

ETSEIB. Eqs diferencials. Examen d'avaluació continuada, 2/11/2015. **Perm A**

1. Calculeu la circulació del camp $\mathbf{F}(x, y) = (0, 1)$ sobre l'arc de cardioide $r = 1 + \cos \theta$, $0 \leq \theta \leq \pi$ orientat en sentit antihorari.

a) 1 **b) 0** c) -1 d) 1/2 e) Cap de les anteriors

Solució: O bé pel T Newton-Leibnitz si $F = \text{grad}$ y, la circulació és 0

O bé per ser F conservatiu, la circulació és 0.

O bé per ser F conservatiu, podem canviar el camí -prendre per exemple un segment-

O bé, la corba es pot parametritzar per $\sigma(\theta) = ((1 + \cos \theta) \cos \theta, (1 + \cos \theta) \sin \theta)$, amb $\theta \in [0, \pi]$.

El seu vector velocitat és $\sigma'(\theta) = (-\sin \theta - \sin 2\theta, \cos \theta + \cos 2\theta)$. Aleshores

$$\begin{aligned} \int_C \langle F, d\ell \rangle &= \int_0^\pi \langle (0, 1), (-\sin \theta - \sin 2\theta, \cos \theta + \cos 2\theta) \rangle d\theta \\ &= \int_0^\pi \cos \theta + \cos 2\theta d\theta = \left[\sin \theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_0^\pi = 0. \end{aligned}$$

□

2. Sigui S la part del cilindre $x^2 + y^2 = 1$ que es troba al primer octant i està delimitat pel pla $ax + by - z + 1 = 0$, amb $a, b > 0$. Determineu els valors d' a i b que fan que l'àrea d' S sigui igual a π .

a) $a - b = 3\pi/2$ **b) $a + b = \pi/2$** c) $a + b = 5\pi/2$ d) $a - b = -3\pi/2$ e) Cap de les anteriors

Solució: O bé una parametrització de S és $\varphi(\theta, z) = (\cos \theta, \sin \theta, z)$ amb $\theta \in [0, \pi/2]$, $z \in [0, a \cos \theta + b \sin \theta + 1]$, llavors $\|\varphi_\theta \wedge \varphi_z\| = 1$. Per tant

$$\text{Àrea} = \int_0^{\pi/2} \int_0^{a \cos \theta + b \sin \theta + 1} dz d\theta = a + b + \frac{\pi}{2}$$

O bé, sabem que aquesta àrea és equivalent a calcular $\int_C f(x, y) d\ell$ on $f(x, y) = ax + by + 1$ (en aquest cas f és positiva en el domini de (x, y)) i on C és la corba que s'obté al fer la projecció vertical de S sobre en pla xy . Usant que la corba C es pot parametritzar per $\sigma(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta)$, $0 \leq \theta \leq \pi/2$ i que $\|\sigma'(\theta)\| = 1$, tenim que

$$\text{Àrea} = \int_C f d\ell = \int_0^{\pi/2} (a \cos \theta + b \sin \theta + 1) \cdot 1 d\theta = a + b + \frac{\pi}{2}.$$

Si volem que sigui igual a π llavors la condició demanada és que $a + b = \pi/2$.

□

3. Un punt es mou al llarg de la corba tancada $C = C_1 \cup C_2$ on

$$C_1 : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{4} + y^2 = 1, x > 0\}, \quad C_2 : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq y \leq 1, x = 0\}$$

Calculeu el treball fet pel camp de forces $\mathbf{F} = (y, -x - c)$, $c = \text{constant}$ quan el punt sobre C dóna una volta completa en el sentit *antihorari*.

- a) $3\pi/2$ b) $-c\pi/2$ c) -2π d) $-3c\pi/2$ e) 0

Solució. O bé surt directe amb el teorema de Green:

$$\text{circulacio} = \int_D (-2) dx dy = -2 \text{Area}(D) = -2\pi$$

O bé prenem la parametrització de l'el·lipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$:

$$x = a \cos \theta, \quad y = b \sin \theta \quad \theta \in [-\pi/2, \pi/2].$$

$$\begin{aligned} \int_{C_1} (y dx - (x + c) dy) &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} [(-2) \sin^2 \theta - 2 \cos^2 \theta - c \cos \theta] d\theta = -2\pi - 2c, \\ \int_{C_2} (y dx - (x + c) dy) &= \int_{C_2} (-x - c) dy = -c \int_1^{-1} dy = 2c. \end{aligned}$$

Llavors, $W = -2\pi$, i no depen de c .

