

Apunts d'EQUACIONS DIFERENCIALS

Grau en Enginyeria en Tecnologies Industrials (GETI)

ETSEIB – UPC

Rafael Ramírez Ros

Departament de Matemàtiques
ETS d'Enginyeria Industrial de Barcelona (ETSEIB)
Universitat Politècnica de Catalunya (UPC)

Versió: Setembre 2020

<https://mat-web.upc.edu/etseib/ed/>

Continguts

Càlcul vectorial (CV)		pàg. 2
Equacions diferencials ordinàries (EDOs)		pàg. 21
Equacions en derivades parcials (EDPs)		pàg. 38

Nota: Tot el text subratllat són enllaços a pàgines web on podeu trobar més informació, o bé practicar amb alguns applets de Java que poden ajudar a entendre millor diversos conceptes.

Càlcul Vectorial (CV)

Aquest primer tema tracta sobre conceptes matemàtics (longitud, àrea, volum, camps de vectors, circulació, flux, gradient, divergència, rotacional, laplaciana) i físics (massa, centre de masses, moment d'inèrcia, treball, camps de força de tipus gravitatori, magnètic o elèctric, camps de velocitats de fluids, fluxos de calor) que es defineixen mitjançant (o apareixen en) integrals.

És *imperatiu* dominar les eines bàsiques d'integració en dominis de $\mathbb{R}^n$: el teorema de Fubini i els canvis de variable a coordenades polars, polars adaptades a una el·lipse, cilíndriques, cilíndriques adaptades, esfèriques, i esfèriques adaptades a un el·lipsoide.

Aquí durem l'estudi d'integrals una mica més enllà. Algunes de les preguntes que volem respondre, si el temps ens ho permet, són les següents:

- Com podem calcular la longitud d'una corba o l'àrea d'una superfície?
- Tenim dos objectes (filferro, planxa...) homogenis de la mateixa mida, massa i densitat, però diferent forma. Quin té menys resistència a girar sobre un eix que els travessa pel seu "centre"?
- Podem calcular l'àrea d'un llac sense mullar-nos?
- Com funciona un planímetre?
- Quina és relació entre el flux elèctric a través d'una superfície tancada i la càrrega elèctrica que tanca? (La resposta és la llei de Gauss, una de les quatre equacions de Maxwell.)
- És cert que el camp gravitatori creat per un planeta al seu exterior coincideix amb el creat per una massa puntual situada al seu centre i que concentra tota la seva massa? (La resposta és sí. Una de les principals contribucions de Newton, sens dubte.)

Per tal d'evitar complicacions innecessàries, totes les funcions que apareixen en aquest tema són, almenys, contínues a trossos i tots els dominis seran compactes i connexos amb fronteres $\mathcal{C}^1$ a trossos.

INTEGRALS DE FUNCIONS I CAMPS SOBRE CORBES

Introduïrem en aquesta secció el concepte de corba, el càlcul de longituds de corbes, i definirem els símbols

- $\int_C f d\ell$ = Integral d'una funció $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ sobre una corba $C \subset \mathbb{R}^n$; i
- $\int_C \langle \mathbf{F}, d\ell \rangle$ = circulació d'un camp $\mathbf{F} : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ al llarg d'una corba $C \subset U$.

Corbes. Una partícula en moviment, si descartem la teleportació, descriu una corba contínua que pot tenir singularitats; és a dir, punts en els quals la partícula canvia bruscament de direcció o fins i tot torna enrere. L'estudi de corbes amb singularitats presenta unes dificultats que intentarem obviar mitjançant la següent exposició informal.

Una corba és *suau* quan no tenen punxes ni angles (el símbol $\prec$ té una punxa i $\triangleleft$ té tres angles); *simple* quan no s'autointersecta (els símbols $\heartsuit$ i $\subset$ són corbes simples, però $\propto$ i $\bowtie$ no ho són); i *tancada* quan comença i acaba al mateix punt (la lletra o i el símbol ∞ són corbes tancades). Tots els exemples anteriors de corbes no suaus i/o no simples, es poden descompondre en diversos trossos suaus i simples.

Una partícula pot recórrer una corba a diferents velocitats, cada possibilitat dona lloc a una trajectòria diferent tot i que la corba no canvia. No obstant, una corba simple no tancada d'extremes A i B només té dues orientacions possibles: de A a B o de B a A . Anàlogament, les corbes tancades simples també tenen dues orientacions. Per exemple, una corba tancada simple plana es pot recórrer en sentit horari o en sentit antihorari.

Tractar les corbes com a subconjunts de $\mathbb{R}^n$ no és pràctic, és millor parametritzar-les de manera bijectiva, la qual cosa equival a recórrer la corba seguint una de les seves dues possibles orientacions, sense fer mitja volta. Les integrals de funcions sobre corbes no depenen en absolut de la parametrització, mentre que les circulacions de camps al llarg de corbes només depenen de l'orientació escollida: en canviar l'orientació, canvia el signe de la circulació.

Intuïtivament, una corba *regular* és una corba suau i simple que es recorre seguint una de les seves dues orientacions, sense que la velocitat de la partícula es pugui anul·lar en cap punt. Formalment, una corba regular de $\mathbb{R}^n$ és el rang (és a dir, la imatge)

$$C = \sigma(I) = \{\sigma(t) : t \in I\} \subset \mathbb{R}^n$$

d'una aplicació $\sigma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, que rep el nom de *parametrització regular*, definida sobre un interval compacte $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ tal que σ és injectiva¹, $\sigma \in \mathcal{C}^1(I; \mathbb{R}^n)$ i

$$\sigma'(t) \neq \mathbf{0}, \quad \forall t \in I = [a, b].$$

Una corba és *regular a trossos* quan està composta per un nombre finit de corbes regulars. Totes les corbes que estudiarem són regulars a trossos, malgrat que no sempre ho esmentarem.

Donada una corba regular $C = \sigma(I) \subset \mathbb{R}^n$, introduïm les notacions següents:

- $\sigma'(t)$ és un *vector tangent* a la corba C al punt $\sigma(t)$;
- $\|\sigma'(t)\|$ és la *velocitat* de la trajectòria $\sigma(t)$ a l'instant t ;

¹Amb la següent excepció: si la corba és *tancada*, llavors $\sigma(a) = \sigma(b)$ per definició.

