

1. Siguien L y R dos nombres tales que $0 < L < R$. Sigui $W \subset \mathbb{R}^3$ el cos de revolució que s'obté al girar al voltant de l'eix z el domini pla

$$D = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 : |x - R| \leq L, |z| \leq L\}.$$

Sigui $S = \partial W$ la superfície de revolució que correspon a la frontera de W . Llavors:

- (a) $\text{Area}(S) = 2\pi RL$ y $\text{Vol}(W) = 2\pi RL^2$.
- (b) $\text{Area}(S) = 4\pi^2 RL$ y $\text{Vol}(W) = 2\pi^2 RL^2$.
- (c) $\text{Area}(S) = 16\pi RL$ y $\text{Vol}(W) = 8\pi RL^2$. ■
- (d) $\text{Area}(S) = 2\pi RL^2$ y $\text{Vol}(W) = 2\pi RL$.
- (e) Cap de les anteriors.

Resolució: Sea $C = \partial D$. Entonces $\text{Long}(C) = 8L$ y $\text{Area}(D) = 4L^2$, pues D es un cuadrado de lado $2L$. Además, el cuadrado está centrado en el punto $(R, 0)$. Por tanto, aplicando los teoremas de Guldin vemos que

$$\begin{aligned}\text{Area}(S) &= 2\pi \text{dist}(\text{CG}(C), \text{eje } z) \text{Long}(C) = 2\pi R 8L = 16\pi RL, \\ \text{Vol}(W) &= 2\pi \text{dist}(\text{CG}(D), \text{eje } z) \text{Area}(D) = 2\pi R 4L^2 = 8\pi RL^2.\end{aligned}$$

2. Sigui S el con truncat $z^2 = x^2 + y^2$, $1 \leq z \leq 2$. El flux del camp $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, z^2)$ a través de la superfície S orientada segons el vector normal de component vertical positiva és igual a:

- (a) $17\pi/6$. ■
- (b) $4\pi/3$.
- (c) $-17\pi/6$.
- (d) $-4\pi/3$.
- (e) Cap de les anteriors.

Resolució: Consideramos la parametrización $\varphi(\theta, z) = (z \cos \theta, z \sin \theta, z)$. Las coordenadas (θ, z) se mueven sobre el dominio plano $D = [0, 2\pi] \times [1, 2]$. El vector diferencial de superficie asociado a la parametrización dada es

$$d\mathbf{S} = (\varphi_\theta \wedge \varphi_z) d\theta dz = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -z \sin \theta & z \cos \theta & 0 \\ \cos \theta & \sin \theta & 1 \end{vmatrix} d\theta dz = (z \cos \theta, z \sin \theta, -z) d\theta dz.$$

Entonces, como el vector normal $\varphi_\theta \wedge \varphi_z = (z \cos \theta, z \sin \theta, -z)$ tiene la componente vertical negativa, la parametrización φ es *negativa* respecto a la orientación fijada en el enunciado, luego el flujo que nos piden es

$$\begin{aligned}\int_S \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle &= - \int_D \langle \mathbf{F} \circ \varphi, \varphi_\theta \wedge \varphi_z \rangle d\theta dz \\ &= - \int_D \langle (z \cos \theta, z \sin \theta, z^2), (z \cos \theta, z \sin \theta, -z) \rangle d\theta dz \\ &= - \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \left(\int_1^2 (z^2 - z^3) dz \right) = 17\pi/6.\end{aligned}$$

3. Tenim un filferro a $\mathbf{R}^2$ donat per la corba $x = y^2$, $0 \leq x \leq a$, amb densitat $\rho = \frac{1}{\sqrt{1+4x}}$. El seu moment d'inèrcia respecte l'eix y és:

- (a) $\frac{2a^{5/2}}{5}$. ■
- (b) $\frac{2a}{\sqrt{1+4a}}$.
- (c) $\frac{2a^3}{3}$.
- (d) $2a\sqrt{1+4a}$.
- (e) Cap de les anteriors.

Resolució: Parametritzem la corba per $\sigma(y) = (y^2, y)$, $-\sqrt{a} \leq y \leq \sqrt{a}$. Tenim $\|\sigma'(y)\| = \sqrt{1+4y^2}$, i la densitat en cada punt és $\rho(\sigma(y)) = \frac{1}{\sqrt{1+4y^2}}$. Aleshores, el moment d'inèrcia

respecte l'eix y és;

$$I_y = \int_C x^2 \rho \, dl = \int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} y^4 \frac{1}{\sqrt{1+4y^2}} \cdot \sqrt{1+4y^2} \, dy = \int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} y^4 \, dy = \frac{2a^{5/2}}{5}.$$

4. Considerem el con S d'equació $x^2 + y^2 = z^2$, amb $0 \leq z \leq h$. Sabent que la seva àrea és $A = \pi\sqrt{2}h^2$, quina és la distància mitjana dels punts de S a l'eix del con?

