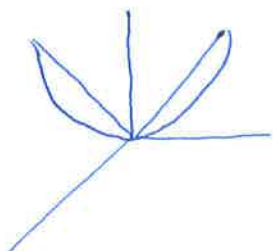


1. Calculeu l'àrea de la superfície $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 2z = x^2 + y^2, z^2 \leq x^2 + y^2\}$

- (a) $\frac{4\pi}{3}[5^{3/2} + 1]$. (b) $\frac{2\pi}{3}[5^{3/2} - 1]$. ■ (c) $\frac{2\pi}{3}[5^{3/2} + 2]$.
 (d) $\frac{\pi}{3}[5^{3/2} - 1]$. (e) Cap de les anteriors

Resolució:



$$\begin{cases} 2z = x^2 + y^2 \\ z^2 = x^2 + y^2 \end{cases} \rightarrow z = \begin{matrix} \nearrow 0 \\ \searrow 2 \end{matrix}$$

$$S: z = \frac{x^2 + y^2}{2} \quad \forall (x, y) \in S = \{x^2 + y^2 \leq 4\} \subset \mathbb{R}^2$$

$$\begin{aligned} A(S) &= \int_D \|(x, y, -1)\| \, dxdy = \int_D \sqrt{1 + x^2 + y^2} \, dxdy = \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \sqrt{1 + r^2} r \, dr d\theta = \frac{2\pi}{3} [5^{3/2} - 1] \end{aligned}$$

2. Calculeu la massa de la superfície S que és el tros de pla $x + y + z = 1$ en el primer octant si la densitat en tot punt ve donada per la distància del punt al pla yz .

- (a) $\sqrt{2}/6$. (b) $\sqrt{2}/3$. (c) $\sqrt{5}/6$. (d) $\sqrt{3}/6$. ■ (e) Cap de les anteriors.

Resolució: S és un triangle de vèrtexs $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$

$$z = 1 - x - y \quad \forall (x, y) \in D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x\}$$

$$\|(z_x, z_y, -1)\| = \sqrt{3}$$

$$m(S) = \int_S \varphi dS = \int_S x dS = \sqrt{3} \int_D x dxdy = \sqrt{3} \int_0^1 \int_0^{1-x} x dy dx = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

3. Calculeu la circulació del camp $F(x, y) = (\sqrt{x^2 + y^2}, 0)$ al llarg de la cardioide, que en coordenades polars té per equació $r(\theta) = 1 + \cos \theta$, orientada en sentit antihorari

- (a) $\frac{3\pi}{1}$. (b) π . (c) 0. ■ (d) -2π . (e) Cap de les anteriors.

Resolució: Prent la parametrització $\sigma(\theta) = (r(\theta) \cos \theta, r(\theta) \sin \theta)$, $\theta \in [0, 2\pi]$

$$\sigma'(\theta) = (-\sin \theta - \sin 2\theta, \cos 2\theta + \cos \theta)$$

$$\begin{aligned} \int_C \langle \vec{F}, d\vec{\ell} \rangle &= \int_0^{2\pi} \langle (1 + \cos \theta, 0), (-\sin \theta - \sin 2\theta, *) \rangle d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} (-\sin \theta - \sin 2\theta - \sin \theta \cos \theta - 2 \sin \theta \cos^2 \theta) d\theta = 0 \end{aligned}$$

4. Calculeu $\int_C (x^3 + y^2) d\ell$ on C és la vora del cilindre $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 4, -1 \leq z \leq 1\}$.

- (a) 16π . ■ (b) -2π . (c) π . (d) 1. (e) Cap de les anteriors.

$$\text{Resolució: } 2 \left[\int_C x^3 d\ell + \int_C y^2 d\ell \right] = 2 \int_0^{2\pi} 4 \sin^2 \theta 2 d\theta = 16\pi$$

(*) la primera integral val 0, per simetria.