- $\mathbf{T}(t) = \sigma'(t)/\|\sigma'(t)\|$ és el² *vector tangent unitari* a la corba C al punt $\sigma(t)$;
- $d\ell = \|\sigma'(t)\| dt$ és l'*element de longitud* de la parametrització σ al punt $\sigma(t)$; i
- $d\ell = \sigma'(t) dt = \mathbf{T}(t) d\ell$ és el *vector diferencial de longitud* de la parametrització σ al punt $\sigma(t)$.

Escriuim en negreta $\mathbf{0}$, $\mathbf{T}$ i $d\ell$ per remarcar que aquestes quantitats són vectors: tenen direcció i magnitud. A la pissarra escriurem $\vec{0}$, $\vec{T}$ i $d\vec{\ell}$. Ni l'element de longitud ni el vector diferencials de longitud poden anul·lar-se, ja que la corba és regular.

Longitud d'una corba. La distància recorreguda per una partícula que es desplaça a velocitats $v_1, \dots, v_N$ durant uns rangos de temps $\Delta t_1, \dots, \Delta t_N$ és $\sum_{i=1}^N v_i \Delta t_i$. Si la velocitat no es manté constant, n'hi ha prou amb substituir la suma per una integral, les velocitats v_i per la velocitat instantània $\|\sigma'(t)\|$ i els increments Δt_i pel diferencial dt . Així, la longitud de la corba regular $C = \sigma(I)$ és

$$\text{Long}(C) := \int_a^b \|\sigma'(t)\| dt.$$

Usant que la parametrització $\sigma(t)$ és de classe $\mathcal{C}^1$ i l'interval $I = [a, b]$ és compacte, deduïm que la funció $t \mapsto \|\sigma'(t)\|$ és fitada (acotada), i per tant tota corba regular té longitud finita.

Exemple 1. La longitud d'una corba no depèn ni de la velocitat ni de l'orientació amb què es recorre. És a dir, la longitud no depèn de la parametrització escollida. Exemplifiquem aquest fet intuïtivament obvi. Sigui C la circumferència de radi R . Considerem la parametrització obtinguda en recórrer C a velocitat angular constant no nul·la ω ; el signe de ω determina l'orientació. És a dir, $C = \sigma([0, 2\pi/|\omega|]) \subset \mathbb{R}^2$, amb $\sigma(t) = (R \cos \omega t, R \sin \omega t)$. La velocitat lineal és constant: $\|\sigma'(t)\| \equiv R|\omega|$. Per tant,

$$\text{Long}(C) = \int_0^{2\pi/|\omega|} R|\omega| dt = 2\pi R.$$

En canvi, com que la trajectòria $\sigma : [0, 2\pi k] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\sigma(t) = (R \cos t, R \sin t)$, $k \in \mathbb{N}$, recorre k cops la circumferència C , tenim $\int_0^{2\pi k} \|\sigma'(t)\| dt = 2\pi k R = k \text{Long}(C)$. Per aquest motiu hem imposat a la definició de corba regular que la seva parametrització sigui una aplicació injectiva. ▲

Exemple 2. La longitud d'una corba regular a trossos es calcula sumant les longituds de tots els seus trossos. Sigui $C = \sigma([0, \pi]) \subset \mathbb{R}^3$ la corba parametritzada per

$$\sigma(t) = \begin{cases} (R \cos t, R \sin t, 0), & \text{si } 0 \leq t \leq \pi/2, \\ (0, R, h(t - \pi/2)), & \text{si } \pi/2 \leq t \leq \pi. \end{cases}$$

Aleshores, $\text{Long}(C) = \int_0^{\pi/2} \|\sigma'(t)\| dt + \int_{\pi/2}^{\pi} \|\sigma'(t)\| dt = \int_0^{\pi/2} R dt + \int_{\pi/2}^{\pi} h dt = \pi(R + h)/2$. ▲

Exemple 3. Si la parametrització $\sigma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ no és regular, la corba $C = \sigma(I)$ pot tenir longitud infinita malgrat que l'interval I sigui compacte. Sigui $C = \sigma([0, 1]) \subset \mathbb{R}^2$ l'espiral parametritzada per

$$\sigma(t) = \begin{cases} (t \cos(2\pi/t), t \sin(2\pi/t)) & \text{si } 0 < t \leq 1 \\ (0, 0) & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

La parametrització és contínua a l'extrem $t = 0$ ja que $\lim_{t \rightarrow 0^+} \sigma(t) = (0, 0) = \sigma(0)$. No obstant,

$$\sigma'(t) = (\cos(2\pi/t) + 2\pi t^{-1} \sin(2\pi/t), \sin(2\pi/t) - 2\pi t^{-1} \cos(2\pi/t)),$$

i per tant la parametrització no és de classe $\mathcal{C}^1$ a l'extrem $t = 0$, ja que no existeix $\lim_{t \rightarrow 0^+} \sigma'(t)$. En cada interval de temps $I_k = [1/(k+1), 1/k]$, $k \in \mathbb{N}$, la partícula dóna una volta completa al voltant de l'origen. Sigui $C_k = \sigma(I_k)$ aquesta espira. Tenim

$$\text{Long}(C_k) = \int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} \|\sigma'(t)\| dt = \int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} \sqrt{1 + 4\pi^2 t^{-2}} dt = \int_k^{k+1} \sqrt{1 + 4\pi^2 s^2} \frac{ds}{s^2} \geq 2\pi \int_k^{k+1} \frac{ds}{s} \geq \frac{2\pi}{k+1}.$$

Per tant, $\text{Long}(C) = \sum_{k=1}^{\infty} \text{Long}(C_k) \geq 2\pi \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1} = \infty$. Hem comprovat que la partícula recorre una distància infinita en un temps finit, i per tant la velocitat ha de tendir a infinit en algun instant. Concretament, $\lim_{t \rightarrow 0^+} \|\sigma'(t)\| = \infty$. ▲

Exemple 4. Si la velocitat s'anul·la en alguns instants, però la parametrització és de classe $\mathcal{C}^1$ a tot I i la partícula recorre la corba mantenint la mateixa orientació, també podem calcular la longitud. Parametritzem l'astroide $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}\}$ com a $C = \sigma(I)$, on

$$\sigma(t) = (a \cos^3 t, a \sin^3 t), \quad I = [0, 2\pi].$$

²En realitat, en cada punt de la corba hi ha dos vectors tangents unitaris de sentits oposats.

