

Prueba de Ecuaciones Diferenciales

Fecha: 10 de octubre de 2012

Depositado en www.ma1.upc.edu/~ed/

Tiempo: 75 minutos

Nombre:

Apellidos:

Identidades trigonométricas. Os recordamos, por si las necesitais, las siguientes identidades:

$$\cos^2 t = \frac{1 + \cos(2t)}{2}, \quad \sin^2 t = \frac{1 - \cos(2t)}{2}, \quad \cos^3 t = \frac{3 \cos t + \cos(3t)}{4}, \quad \sin^3 t = \frac{3 \sin t - \sin(3t)}{4}.$$

Problema 1 [6 puntos]. Consideramos el octante de esfera hueca de radio R y densidad superficial constante ρ_0 dado por

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = R^2, x, y, z \geq 0\}.$$

1. Calcular su masa $m(S)$.
2. Calcular su centro de masas $\text{CM}(S) = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$.
3. Calcular su momento de inercia I_z respecto al eje z .

(Observación: Podeis usar la igualdad $I_z = \frac{2}{3} m(S) R^2$ para comprobar algunos resultados.)

Solución: Parametrizamos el octante de esfera mediante la longitud $\theta \in [0, \pi/2]$ y la latitud $\phi \in [0, \pi/2]$. Es decir, $S = \varphi(D) \subset \mathbb{R}^3$, donde

$$D = [0, \pi/2] \times [0, \pi/2], \quad \varphi(\theta, \phi) = (R \cos \phi \cos \theta, R \cos \phi \sin \theta, R \sin \phi).$$

En clase ya vimos que el elemento de superficie de esta parametrización es

$$dS = R^2 \cos \phi d\theta d\phi.$$

Para calcular la masa, recordamos que una esfera de radio R tiene área $4\pi R^2$, luego

$$m(S) = \int_S \rho_0 dS = \rho_0 \text{Area}(S) = \rho_0 (4\pi R^2)/8 = \pi R^2 \rho_0/2.$$

A continuación, calculamos el centro de masas. El octante S tiene simetría especular respecto a tres planos diferentes: $\{x = y\}$, $\{y = z\}$ y $\{x = z\}$. Por tanto, su centro de masas está situado sobre los tres planos: $\bar{x} = \bar{y} = \bar{z}$, luego basta calcular una de las tres coordenadas. La más simple es $\bar{z}$.

Empezamos calculando la integral

$$\begin{aligned} \int_S z \rho_0 dS &= \int_D R \sin \phi \rho_0 R^2 \cos \phi d\theta d\phi = R^3 \rho_0 \left(\int_0^{\pi/2} d\theta \right) \left(\int_0^{\pi/2} \sin \phi \cos \phi d\phi \right) \\ &= R^3 \rho_0 \frac{\pi}{2} \left[\frac{1}{2} \sin^2 \phi \right]_{\phi=0}^{\phi=\pi/2} = \pi R^3 \rho_0/4. \end{aligned}$$

Así pues, usando la definición de centro de masas, obtenemos que

$$\bar{z} = \frac{1}{m(S)} \int_S z \rho_0 dS = R/2,$$

luego el centro de masas es el punto $\text{CM}(S) = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (\bar{z}, \bar{z}, \bar{z}) = (R/2, R/2, R/2)$.

Finalmente, calculamos el momento de inercia:

$$\begin{aligned} I_z &= \int_S (x^2 + y^2) \rho_0 dS = \int_D R^2 \cos^2 \phi \rho_0 R^2 \cos \phi d\theta d\phi = R^4 \rho_0 \left(\int_0^{\pi/2} d\theta \right) \left(\int_0^{\pi/2} \cos^3 \phi d\phi \right) \\ &= R^4 \rho_0 \frac{\pi}{2} \frac{1}{4} \int_0^{\pi/2} (3 \cos \phi + \cos(3\phi)) d\phi = \frac{\pi}{8} R^4 \rho_0 \left[3 \sin \phi + \frac{\sin(3\phi)}{3} \right]_{\phi=0}^{\phi=\pi/2} = \frac{\pi}{3} R^4 \rho_0 = \frac{2}{3} m(S) R^2. \end{aligned}$$

