solució: Considerant el domini $D = \{(x, y) : 0 \leq y \leq 1 - x^2\}$, la circulació del camp $\mathbf{F} = (P, Q)$ al llarg de la frontera ∂D^+ (recorreguda en sentit antihorari) coincideix amb la integral doble

$\int_D (Q_x - P_y) dx dy = 4 \int_D x dx dy = 0$, per la simetria d'aquesta integral respecte l'eix y . La frontera ∂D^+ està formada per la corba C (en sentit contrari al que ens interessa) i el segment L entre els punts $(-1, 0)$ i $(1, 0)$. Llavors deduïm:

$$\int_C \langle \mathbf{F}, d\ell \rangle = \int_L \langle \mathbf{F}, d\ell \rangle = \int_{-1}^1 P(x, 0) dx = \int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{2}{3}.$$

6. Sigui $\mathbf{F}(z) = (P(z), Q(z), z)$ un camp vectorial que només depèn de la variable z . Donat el con $S = \{(x, y, z) : z^2 = x^2 + y^2, 0 \leq z \leq 2\}$, que considerem orientat per la normal exterior, quant val el flux a través de S ?

Ind.: El volum d'un con sòlid de radi R i alçada h és $V = \pi R^2 h/3$.

- (a) $-\frac{16\pi}{3}$ (b) 0 (c) $\frac{8\pi}{3}$ (d) 4π (e) cap de les anteriors.

Resposta: (a)

Solució: Afegim la “tapa” $T = \{z = 2, x^2 + y^2 \leq 4\}$ i aleshores $S \cup T = \partial W$, essent W el con sòlid. Pel teorema de Gauss, orientant S i T per la normal exterior,

$$\int_S \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle + \int_T \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle = \int_W \operatorname{div} \mathbf{F} dx dy dz = \operatorname{Vol}(W) = \frac{8\pi}{3},$$

ja que $\operatorname{div} \mathbf{F} = 1$. D'altra banda, com que sobre T tenim $\mathbf{F} = (*, *, 2)$ i la normal exterior $\mathbf{N} = (0, 0, 1)$, podem calcular

$$\int_T \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle = \int_T 2 dS = 2 \operatorname{Area}(T) = 8\pi,$$

d'on deduïm que $\int_S \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle = \frac{8\pi}{3} - 8\pi = -\frac{16\pi}{3}$.

7. Calculeu $\int_C f dl$ si $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = |x|, -1 \leq x \leq 1\}$ i $f(x, y) = x + 1$.

- a) $\sqrt{2}$ b) $2\sqrt{2}$ c) $\sqrt{2}/2$ d) 2 e) Cap de les anteriors

Resposta: b)

Solució:

$$\int_C f dl = \int_C (x + 1) dl = (\text{persimetria}) = \int_C dl = 2\sqrt{2}$$

8. Calculeu la circulació del camp $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2, y^2, y)$ al llarg de la vora de la superfície $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z + x^2 + y^2 = 0, -1 \leq z \leq 0\}$ orientada pel vector normal amb component z negativa.

- a) $\sqrt{2}$ b) $2\pi\sqrt{2}$ c) 2π d) 0 e) Cap de les anteriors

Resposta: d)

Solució: Pel t. de STokes i prenent S com la gràfica d'una funció, es té

$$\int_C \langle \mathbf{F}, d\ell \rangle = \int_S \langle \operatorname{rot} \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle = \int_D \langle (1, 0, 0), (-2x, -2y, -1) \rangle dx dy = (\text{persimetria}) = 0,$$

on $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

O també es pot fer parametritzant la corba i calculant la circulació.