La velocitat $\|\sigma'(t)\| = 3a|\cos t \sin t|$ s'anul·la als instants $t = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2, 2\pi$, però la partícula avança sempre en sentit antihorari. Per alliberar-nos del valor absolut que apareix a la velocitat, calculem la longitud de la part de l'astroide continguda al primer quadrant: $C_1 = \sigma(I_1)$, amb $I_1 = [0, \pi/2]$. Mitjançant un dibuix veiem, sense realitzar cap càlcul, que $\sqrt{2}a < \text{Long}(C_1) < 2a$, la qual cosa queda confirmada pel càlcul

$$\text{Long}(C_1) = \int_0^{\pi/2} \|\sigma'(t)\| dt = 3a \int_0^{\pi/2} \cos t \sin t dt = \frac{3a}{2} [\sin^2 t]_{t=0}^{t=\pi/2} = 3a/2.$$

Finalment, $\text{Long}(C) = 4 \text{Long}(C_1) = 6a$. ▲

Convé aprofitar al màxim la llibertat referent a l'elecció de la parametrització i escollir-la de manera que simplifiqui els càlculs. Tot seguit estudiem algunes eleccions típiques.

Gràfica plana. Si $C \subset \mathbb{R}^2$ és la gràfica $y = f(x)$ de una funció $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, aleshores:

- La parametrització més adequada és $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, amb $\sigma(x) = (x, f(x))$;
- L'element de longitud és $d\ell = \|\sigma'(x)\| dx = \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$; i per tant
- $\text{Long}(C) = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$.

Exemple 5. Sigui $y = f(x) = mx + n$ l'equació d'una recta que forma un angle $\alpha \in [0, \pi/2)$ amb l'eix d'abscisses. És a dir, $|m| = \tan \alpha$. Si C és la gràfica d'aquesta recta sobre un interval $I = [a, b]$, llavors el seu element de longitud ve donat per $d\ell = \sqrt{1 + m^2} dx = \frac{1}{\cos \alpha} dx$. Per tant,

$$\text{Long}(C) = \int_a^b \frac{dx}{\cos \alpha} = \frac{\text{Long}(I)}{\cos \alpha}.$$

Si $\alpha = 0$, la recta és horitzontal i $\text{Long}(C) = \text{Long}(I)$. A més, $\lim_{\alpha \rightarrow \pi/2} \text{Long}(C)/\text{Long}(I) = \infty$. ▲

Gràfica 3D. Si $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = f(x), z = g(x), x \in [a, b]\}$, aleshores:

- La parametrització més adequada és $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$, amb $\sigma(x) = (x, f(x), g(x))$;
- L'element de longitud és $d\ell = \|\sigma'(x)\| dx = \sqrt{1 + f'(x)^2 + g'(x)^2} dx$; i per tant
- $\text{Long}(C) = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2 + g'(x)^2} dx$.

Exemple 6. La corba $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = R \cos(2\pi z/h), y = R \sin(2\pi z/h), z \in [0, h]\}$ és una espira d'una hèlix circular de radi R i alçària h . La seva longitud és

$$\int_0^h \sqrt{1 + (2\pi R/h)^2 (\sin^2(2\pi z/h) + \cos^2(2\pi z/h))} dz = \sqrt{1 + (2\pi R/h)^2} \int_0^h dz = \sqrt{(2\pi R)^2 + h^2}.$$

Observem que $\lim_{h \rightarrow 0} \text{Long}(C) = 2\pi R$ i $\lim_{R \rightarrow 0} \text{Long}(C) = h$, d'acord amb la intuïció geomètrica. ▲

Corba plana expressada en polars. Si C ve definida per l'equació $r = g(\theta)$ en coordenades polars amb alguna funció $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$, aleshores:

- La parametrització més adequada és $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, amb $\sigma(\theta) = (g(\theta) \cos \theta, g(\theta) \sin \theta)$;
- L'element de longitud és $d\ell = \|\sigma'(\theta)\| d\theta = \sqrt{g(\theta)^2 + g'(\theta)^2} d\theta$; i per tant
- $\text{Long}(C) = \int_a^b \sqrt{g(\theta)^2 + g'(\theta)^2} d\theta$.

Exemple 7. La longitud de la cardiode definida en polars per $r = g(\theta) = R(1 + \cos \theta)$, $\theta \in [0, 2\pi]$, és

$$R \int_0^{2\pi} \sqrt{(1 + \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta} d\theta = R \int_0^{2\pi} \sqrt{2 + 2 \cos \theta} d\theta = 4R \int_0^\pi \cos \theta/2 d\theta = 8R. \quad \blacktriangle$$

Exemple 8. Sigui $\omega \neq 0$. La longitud de l'espiral logarítmica $r = g(\theta) = R e^{-\omega \theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$, és

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{R^2 e^{-2\omega \theta} + R^2 \omega^2 e^{-2\omega \theta}} d\theta = R \sqrt{1 + \omega^2} \int_0^{2\pi} e^{-\omega \theta} d\theta = R \sqrt{1 + \omega^2} (1 - e^{-2\pi \omega})/\omega.$$

També podem calcular la longitud de l'espiral logarítmica infinita $r = R e^{-\omega \theta}$, $\theta \in [0, \infty)$, malgrat que l'interval $I = [0, \infty)$ no sigui compacte. Si $\omega > 0$, l'espiral s'apropa a l'origen mentre gira i la seva longitud segueix essent finita, ja que $\int_0^\infty d\ell = R \sqrt{1 + \omega^2} \int_0^\infty e^{-\omega \theta} d\theta = R \sqrt{1 + \omega^2}/\omega$. Per contra, si $\omega < 0$, l'espiral té longitud infinita, ja que cada volta té una longitud més gran que l'anterior. ▲

Exercici. Escriviu les fórmules per a corbes 3D definides per les equacions $r = g(\theta)$ i $z = h(\theta)$ en coordenades cilíndriques amb funcions donades $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$ i $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

Integrals de funcions sobre corbes. Sigui $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ una funció contínua definida sobre una corba regular $C = \sigma(I) \subset \mathbb{R}^n$. La *integral de f sobre C* és

$$\int_C f \, d\ell := \int_a^b f(\sigma(t)) \|\sigma'(t)\| \, dt.$$

Notem que la definició de l'element de longitud ens permet escriure la igualtat $\text{Long}(C) = \int_C d\ell$ (és a dir, la integral de la funció 1). La integral d'una funció sobre una corba regular a trossos es calcula sumant les integrals sobre tots els seus trossos.