4. Calculeu el flux del camp $\mathbf{F} = (x^3, y^3, 0)$ a través de

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2 + 1, 0 \leq z \leq 1\}$$

suposant la superfície orientada segons el vector normal $(-x, -y, z)$.

- a) $9\pi/5$ b) $3\pi/5$ c) $-7\pi/5$ d) $-14\pi/5$ e) cap de les anteriors

Solució. Apliquem el t. de la divergència a $\bar{S} = \delta W$ orientada per la normal interior, on W està limitat per S i dues tapes en els plans $z = 0$ i $z = 1$. Observem que el camp $\mathbf{F}$ és horitzontal i el flux en les tapes serà zero. Llavors $\text{div} \mathbf{F} = 3(x^2 + y^2)$ i treballant amb coordenades cilíndriques

$$I = - \int_W \text{div} \mathbf{F} dx dy dz = - \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1+z^2}} 3r^2 r dr dz d\theta = -14\pi/5.$$

(Observem que el flux és negatiu ja que $\mathbf{F}$ apunta cap enfora, i S està orientada cap a l'interior, per tant les respostes positives queden descartades.)

5. Sigui $C = C_1 \cup C_2$ on C_1 és la vora del quadrat $[-1, 1] \times [-1, 1]$ orientada en sentit antihorari i C_2 és la vora del quadrat $[-2, 2] \times [-2, 2]$ orientat en sentit horari. Calculeu la circulació del camp $F(x, y) = (1 - xy, 2y)$ al llarg de C .

a) -2 **(b) 0** c) 2 d) 4 e) -12/5

Solució. Pel T. Green: $\text{circulació} = -\int_D (Q_x - P_y) dx dy = -\int_D x dx dy = 0$ per simetria

6. Calculeu l'altura mitjana de la valla que té per base la corba $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1, y \geq 0\}$ i l'altura està donada a cada punt per la funció $f(x, y) = y$.

a) $\frac{\pi}{2}$ **(b) $\frac{2}{\pi}$** c) $\frac{1}{\pi}$ d) $\frac{4}{\pi}$ e) Cap de les anteriors

Solució.

$$\text{altura mitjana} = \frac{\int_C f dl}{\text{long}(C)} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin t dt = \frac{2}{\pi}$$

7. Calculeu la massa d'un filferro $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ si la densitat en tot punt és igual a la distància del punt a l'eix y.

a) 1 b) 0 c) 2 **(d) 4** e) 8

Solució. si C_1 és el tros de circumferència amb $x, y \geq 0$, amb parametrització $\sigma(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, \pi/2]$

$$\text{massa} = 4 \int_{C_1} x dl = 4 \int_0^{\pi/2} \cos t dt = 4$$

8. Calculeu el flux del camp $F(x, y, z) = (x, y, z)$ a través de la superfície $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$ orientada pel vector normal (x, y, z)

a) -12π b) $-3\pi/2$ **(c) $\pi/2$** d) $\pi/8$ e) Cap de les anteriors

Solució. O bé parametritzant (aquesta pregunta està treta dels apunts) o bé

S: $z = \sqrt{1 - (x^2 + y^2)}$, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$, $(-z_x, -z_y, 1) = (\frac{x}{\sqrt{1 - (x^2 + y^2)}}, \frac{y}{\sqrt{1 - (x^2 + y^2)}}, 1)$, llavors

$$\begin{aligned} \text{flux} &= \int_D \left\langle (x, y, \sqrt{1 - (x^2 + y^2)}), \left(\frac{x}{\sqrt{1 - (x^2 + y^2)}}, \frac{y}{\sqrt{1 - (x^2 + y^2)}}, 1 \right) \right\rangle dx dy = \\ &= \int_D \frac{dx dy}{\sqrt{1 - (x^2 + y^2)}} = (\text{usant polars}) = \int_0^{\pi/2} \int_0^1 (1 - r^2)^{-1/2} r dr d\theta = \pi/2 \end{aligned}$$

(De nou observem que el camp i l'orientació apunten cap enfora per tant podem descartar els resultats de flux negatiu)