

Prueba de Ecuaciones Diferenciales

Fecha: 20 de marzo de 2013 Depositado en www.ma1.upc.edu/~ed/ Tiempo: 75 minutos (2 problemas)

Problema 1 [5 puntos]. Sea C la hélice de radio R parametrizada por

$$\sigma(t) = (R \cos t, R \sin t, t), \quad 0 \leq t \leq 4\pi,$$

con densidad lineal

$$\rho(x, y, z) = \begin{cases} \rho_0, & \text{si } z < 2\pi \\ 2\pi\rho_0/z, & \text{si } z > 2\pi. \end{cases}$$

1. ¿Cuántas vueltas alrededor del eje z da esta curva?
2. Calcular su masa $m(C)$.
3. Sea $\bar{z}$ la componente vertical del centro de masas: $\text{CM}(C) = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$. Decir si $\bar{z}$ es mayor o menor que 2π y justificarlo mediante un argumento físico, sin realizar ningún cálculo.
4. Calcular $\bar{z}$ y comprobar la propiedad anterior usando que $\log 2 > 1/2$.
Aclaración: En este apartado la función “log” denota al logaritmo neperiano.
5. Calcular la constante c tal que $I_z = c m(C) R^2$, donde I_z es el momento de inercia de la hélice respecto al eje vertical.

Solución:

1. Dos vueltas, pues el ángulo t se mueve en el intervalo $[0, 4\pi]$.
2. El elemento diferencial de longitud es $d\ell = \|\sigma'(t)\|dt = \sqrt{R^2 + 1}dt$ y la masa es la integral de la densidad lineal. Por tanto,

$$m(C) = \int_C \rho d\ell = \sqrt{R^2 + 1} \int_0^{4\pi} \rho(\sigma(t)) dt = \sqrt{R^2 + 1} \rho_0 \left[\int_0^{2\pi} dt + \int_{2\pi}^{4\pi} \frac{2\pi}{t} dt \right] = 2(1 + \log 2) \pi \sqrt{R^2 + 1} \rho_0.$$

3. La densidad es constante en el intervalo $[0, 2\pi]$, cuando la hélice describe su primera vuelta, y decrece en el intervalo $[2\pi, 4\pi]$, cuando la hélice describe su segunda vuelta. Por tanto, $m(C_1) > m(C_2)$ donde C_1 y C_2 son las partes de la hélice correspondientes a la primera y segunda vuelta. Y esto implica que $\bar{z} < 2\pi$, pues más de la mitad de la masa de la hélice está por debajo del plano $\{z = 2\pi\}$.
4. La componente vertical del centro de masas es el cociente

$$\bar{z} = \frac{1}{m(C)} \int_C z \rho d\ell = \frac{1}{2(1 + \log 2) \pi} \left[\int_0^{2\pi} t dt + \int_{2\pi}^{4\pi} t \frac{2\pi}{t} dt \right] = \frac{2\pi^2 + 4\pi^2}{2(1 + \log 2) \pi} = \frac{3\pi}{1 + \log 2} < \frac{3\pi}{1 + 1/2} = 2\pi,$$

pues $\log 2 > 1/2$.

5. El momento de inercia respecto al eje vertical es la integral

$$I_z = \int_C (x^2 + y^2) \rho d\ell = \int_C R^2 \rho d\ell = R^2 \int_C \rho d\ell = m(C) R^2.$$

Por tanto, $c = 1$.

Prueba de Ecuaciones Diferenciales

Fecha: 20 de marzo de 2013 Depositado en www.ma1.upc.edu/~ed/ Tiempo: 75 minutos (2 problemas)

Problema 2 [5 puntos]. Consideramos la superficie cerrada $S = S_1 \cup S_2$ formada por los trozos

$$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \cos(\pi x/2) \cos(\pi y/2), |x| \leq 1, |y| \leq 1\},$$

$$S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0, |x| \leq 1, |y| \leq 1\},$$

orientada según su vector normal exterior y el campo $\mathbf{F} = (P, Q, R)$ cuyas componentes son

$$P(x, y, z) = \cos(\pi x/2), \quad Q(x, y, z) = \cos(\pi y/2), \quad R(x, y, z) = 1.$$

1. Realizar un dibujo aproximado de la superficie S .
2. Calcular el flujo $\oint_S \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle$.

Solución:

1. Cada trozo S_j es la gráfica de una función $z = f_j(x, y)$ sobre el cuadrado $D = [-1, 1] \times [-1, 1]$, para $j = 1, 2$. Concretamente, $f_1(x, y) = \cos(\pi x/2) \cos(\pi y/2)$ y $f_2(x, y) \equiv 0$. Como $f_1(x, y) > 0$ cuando $(x, y) \in (-1, 1) \times (-1, 1)$ y $f_1(x, y) = 0$ cuando $(x, y) \in \partial D$, los dos trozos empalman bien, siendo S_1 el “superior” y S_2 el “inferior”. En particular, vemos que S es una superficie cerrada.
2. Calculamos el flujo a través de cada trozo, escogiendo la orientación adecuada en cada uno. Concretamente, debemos orientar S_1 según su vector normal de componente vertical positiva y S_2 según su vector normal de componente vertical negativa.

Para calcular el primer flujo usamos la fórmula adaptada a superficies que son gráficas de funciones sobre un dominio plano:

$$\begin{aligned} \int_{S_1} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle &= \int_D [R(x, y, f_1(x, y)) - P(x, y, f_1(x, y)) \partial_x f_1(x, y) - Q(x, y, f_1(x, y)) \partial_y f_1(x, y)] dx dy \\ &= \int_D dx dy + \frac{\pi}{2} \int_D [\sin(\pi x/2) + \sin(\pi y/2)] \cos(\pi x/2) \cos(\pi y/2) dx dy = \text{Area}(D) = 4. \end{aligned}$$

En la penúltima igualdad hemos usado que el cuadrado D es simétrico respecto su centro $(0, 0)$ y que la función trigonométrica que aparece en la integral más complicada es impar, luego esa integral vale cero.

Para calcular el segundo flujo, comprobamos que la componente normal del campo determinada por el vector normal exterior unitario $\mathbf{N} = -\mathbf{k} = (0, 0, -1)$ es constante, pues

$$F_N := \langle \mathbf{F}, \mathbf{N} \rangle = \langle (P, Q, R), (0, 0, -1) \rangle = -R \equiv -1.$$

Por tanto,

$$\int_{S_2} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle = \int_{S_2} F_N dS = - \int_{S_2} dS = -\text{Area}(S_2) = -4.$$

Finalmente, el flujo total es la suma de flujos: $\oint_S \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle = \int_{S_1} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle + \int_{S_2} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle = 4 + (-4) = 0$.