La interpretació més simple del concepte d'integral d'una funció sobre una corba plana és la següent. Si tenim una tanca que té com a base la corba $C = \sigma(I) \subset \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{R}^3 \cap \{z = 0\}$ i la seva alçària ve donada per una funció $f : C \rightarrow \mathbb{R}_+$, llavors $\int_C f \, d\ell$ ens dona l'àrea de la tanca.

Aquestes integrals compleixen moltes de les propietats típiques de les integrals sobre dominis de $\mathbb{R}^n$: linealitat, additivitat, teorema del valor mitjà, etc. Destaquem les desigualtats

$$\text{Long}(C) \cdot \min_C f \leq \int_C f \, d\ell \leq \text{Long}(C) \cdot \max_C f.$$

Les integrals de funcions sobre corbes permeten calcular, entre altres coses, la mitjana d'una funció f definida sobre una corba, i també permeten calcular diverses magnituds físiques d'un "filferro" $C \subset \mathbb{R}^3$ a partir de la seva densitat lineal $\rho : C \rightarrow \mathbb{R}_+$ (en el cas en què la densitat és constant, $\rho \equiv \rho_0$, direm que la corba C és *homogènia*). Concretament, podem calcular:

- $\bar{f} = \frac{1}{m(C)} \int_C f \rho \, d\ell$ és la mitjana, ponderada per ρ , de la funció f ;
- $m(C) = \int_C \rho \, d\ell$ és la massa de C ;
- $\text{CM}(C) = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \frac{1}{m(C)} \int_C (x, y, z) \rho \, d\ell$ és el centre de masses de C (en el cas homogeni, s'anomena centre geomètric); i
- $I_e = \int_C r^2 \rho \, d\ell$ és el moment d'inèrcia respecte un eix e de C , on $r(p) = \text{dist}(p, e)$.

El cas de "filferros plans" $C \subset \mathbb{R}^2$ és anàleg. Convé recordar que una corba, i la seva funció densitat, pot tenir diferents tipus de *simetries*, i que és útil aprofitar-les en el càlcul de les integrals.

Exemple 9. Massa de l'astroide de l'exemple 4 quan la seva densitat lineal és $\rho(x, y) = |xy|$. Si recuperem la parametrització i les notacions de l'exemple esmentat, veiem que

$$m(C_1) = \int_{C_1} \rho \, d\ell = \int_0^{\pi/2} \rho(\sigma(t)) \|\sigma'(t)\| \, dt = 3a^3 \int_0^{\pi/2} \cos^4 t \sin^4 t \, dt = \frac{3a^3}{16} \int_0^{\pi/2} \sin^4(2t) \, dt = \frac{9\pi a^3}{256}.$$

En els darrers passos hem usat les identitats $\sin 2t = 2 \cos t \sin t$ i $\sin^4 \theta = \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos(2\theta) + \frac{1}{8} \cos(4\theta)$. Finalment, $m(C) = 4m(C_1) = \frac{9}{64}\pi a^3$, ja que la densitat és simètrica respecte els dos eixos. ▲

(Podeu trobar a [Wikipedia](#) una llista molt completa d'identitats trigonomètriques.)

Exemple 10. Mitjana de la temperatura del filferro helicoidal $C = \sigma([0, 2\pi])$, $\sigma(t) = (\cos t, \sin t, t)$, quan la seva temperatura en cada punt és el quadrat de la distància a l'origen: $T(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Com que aquest filferro té la forma d'una espira d'una hèlix de radi $R = 1$ i alçària $h = 2\pi$, sabem que $d\ell = \|\sigma'(t)\| \, dt = \sqrt{2} \, dt$ i $\text{Long}(C) = 2\sqrt{2}\pi$, vegeu exemple 6. Així, la mitjana de la temperatura és

$$\bar{T} = \frac{1}{\text{Long}(C)} \int_C T \, d\ell = \frac{1}{2\sqrt{2}\pi} \int_0^{2\pi} T(\sigma(t)) \|\sigma'(t)\| \, dt = \frac{1}{2\sqrt{2}\pi} \int_0^{2\pi} (1 + t^2) \sqrt{2} \, dt = 1 + \frac{4\pi^2}{3}. \quad \blacktriangle$$

Circulacions de camps al llarg de corbes. El treball realitzat per una força constant $\mathbf{F}$ sobre un objecte que es desplaça en línia recta des d'un punt A fins a un punt B és $W = \langle \mathbf{F}, \mathbf{d} \rangle$, essent $\mathbf{d} = \overrightarrow{AB}$. Volem generalitzar aquest concepte a forces no necessàriament constants i trajectòries no necessàriament rectes. Després veurem si el treball depèn de la trajectòria de la partícula o, per contra, només depèn de la corba descrita o fins i tot només dels extrems de la corba.

Camps vectorials. Un *camp vectorial 2D* és una aplicació

$$\mathbf{F} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y)).$$

Anàlogament, un *camp vectorial 3D* és una aplicació

$$\mathbf{F} : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)).$$

Per tal de simplificar l'exposició, suposarem que tots els camps són, almenys, continus. Un camp consisteix a situar un vector en cada punt de l'obert $U \subset \mathbb{R}^n$. Els camps apareixen de manera natural en física. Els dos exemples més importants són els camps de força —els seus vectors defineixen forces (gravitatòries, elèctriques, magnètiques, de marea) que actuen sobre partícules— i els camps de velocitats —els seus vectors defineixen la velocitat en cada punt d'un gas o fluid. En aquest primer tema, suposarem que els camps no depenen del temps.

Circulació. Sigui el camp $\mathbf{F} : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ i una corba C orientada parametritzada per $\sigma : [a, b] \rightarrow C \in U$. Recordem que $d\ell = \mathbf{T} d\ell$, essent $\mathbf{T} = \sigma' / \|\sigma'\|$ el vector tangent unitari a la trajectòria amb l'orientació adequada. Llavors $F_T := \langle \mathbf{F}, \mathbf{T} \rangle$ és la component tangencial del camp a la trajectòria.