Prueba de Ecuaciones Diferenciales

Fecha: 10 de octubre de 2012

Depositado en www.ma1.upc.edu/~ed/

Tiempo: 75 minutos

Nombre:

Apellidos:

Problema 2 [4 puntos]. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Consideramos el campo $\mathbf{F}(x, y) = (y, \alpha + \beta x)$ y las curvas

$$C_1 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{4} + y^2 = 1, x \geq 0 \right\}, \quad C_2 = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0, -1 \leq y \leq 1 \}.$$

Ambas curvas unen los puntos $A = (0, -1)$ y $B = (0, 1)$.

1. Dibujar y parametrizar las dos curvas.
2. Calcular la circulación del campo $\mathbf{F}$ a lo largo de cada curva, orientadas desde A hasta B .
3. Sea $C = C_1 \cup C_2$ la curva cerrada orientada en sentido antihorario. Calcular la circulación $\oint_{C^+} \langle \mathbf{F}, d\ell \rangle$.
4. Probar, usando alguno de los dos apartados anteriores, que el campo $\mathbf{F}(x, y) = (y, \alpha + \beta x)$ no es conservativo cuando $\beta \neq 1$.

Solución: La curva C_1 es la semiellipse contenida en el semiplano $\{x \geq 0\}$ centrada en el origen cuyo semieje horizontal mide $a = 2$ y cuyo semieje vertical mide $b = 1$. La parametrizamos mediante $\sigma_1 : [-\pi/2, \pi/2] \rightarrow \mathbb{R}^2$, donde

$$\sigma_1(t) = (a \cos t, b \sin t) = (2 \cos t, \sin t).$$

Por tanto, la circulación del campo $\mathbf{F}$ a largo de esta semiellipse es

$$\begin{aligned} \int_{C_1} \langle \mathbf{F}, d\ell \rangle &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \langle \mathbf{F}(\sigma_1(t)), \sigma_1'(t) \rangle dt \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \langle (\sin t, \alpha + 2\beta \cos t), (-2 \sin t, \cos t) \rangle dt \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\alpha \cos t + 2\beta \cos^2 t - 2 \sin^2 t) dt \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\alpha \cos t + (\beta - 1) + (\beta + 1) \cos(2t)) dt \\ &= \alpha \left[\sin t \right]_{t=-\pi/2}^{t=\pi/2} + (\beta - 1)\pi + (\beta + 1) \left[\frac{\sin(2t)}{2} \right]_{t=-\pi/2}^{t=\pi/2} \\ &= 2\alpha + (\beta - 1)\pi. \end{aligned}$$

La curva C_2 es el segmento de extremos $A = (0, -1)$ y $B = (0, 1)$. La parametrizamos mediante $\sigma_2 : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, donde

$$\sigma_2(t) = (0, t).$$

Por tanto, la circulación del campo $\mathbf{F}$ a largo de este segmento vertical es

$$\int_{C_2} \langle \mathbf{F}, d\ell \rangle = \int_{-1}^1 \langle (t, \alpha), (0, 1) \rangle dt = \int_{-1}^1 \alpha dt = 2\alpha.$$

Finalmente, la circulación del campo $\mathbf{F}$ a lo largo de la curva $C = C_1 \cup C_2$ es igual a

$$\oint_{C^+} \langle \mathbf{F}, d\ell \rangle = \int_{C_1} \langle \mathbf{F}, d\ell \rangle + \int_{C_2} \langle \mathbf{F}, d\ell \rangle = 2\alpha + (\beta - 1)\pi + 2\alpha = (2\beta + 1)\pi.$$

Si $\beta \neq 1$, entonces $\oint_{C^+} \langle \mathbf{F}, d\ell \rangle \neq 0$, luego el campo $\mathbf{F}$ no es conservativo. (Un campo es conservativo cuando sus circulaciones a lo largo de caminos cerrados son iguales a cero.)