

1. Calculeu $\int_S f dS$ on $f(x, y, z) = x^3$ essent S la superfície $x^2 + y^2 = 1$, $0 \leq z \leq 1$

(a) 0. ■ (b) 1. (c) $-1/2$. (d) $2/3$. (e) Cap de les anteriors

Resolució: 0, per simetria.

2. Sigui $S = S_1 \cup S_2 \subset \mathbb{R}^3$ la superfície definida per

$$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq 1\},$$

$$S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1, z \geq 1\}$$

orientada segons la normal exterior. Sigui $\vec{F}(x, y, z) = (-y + yz^2, x + xyz^3, x^2z^4)$. Calcular $\int_S \langle \text{rot } F, dS \rangle$.

(a) $3\pi/2$. (b) 2π . ■ (c) 0. (d) 1. (e) Cap de les anteriors.

Resolució: Pel t. Stokes,

$$\int_S \langle \text{rot } F, dS \rangle = \oint_{C=\partial S} \langle F, d\ell \rangle = \int_0^{2\pi} \langle (-\sin t, \cos t, 0), (-\sin t, \cos t, 0) \rangle dt = 2\pi$$

3. Calculeu l'àrea de la superfície S continguda en el pla $\Pi \equiv x + y + z = 1$ sobre l'el·lipse plana $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2y^2 \leq 1\}$.

(a) $\sqrt{2}\pi/3$. (b) $\sqrt{3}\pi/2$. (c) $\sqrt{\frac{3}{2}}\pi$. ■ (d) $\sqrt{\frac{2}{3}}\pi$. (e) Cap de les anteriors.

Resolució: $z = 1 - x - y$, $\forall (x, y) \in D$

$$\| (z_x, z_y, -1) \| = \sqrt{3}; \quad A(S) = \int_D \sqrt{3} dx dy = \sqrt{3} A(D) = \sqrt{\frac{3}{2}} \pi.$$

4. Calculeu la circulació de $\vec{F}(x, y, z) = (0, y, 2x)$ al llarg de la corba C , essent C el triangle format a l'intersecar el pla $\Pi \equiv 2x + 2y + z = 6$ amb els tres eixos de coordenades. La corba C està orientada de manera compatible amb orientar la regió plana tancada pel triangle segons el vector normal unitari $N(x, y, z) = (2, 2, 1)/\sqrt{9}$.

(a) 24. (b) 16. (c) -9 . (d) -18 . ■ (e) Cap de les anteriors.

Resolució: Pel T. Stokes, i com que $\text{rot } \vec{F} = (0, -2, 0)$, es té circulació $= \int_D \langle (0, -2, 0), (2, 2, 1) \rangle dx dy = -4A(D) = -18$, on S es l'interior del triangle C i D es l'interior del triangle de vèrtexos $(0, 0)$, $(3, 0)$ y $(0, 3)$, es a dir, D és la projecció de S sobre $\{z = 0\}$.

5. Calculeu el flux del camp $\vec{F}(x, y, z) = (\sqrt{R^2 - x^2}, 0, 2xy)$ a través de la superfície

$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = R^2, x, y \geq 0, 0 \leq z \leq h\}$ orientada segons el vector normal $\frac{1}{R}(x, y, 0)$.

(a) 0. (b) $\frac{R^2 h}{2}$. ■ (c) $\frac{R^2 h}{4}$. (d) $\frac{Rh}{2}$. (e) Cap de les anteriors.

Resolució: $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, $\forall (x, z) \in K = [0, R] \times [0, h]$.

$$-(y_x, -1, y_z) = \left(\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}, 1, 0 \right)$$

$$\text{flux} = \int_0^R \int_0^h \langle (\sqrt{R^2 - x^2}, 0, 2xy), \left(\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}, 1, 0 \right) \rangle dz dx = \int_0^R \int_0^h x dz dx = \frac{R^2 h}{2}.$$

6. Calculeu l'àrea de la valla que té per base el quart d'astroide parametrizat per $\sigma(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$, $0 \leq t \leq \pi/2$, i l'alçada està donada per la funció $h(x, y) = y$.

(a) 0. (b) $3/5$. ■ (c) $4/5$. (d) $2/5$. (e) Cap de les anteriors.

Resolució: $\|\sigma'(t)\| = 3 \cos t \sin t$

$$\text{Àrea} = \int_C h d\ell = \int_0^{\pi/2} \sin^3 t \cdot 3 \cos t \sin t dt = \frac{3}{5}.$$

7. Considerem en el pla (x, z) el quadrat centrat al punt $(2, 0)$ i de costat la unitat. Sigui C la vora d'aquest quadrat, i fem girar C al voltant de l'eix z generant una superfície de revolució S . Calculeu l'àrea de S .

(a) $12\pi^2$. (b) 16π . ■ (c) 4π . (d) 8π . (e) Cap de les anteriors.

Resolució: Per Pappus-Guldin; $A(S) = \ell(C)2\pi\bar{x} = 4 \cdot 2\pi 2 = 16\pi$.

8. Calculeu el flux de $\vec{F}(x, y, z) = (-2x, x^2, 2z)$ a través de la superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2, z \leq 2\}$$

orientada pel vector $(0, 0, -1)$ a l'origen.

(a) 9π . (b) 6π . (c) -8π . ■ (d) -12π . (e) Cap de les anteriors.

Resolució: Sigui W tal que $S \cup T = \partial W$, T un tros de pla, orientada per la normal exterior $\int_S \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle + \int_T \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle = \int_W \text{div } F dx dy dz = 0 \implies \int_S \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle = - \int_T \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle = - \int_{x^2+y^2 \leq 2} \langle (-2x, x, 4), (0, 0, 1) \rangle dx dy = -8\pi$.