En llenguatge matemàtic el treball realitzat pel camp $\mathbf{F}$ rep el nom de *circulació* i es defineix la integral de línia o circulació del camp $\mathbf{F}$ al llarg de σ com

$$\int_C \langle \mathbf{F}, d\ell \rangle = \int_\sigma \langle \mathbf{F}, d\ell \rangle = \int_\sigma \langle \mathbf{F}, \mathbf{T} d\ell \rangle = \int_\sigma F_T d\ell := \int_a^b \langle \mathbf{F}(\sigma(t)), \sigma'(t) \rangle dt.$$

És a dir, la circulació és la integral de la funció “component tangencial del camp” sobre la corba.

Una notació alternativa per a la circulació del camp $\mathbf{F} = (P, Q)$ al llarg de la trajectòria σ és

$$\int_\sigma P dx + Q dy.$$

Anàlogament, $\int_\sigma P dx + Q dy + R dz$ per a camps 3D. Aquests dos símbols són “sinònims” de $\int_\sigma \langle \mathbf{F}, d\ell \rangle$.

En particular, la circulació és zero quan la força és perpendicular a la trajectòria seguida.

Exemple 11. La circulació d'un camp al llarg d'una trajectòria no depèn de la velocitat, però sí de l'orientació amb què és recorreguda. Per tal de convèncer el lector, reprenem l'exemple 1. Teníem una circumferència C de radi R recorreguda a velocitat angular constant no nul·la ω ; el signe de ω determina l'orientació. Concretament, $C = \sigma([0, 2\pi/|\omega|]) \subset \mathbb{R}^2$, amb $\sigma(t) = (R \cos \omega t, R \sin \omega t)$. Per tal de fixar idees, considerem un camp concret. Per exemple, $\mathbf{F}(x, y) = (-y, x)$. Aleshores,

$$\langle \mathbf{F}, d\ell \rangle = \langle \mathbf{F}(\sigma(t)), \sigma'(t) \rangle dt = \langle (-R \sin \omega t, R \cos \omega t), (-R\omega \sin \omega t, R\omega \cos \omega t) \rangle dt = R^2 \omega dt.$$

Per tant, la circulació del camp $\mathbf{F}$ al llarg de la trajectòria σ és

$$\int_\sigma \langle \mathbf{F}, d\ell \rangle = \int_0^{2\pi/|\omega|} R^2 \omega dt = 2\pi R^2 \frac{\omega}{|\omega|} = \begin{cases} +2\pi R^2, & \text{si el sentit és antihorari: } \omega > 0, \\ -2\pi R^2, & \text{si el sentit és horari: } \omega < 0. \end{cases} \quad \blacktriangle$$

Això motiva que, a partir d'ara, utilitzem els símbols

$$\int_C \langle \mathbf{F}, d\ell \rangle = \int_{C^+} \langle \mathbf{F}, d\ell \rangle, \quad \int_{C^-} \langle \mathbf{F}, d\ell \rangle$$

per a denotar el valor de la circulació d'un camp $\mathbf{F}$ al llarg d'una corba C orientada, o al llarg de la corba recorreguda en sentit contrari (respectivament), essent $\int_{C^-} \langle \mathbf{F}, d\ell \rangle = -\int_{C^+} \langle \mathbf{F}, d\ell \rangle$. Els signes $+$ i $-$ signifiquen que l'orientació amb què recorrem la corba és *positiva* o *negativa*. Si no posem signe, sobreentenem que l'orientació és positiva. I utilitzarem els símbols

$$\oint_C \langle \mathbf{F}, d\ell \rangle = \oint_{C^+} \langle \mathbf{F}, d\ell \rangle, \quad \oint_{C^-} \langle \mathbf{F}, d\ell \rangle.$$

quan la corba C sigui tancada, com la circumferència de l'exemple anterior.

Observació. En cada enunciat s'especificarà quina és l'orientació escollida com a positiva. Per exemple, dient “corba orientada en sentit antihorari”, donant una parametrització concreta o clarificant els punts inicial i final de la corba. Si no, cal escollir una orientació com a positiva i dir-ho.

Exemple 12. La circulació d'un camp no depèn de la velocitat, però, en general, sí depèn del camí seguit per connectar el punt inicial A amb el punt final B . Calculem la circulació del camp $\mathbf{F}(x, y) = (y^2, x^2)$ al llarg de tres corbes que van des de $A = (0, 0)$ fins a $B = (1, 1)$.

- (1) El segment $C_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y = x \leq 1\}$. Si el parametritzem per $\sigma_1 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\sigma_1(t) = (t, t)$, llavors $\int_{C_1} \langle \mathbf{F}, d\ell \rangle = \int_0^1 \langle \mathbf{F}(\sigma_1(t)), \sigma_1'(t) \rangle dt = \int_0^1 2t^2 dt = 2/3$.
- (2) Parametritzem l'arc de paràbola $C_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y = x^2 \leq 1\}$ per $\sigma_2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\sigma_2(t) = (t, t^2)$. Llavors $\int_{C_2} \langle \mathbf{F}, d\ell \rangle = \int_0^1 \langle \mathbf{F}(\sigma_2(t)), \sigma_2'(t) \rangle dt = \int_0^1 (t^4 + 2t^3) dt = 7/10$.
- (3) La unió de segments $C_3 = AD \cup DB$, amb $D = (1, 0)$. Usem la parametrització a trossos

$$\sigma_3 : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \sigma_3(t) = \begin{cases} (t, 0), & \text{si } 0 \leq t \leq 1, \\ (1, t-1) & \text{si } 1 \leq t \leq 2. \end{cases}$$

$$\text{Aleshores, } \int_{C_3} \langle \mathbf{F}, d\ell \rangle = \int_0^2 \langle \mathbf{F}(\sigma_3(t)), \sigma_3'(t) \rangle dt = \int_0^1 0 dt + \int_1^2 1 dt = 1. \quad \blacktriangle$$

Camps conservatius (primera part). Un camp s'anomena *conservatiu* quan la seva circulació només depèn dels extrems de la corba, però no de la corba en sí, o, equivalentment, quan té circulació nul·la sobre qualsevol corba tancada. De moment, ens limitem a veure un parell d'exemples.

Exemple 13. El camp $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, z)$ és conservatiu. La clau és observar que és el gradient de la funció $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)/2$. És a dir, $\mathbf{F} = \text{grad } f = (f_x, f_y, f_z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$.