5. Calculeu la circulació del camp $\vec{F}(x, y, z) = (x, y, z)$ al llarg de la corba $\sigma(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, e^t)$ que va del punt $A = (1, 0, 1)$ al punt $B = (e^{2\pi}, 0, e^{2\pi})$

(a) $e^{2\pi} - 1$. (b) $e^{4\pi} + 2$. (c) $e^{4\pi} + 1$. (d) $e^{4\pi} - 1$. ■ (e) Cap de les anteriors.

Resolució: $F = \text{grad} f$, on $f = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$. Apliquem el teorema de Newton-Leibnitz:

$$\int_C \langle \vec{F}, d\vec{\ell} \rangle = f(B) - f(A) = e^{4\pi} - 1.$$

6. Calculeu $\int_C f d\ell$ essent C la corba parametritzada per $\sigma(\theta) = (\theta \cos \theta, \theta \sin \theta, \theta)$, $\theta \in [0, 2\pi]$ i $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

(a) $\frac{2}{3} [(1 + 2\pi^2)^{3/2} + 1]$. (b) $\frac{2}{3} [(2\pi^2 - 1)^{3/2} + 1]$. (c) $\frac{4}{3} [(1 + 2\pi^2)^{3/2} - 1]$. ■
(d) $\frac{4}{3} [(1 + \pi^2)^{3/2} - 1]$. (e) Cap de les anteriors.

Resolució: $\|\sigma'(\theta)\| = \|\cos \theta - \theta \sin \theta, \sin \theta + \theta \cos \theta, 1\| = \sqrt{2 + \theta^2}$; $\int_C f d\ell = \int_0^{2\pi} \sqrt{2\theta} \sqrt{2 + \theta^2} d\theta = \frac{\sqrt{2}}{3} [(2 + \theta^2)^{3/2}]_0^{2\pi} = \frac{\sqrt{2}}{3} [(2 + 4\pi^2)^{3/2} - 2^{3/2}] = \frac{4}{3} [(1 + 2\pi^2)^{3/2} - 1]$.

7. Calculeu $\oint_C [y - \ln(x^2 + y^2)] dx + 2 \arctan \frac{y}{x} dy$ on C és $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 1$ orientada en sentit contrari a les agulles del rellotge.

(a) $-\pi$. ■ (b) π . (c) 2π . (d) 3π . (e) Cap de les anteriors.

Resolució: $A =$ àrea tancada per la corba.

$$Q = 2 \arctan \frac{y}{x} \implies Q_x = 2 \frac{1}{1 + (\frac{y}{x})^2} \frac{-y}{x^2} = \frac{-2y}{x^2 + y^2}$$

$$P = y - \ln(x^2 + y^2) \implies P_y = 1 - \frac{2y}{x^2 + y^2}$$

$$\oint_C P dx + Q dy \stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{T. Green}}}{=} \iint_D (Q_x - P_y) dx dy$$

$$D = \iint_D (-1) dx dy = -\text{Àrea}(D) = -\pi \cdot 1^2 = -\pi$$

8. Calculeu el flux del camp $\vec{F} = (2x^2, 3y^2, z^2)$ a través de la superfície $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 = x^2 + y^2, \frac{1}{2} \leq z \leq 1\}$ orientada en el punt $(\frac{3}{4}, 0, \frac{3}{4})$, pel vector $(1, 0, -1)$.

(a) $-3\pi/2$. (b) $-15\pi/32$. ■ (c) $\pi/8$. (d) $-255\pi/512$. (e) Cap de les anteriors.

Resolució: S és un tros de con $z = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \forall (x, y) \in D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{4} \leq x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Prenem $(z_x, z_y, -1) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, -1 \right)$

$$\begin{aligned} \int_S \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle &= \int_D \langle (2x^2, 3y^2, x^2 + y^2), \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, -1 \right) \rangle dx dy = \\ &= 2 \int_D \frac{x^3}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy + 3 \int_D \frac{y^3}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy - \int_D (x^2 + y^2) dx dy = \\ &= \int_0^{2\pi} \int_{1/2}^1 r^3 dr d\theta = -\frac{15\pi}{32} \quad (\text{les dues primeres integrals són 0 per simetria}). \end{aligned}$$