- (a) $\frac{2h}{3}$. ■ (b) $\frac{h}{3}$. (c) $\frac{h}{2}$. (d) $\frac{3h}{4}$. (e) Cap de les anteriors.

Resolució: Podem parametritzar el con per $\Phi(\theta, z) = (z \cos \theta, z \sin \theta, z)$, amb el domini $D = \{(\theta, z) : 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq z \leq h\}$. Tenim $\|\Phi_\theta \wedge \Phi_z\| = \sqrt{2}z$. La distància a l'eix ve donada per la funció $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2} = z$, i la seva mitjana és

$$\bar{f}_S = \frac{1}{A} \int_S f \, dS = \frac{1}{\pi\sqrt{2}h^2} \int_D z \cdot \sqrt{2}z \, d\theta \, dz = \frac{1}{\pi\sqrt{2}h^2} \cdot \sqrt{2} \cdot 2\pi \int_0^h z^2 \, dz = \frac{2h}{3}.$$

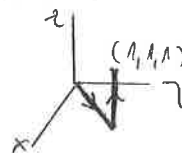
5. Calculeu la circulació del camp $F(x, y) = (xy, x^2)$ al llarg de la corba $C = C_1 \cup C_2$ amb orientació antihorària on C_1 és l'interval $[-R, R]$ sobre l'eix x i $C_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = R^2, y \geq 0\}$.

- (a) R^2 . (b) $\frac{R}{2}$. (c) $\frac{R}{3}$. (d) 0. ■ (e) Cap de les anteriors.

Resolució: Pel T. de Green-Riemann $\int_C \langle F, d\ell \rangle = \int_D (Q_x - P_y) \, dx \, dy = \int_D x \, dx \, dy = 0$ (per simetria)

6. Calculeu la circulació del camp $F(x, y, z) = (z, y, x)$ al llarg de la corba C formada pels dos segments que es mostren a la figura amb l'orientació indicada.

- (a) 1. (b) $\frac{1}{2}$. (c) 0. (d) $\frac{3}{2}$. ■ (e) Cap de les anteriors.



Resolució: Prenem les parametritzacions $\sigma_1(t) = (t, t, 0)$, $t \in [0, 1]$ i $\sigma_2(t) = (1, 1, t)$, $t \in [0, 1]$.

$$\int_C \langle F, d\ell \rangle = \int_0^1 \langle (0, t, t), (1, 1, 0) \rangle dt + \int_0^1 \langle (t, 1, 1), (0, 0, 1) \rangle dt = 3/2$$

També es fer aplicant el T. Newton-Leibnitz tenint en compte que F prové d'un potencial escalar $f(x, y, z) = xz + \frac{y^2}{2}$

7. Sigui S el tros de l'el·lipsoide de semieixos 1 (en x), 1 (en y) i 2 (en z) que viu a l'espai $z \geq 0$ i orientat per la normal interior. El flux del camp $F(x, y, z) = (zx^4, z^3y^4, z)$ val: .

- (a) $\pi/3$. (b) $-4\pi/3$. ■ (c) $5\pi/3$. (d) $-7\pi/3$. (e) Cap de les anteriors.

Resolució: Expressem S com la gràfica de la funció $z = 2\sqrt{1-x^2-y^2}$, $x^2 + y^2 \leq 1$. Si diem $F = (P, Q, U)$, observem que per simetria la integral de $z_x P + z_y Q$ s'anul·la. Llavors

$$\text{flux} = - \int_D 2\sqrt{1-x^2-y^2} \, dx \, dy = (\text{polars}) = -2 \int_0^1 \int_0^{2\pi} r\sqrt{1-r^2} \, dr \, d\theta = -4\pi/3$$

8. Considerem la part de l'astroide $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ que es troba en el semiplà $x \geq 0$ i la fem girar al voltant de l'eix y . Llavors l'àrea de la figura de revolució obtinguda és

- (a) $13\pi a^2/5$. (b) $\pi a^2/5$. (c) $12\pi a^2/5$. ■ (d) $8\pi a^2/5$. (e) Cap de les anteriors.

Resolució: Prenem la parametrització de l'astroide $\sigma(t) = (a \cos^3 t, a \sin^3 t)$, $t \in [-\pi/2, \pi/2]$. Llavors $\|\sigma'(t)\| = 3a|\cos t \sin t|$ i per Pappus-Guldin

$$A = 2\pi \bar{x} l(C) = 2\pi \int_C x \, dl = 6\pi a^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4 t |\sin t| \, dt = 12\pi a^2 \int_0^{\pi/2} \cos^4 t \sin t \, dt = 12\pi a^2/5$$