Segui $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\sigma(t) = (x(t), y(t), z(t))$, una trajectòria arbitrària tal que $\sigma(a) = A$ i $\sigma(b) = B$. Segui $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ la funció $g(t) = f(\sigma(t)) = ((x(t))^2 + (y(t))^2 + (z(t))^2)/2$. Aleshores

$$g'(t) = \frac{d}{dt} \left\{ \frac{(x(t))^2 + (y(t))^2 + (z(t))^2}{2} \right\} = x(t)x'(t) + y(t)y'(t) + z(t)z'(t) = \langle \mathbf{F}(\sigma(t)), \sigma'(t) \rangle.$$

Per tant, si calculem la circulació del camp $\mathbf{F}$ al llarg de la trajectòria σ obtenim

$$\int_{\sigma} \langle \mathbf{F}, d\ell \rangle = \int_a^b g'(t) dt = g(b) - g(a) = f(B) - f(A),$$

quedant provat que la circulació només depèn de A i B . De fet, la circulació és la diferència del valor de la funció f en els extrems A i B . Ho comprovem a continuació en un cas concret.

Segui $C = \sigma([0, 2\pi]) \subset \mathbb{R}^3$, $\sigma(t) = (Re^t \cos t, Re^t \sin t, 1)$. Se sobreentén que C està orientada des de $A = \sigma(0) = (R, 0, R)$ fins a $B = \sigma(2\pi) = (Re^{2\pi}, 0, Re^{2\pi})$. Per tant, la circulació ha de ser

$$\int_C \langle \mathbf{F}, d\ell \rangle = f(B) - f(A) = (R^2 e^{4\pi} + 0 + R^2 e^{4\pi})/2 - (R^2 + 0 + R^2)/2 = R^2(e^{4\pi} - 1).$$

Si apliquem la definició, calculem $d\ell = \sigma'(t) dt = Re^t(\cos t - \sin t, \sin t + \cos t, 1) dt$, i per tant

$$\int_C \langle \mathbf{F}, d\ell \rangle = \int_0^{2\pi} R^2 e^{2t} (\cos t(\cos t - \sin t) + \sin t(\sin t + \cos t) + 1) dt = \int_0^{2\pi} 2R^2 e^{2t} dt = R^2(e^{4\pi} - 1). \quad \blacktriangle$$

És una bona pràctica realitzar determinats càlculs de dues (o més) maneres diferents, com a l'exemple anterior, de cara a detectar possibles errors de càlcul.

Exemple 14. Calculeu $\int_C y dx - x dy$, essent C l'arc superior de l'el·lipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ que va des de $A = (a, 0)$ fins a $B = (-a, 0)$. És conservatiu el camp $\mathbf{F} = (y, -x)$?

Useu la parametrització $C = \sigma([0, \pi])$, $\sigma(t) = (a \cos t, b \sin t)$. Aleshores,

$$\int_C y dx - x dy = \int_0^{\pi} (y(t)x'(t) - x(t)y'(t)) dt = \int_0^{\pi} (-ab) dt = -\pi ab.$$

El camp no és conservatiu, ja que és perpendicular al segment d'extrems A i B en tots els punts del segment, i per tant la seva circulació al llarg del segment és nul·la. $\blacktriangle$

INTEGRALS DE FUNCIONS I CAMPS SOBRE SUPERFÍCIES

Introduïrem en aquesta secció el concepte de superfície, el càlcul d'àrees de superfícies, i definirem els símbols

- $\int_S f dS$ = Integral d'una funció $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ sobre una superfície S ; i
- $\int_S \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle$ = Flux del camp vectorial $\mathbf{F} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ a través d'una superfície $S \subset U \subset \mathbb{R}^3$.

Superfícies. Intuïtivament, una superfície és un subconjunt bidimensional suau de $\mathbb{R}^3$. És a dir, sense punxes ni arestes, la qual cosa exclou cons, poliedres, etc. No obstant, aquesta idea restringeix massa el camp d'acció, ja que volem treballar sobre superfícies amb algunes singularitats. Formalitzar rigurosament un marc de treball adequat no és fàcil, però evitem aprofundir en detalls tècnics. Definim una *superfície regular* com el rang (o imatge)

$$S = \varphi(D) = \{\varphi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) : (u, v) \in D\} \subset \mathbb{R}^3$$

d'una aplicació $\varphi : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, que rep el nom de *parametrització regular*, tal que:

- D és un domini compacte, connex i amb frontera $\mathcal{C}^1$ a trossos de $\mathbb{R}^2$;
- φ és una aplicació de classe $\mathcal{C}^1$ i injectiva excepte, potser, a la frontera del domini D ; i
- La superfície S és suau excepte, potser, en un nombre finit de punts.

Direm que la superfície S és *suau* en un punt $p = \varphi(u, v)$ quan

$$\varphi_u(u, v) \wedge \varphi_v(u, v) = \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \neq \mathbf{0}.$$

Si $S = \varphi(D) \subset \mathbb{R}^3$ és una superfície regular, introduïm les notacions següents:

- $\varphi_u(u, v)$ i $\varphi_v(u, v)$ són dos *vectors tangents* (linealment independents) a la superfície S al punt $p = \varphi(u, v)$;
- $T_p S = p + [\varphi_u(u, v), \varphi_v(u, v)]$ és el *pla tangent* a la superfície S al punt $p = \varphi(u, v)$;
- $\varphi_u(u, v) \wedge \varphi_v(u, v)$ és un *vector normal* (no nul) a la superfície S al punt $p = \varphi(u, v)$;

- $dS = \|\varphi_u \wedge \varphi_v\| du dv$ és l'element de superfície de la parametrització φ ; i
- $d\mathbf{S} = (\varphi_u \wedge \varphi_v) du dv = \mathbf{N} dS$ és el vector diferencial de superfície de la parametrització φ , on

$$\mathbf{N} = \frac{\varphi_u(u, v) \wedge \varphi_v(u, v)}{\|\varphi_u(u, v) \wedge \varphi_v(u, v)\|}$$

és el³ vector normal unitari a la superfície S al punt $p = \varphi(u, v)$.

Tot seguit presentem alguns exemples típics de superfícies regulars.

