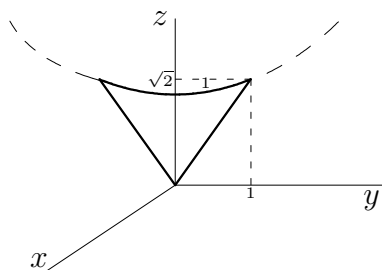


1. (4 punts) Considerem el volum $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 - 1 \leq x^2 + y^2, \frac{1}{2}z^2 \geq x^2 + y^2, z \geq 0\}$. Donada una funció $f(x, y, z)$ continua sobre W , trieu o bé coordenades cilíndriques o bé coordenades esfèriques (una sola tria) i expresseu $\int_W f(x, y, z) dx dy dz$ en aquestes coordenades (*Nota: No s'ha de fer cap integral.*)

Resolució:

- (a) En coordenades cilíndriques



$$(a.1) \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r dr \int_{\sqrt{2}r}^{\sqrt{1+r^2}} f dz$$

$$(a.2) \int_0^1 dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{z}{\sqrt{2}}} r f dr + \int_1^{\sqrt{2}} dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\sqrt{z^2-1}}^{\frac{z}{\sqrt{2}}} r f dr$$

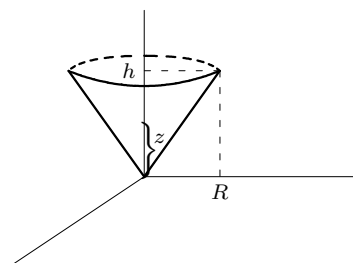
- (b) En coordenades esfèriques

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_{\arctan \sqrt{2}}^{\pi/2} d\phi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{\sin^2 \phi - \cos^2 \phi}}} f r^2 \cos \phi dr$$

$$\text{ja que } z^2 - 1 = x^2 + y^2 \iff r^2 \sin^2 \phi - 1 = r^2 \cos^2 \phi \iff r = \frac{1}{\sqrt{\sin^2 \phi - \cos^2 \phi}}$$

2. (6 punts) Calculeu la càrrega total a la cara lateral del con d'alçada h i radi R si la densitat de càrrega és igual a la distància a la **base** del con.

Resolució:

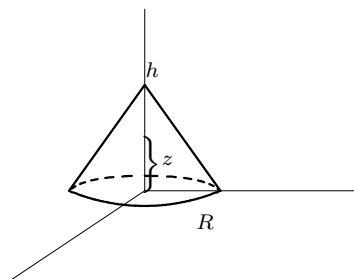


$$z = \frac{h}{R} \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \forall (x, y) \in K = \{x^2 + y^2 \leq R^2\} \subset \mathbb{R}^2$$

$$\rho(x, y, z) = h - z$$

$$Q = \int_S \rho dS = \int_K (h - z) \|(z_x, z_y, -1)\| dx dy$$

o bé



$$z = h - \frac{h}{R} \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \forall (x, y) \in K = \{x^2 + y^2 \leq R^2\} \subset \mathbb{R}^2$$

$$\rho(x, y, z) = z$$

$$\begin{aligned} Q &= \int_K z \|(z_x, z_y, -1)\| dx dy && \stackrel{\uparrow}{=} \frac{\sqrt{h^2 + R^2}}{R} \\ &= \frac{\sqrt{h^2 + R^2}}{R} \int_K \left(h - \frac{h}{R} \sqrt{x^2 + y^2} \right) dx dy = \\ &= \frac{\sqrt{h^2 + R^2}}{R} \left[hA(K) - \frac{h}{R} \int_0^{2\pi} \int_0^R r^2 dr d\theta \right] = \frac{\pi Rh}{3} \sqrt{h^2 + R^2}. \end{aligned}$$