Cilindre. El cilindre circular recte de radi R i alçada h es sol parametritzar mitjançant la longitud i l'altura de les coordenades cilíndriques⁴. *Recte* significa que l'alçada és perpendicular a la base i *circular* significa que la base és un cercle. Concretament, si $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = R^2, 0 \leq z \leq h\}$, llavors $S = \varphi(D)$, on

$$\varphi(\theta, z) = (R \cos \theta, R \sin \theta, z), \quad D = [0, 2\pi] \times [0, h].$$

Notem que la injectivitat falla en alguns punts de la frontera de D , ja que $\varphi(0, z) = \varphi(2\pi, z)$.

Con. El con circular recte $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : k^2 z^2 = x^2 + y^2, 0 \leq z \leq h\}$ té alçada h , radi $R = kh$ i semiangle $\alpha \in (0, \pi/2)$, on $k = \tan \alpha$. Els termes recte i circular els hem explicat abans. Tot con és intrínsecament singular al seu vèrtex. Es sol parametritzar de dues maneres.

- (1) Mitjançant la longitud i l'altura de les coordenades cilíndriques: $S = \varphi(D)$, on

$$\varphi(\theta, z) = (kz \cos \theta, kz \sin \theta, z), \quad D = [0, 2\pi] \times [0, h].$$

Aquesta parametrització és singular quan $z = 0$ (vèrtex) i no és injectiva a la frontera de D .

- (2) En forma de gràfica: $S = \varphi(D)$, on

$$\varphi(x, y) = \left(x, y, \sqrt{x^2 + y^2}/k\right), \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq R^2\}.$$

Aquesta parametrització és singular quan $(x, y) = (0, 0)$.

Esfera. L'esfera $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$ es sol parametritzar de dues maneres.

- (1) Mitjançant la longitud θ i la latitud ϕ de les coordenades esfèriques⁵: $S = \varphi(D)$, on

$$\varphi(\theta, \phi) = (R \cos \phi \cos \theta, R \cos \phi \sin \theta, R \sin \phi), \quad D = [0, 2\pi] \times [-\pi/2, \pi/2].$$

Aquesta parametrització és singular quan $\phi = \pm\pi/2$ i no és injectiva a la frontera de D .

- (2) Expressant els seus dos hemisferis en forma de gràfica: $S = S_+ \cup S_-$, $S_{\pm} = \varphi_{\pm}(D)$, on

$$\varphi_{\pm}(x, y) = \left(x, y, \pm\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\right), \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq R^2\}.$$

Ambdues parametritzacions són singulars quan $x^2 + y^2 = R^2$.

Variants: cilindres i cons elíptics, el·lipsoides. Les coordenades cilíndriques es poden adaptar. Això permet parametritzar cilindres i cons elíptics. Per exemple, la parametrització usual del cilindre $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1, 0 \leq z \leq h\}$ és $S = \varphi(D)$, on

$$\varphi(\theta, z) = (a \cos \theta, b \sin \theta, z), \quad D = [0, 2\pi] \times [0, h].$$

I les coordenades esfèriques es poden adaptar a el·lipsoides. Aquesta idea serveix per a parametritzar l'el·lipsoide $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1\}$ usant la longitud i la latitud de les coordenades esfèriques modificades. Concretament, $S = \varphi(D)$, on

$$\varphi(\theta, \phi) = (a \cos \phi \cos \theta, b \cos \phi \sin \theta, c \sin \phi), \quad D = [0, 2\pi] \times [-\pi/2, \pi/2].$$

³En realitat, en cada punt de la superfície hi ha dos vectors normals unitaris de sentits oposats. Si la superfície tanca una regió, aquests vectors s'anomenen *exterior* i *interior* segons si apunten a l'exterior o interior de la regió.

⁴En aquests apunts considerem les coordenades cilíndriques definides per $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ i $z = z$, on $r = \sqrt{x^2 + y^2} > 0$ és la distància a l'eix z , $\theta \in [0, 2\pi]$ és la longitud i $z \in \mathbb{R}$ és la coordenada vertical.

⁵En aquests apunts considerem les coordenades esfèriques definides per $x = r \cos \phi \cos \theta$, $y = r \cos \phi \sin \theta$ i $z = r \sin \phi$, on $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} > 0$ és la distància a l'origen, $\theta \in [0, 2\pi]$ és la longitud i $\phi \in [-\pi/2, \pi/2]$ és la latitud.

Àrea d'una superfície. Sigui $S = \varphi(R)$, $\varphi : R = [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^3$, una superfície regular. Si descomponem el rectangle R en N^2 subrectangles R_{ij} de costats $\Delta u = (b - a)/N$ i $\Delta v = (d - c)/N$ repenjats al vèrtex (u_i, v_j) , llavors també podem descompondre la superfície S en N^2 petits “trossos rectangulars” $S_{ij} = \varphi(R_{ij})$, $i, j = 0, \dots, N - 1$. En aquestes condicions, es pot provar que

- $\text{Area}(R_{ij}) = \Delta u \cdot \Delta v$;
- $\text{Area}(S_{ij}) \simeq \|\varphi_u(u_i, v_j) \wedge \varphi_v(u_i, v_j)\| \text{Area}(R_{ij})$;
- $\text{Area}(S) = \sum_{i,j=1}^N \text{Area}(S_{ij}) \simeq \sum_{i,j=1}^N \|\varphi_u(u_i, v_j) \wedge \varphi_v(u_i, v_j)\| \Delta u \cdot \Delta v$.

La darrera aproximació es converteix en una igualtat quan passem al límit $N \rightarrow \infty$, la qual cosa motiva la següent definició. L'àrea de la superfície regular $S = \varphi(D) \subset \mathbb{R}^3$ és igual a

$$\text{Area}(S) := \int_D \|\varphi_u \wedge \varphi_v\| du dv.$$

Usant que la parametrització $\varphi(u, v)$ és de classe $\mathcal{C}^1$ i el domini $D \subset \mathbb{R}^2$ és compacte, deduïm que la funció $(u, v) \mapsto \|\varphi_u \wedge \varphi_v\|$ és fitada, i per tant tota superfície regular té àrea finita.

Observació. L'àrea d'una superfície regular a trossos es calcula sumant les àrees dels seus trossos.

Igual que abans, l'àrea d'una superfície regular no depèn de la parametrització escollida, i per tant en cada cas convé escollir la parametrització més adequada. Tot seguit estudiem quatre situacions típiques per veure com queden les fórmules.

Gràfiques. Si S és la gràfica $z = f(x, y)$ d'una funció $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, aleshores:

- La parametrització més adequada és $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$, amb $\varphi(x, y) = (x, y, f(x, y))$;
- L'element de superfície és $dS = \|\varphi_x \wedge \varphi_y\| dx dy = \sqrt{1 + (f_x)^2 + (f_y)^2} dx dy$; i per tant
- $\text{Area}(S) = \int_D \sqrt{1 + (f_x)^2 + (f_y)^2} dx dy$.

Exemple 15. Considerem la superfície $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 \leq R^2\}$. La igualtat defineix la funció $f(x, y)$, mentre que la desigualtat defineix el domini D . Així doncs, aquesta superfície és la gràfica de $z = f(x, y) = x^2 + y^2$ sobre el disc $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq R^2\}$. L'element de superfície és $dS = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dx dy$, i per tant l'àrea de S és

$$\int_D \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dx dy = \int_{D^*} \sqrt{1 + 4r^2} r dr d\theta = 2\pi \int_0^R \sqrt{1 + 4r^2} r dr = \frac{\pi((1 + 4R^2)^{3/2} - 1)}{6}.$$

A la primera igualtat hem realitzat un canvi a coordenades polars per tal de transformar el disc D en el rectangle $D^* = [0, R] \times [0, 2\pi]$ i a la segona hem usat el teorema de Fubini. ▲

Equacions implícites. Si S és una superfície regular que compleix l'equació implícita $F(x, y, z) = 0$ però es pot expressar com la gràfica $z = f(x, y)$ d'una funció $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, aleshores:

- La parametrització més adequada segueix essent $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$, amb $\varphi(x, y) = (x, y, f(x, y))$;
- L'element de superfície és $dS = \sqrt{1 + (F_x/F_z)^2 + (F_y/F_z)^2} dx dy$;
- $\text{Area}(S) = \int_D \sqrt{1 + (F_x/F_z)^2 + (F_y/F_z)^2} dx dy$.

Exemple 16. Sigui $\Pi \equiv ax + by + cz = d$ un pla amb vector normal que forma un angle $\alpha \in [0, \pi/2)$ amb l'eix z . És a dir, si $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$ és el vector unitari vertical i $\mathbf{N} = (a, b, c)/\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ és el normal unitari, llavors

$$\cos \alpha = \frac{|\langle \mathbf{N}, \mathbf{k} \rangle|}{\|\mathbf{N}\| \|\mathbf{k}\|} = \frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

En particular, $c \neq 0$ ja que estem suposant que $\alpha \neq \pi/2$. Això vol dir que el pla Π es pot expressar com la gràfica de la funció $z = f(x, y) = (d - ax - by)/c$, a tot $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{R}^3 \cap \{z = 0\}$. Sigui S la superfície continguda en el pla Π sobre un domini arbitrari $D \subset \mathbb{R}^2$. Així doncs, el seu element de superfície és $dS = \sqrt{1 + (a/c)^2 + (b/c)^2} dx dy = \frac{1}{\cos \alpha} dx dy$, i per tant

$$\text{Area}(S) = \int_D \frac{dx dy}{\cos \alpha} = \frac{\text{Area}(D)}{\cos \alpha}.$$

Si $\alpha = 0$, el pla és horitzontal i $\text{Area}(S) = \text{Area}(D)$. A més, $\lim_{\alpha \rightarrow \pi/2} \text{Area}(S)/\text{Area}(D) = \infty$. ▲

Superfícies de revolució. Suposem que obtenim S en girar una corba $C = \{(r(t), z(t)) : t \in [a, b]\}$ respecte l'eix z . Per tal que la superfície S sigui regular necessitem que:

- (1) La corba C sigui regular: $(r'(t), z'(t)) \neq \mathbf{0}$ per a tot $t \in [a, b]$; i
- (2) La corba C no toqui l'eix z : $r(t) > 0$ per a tot $t \in [a, b]$.

Sota aquestes dues condicions es compleix que:

- La millor parametrització és $\varphi : D = [a, b] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\varphi(t, \theta) = (r(t) \cos \theta, r(t) \sin \theta, z(t))$;

- L'element de superfície és $dS = \|\varphi_t \wedge \varphi_\theta\| dt d\theta = \sqrt{(r'(t))^2 + (z'(t))^2} r(t) dt d\theta$; i per tant
- $\text{Area}(S) = 2\pi \int_a^b \sqrt{(r'(t))^2 + (z'(t))^2} r(t) dt$.

A la darrera fórmula hem usat el teorema de Fubini. L'element de superfície està ben definit (i no s'anul·la en cap punt) gràcies a les dues condicions anteriors sobre la corba C .

Exemple 17. Obtenim l'esfera de radi R en girar la corba

$$C = \{(r(t), z(t)) = (R \cos t, R \sin t) : -\pi/2 \leq t \leq \pi/2\}$$

respecte l'eix z . Aplicant la fórmula anterior, la seva àrea és $2\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} R^2 \cos t dt = 4\pi R^2$. ▲

La fórmula general per a calcular l'àrea d'una superfície de revolució admet dues simplificacions:

- $C = \{(x, z = g(x)) : x \in [a, b]\} \implies \text{Area}(S) = 2\pi \int_a^b \sqrt{1 + (g'(x))^2} |x| dx$; i
- $C = \{(x = h(z), z) : z \in [c, d]\} \implies \text{Area}(S) = 2\pi \int_c^d \sqrt{1 + (h'(z))^2} |h(z)| dz$.

Exemple 18. Obtenim la cara lateral del con de revolució de radi R i alçada h en girar la corba $C = \{(x, z = hx/R) : x \in [0, R]\}$ respecte l'eix z . Aplicant la primera fórmula veiem que la seva àrea és

$$2\pi \int_0^R \sqrt{1 + h^2/R^2} x dx = \pi R \sqrt{R^2 + h^2} = \pi R s,$$

essent $s = \sqrt{R^2 + h^2} = \text{Long}(C)$. Més endavant interpretarem aquesta fórmula a la llum del primer teorema de Guldin. L'àrea total del con és $\pi R(R + s)$, ja que faltava afegir l'àrea de la base. ▲

Superfície expressada en esfèriques. Si S ve definida per l'equació $r = g(\theta, \phi)$ en coordenades esfèriques amb alguna funció $g : D \subset [0, 2\pi] \times [-\pi/2, \pi/2] \rightarrow \mathbb{R}_+$, aleshores:

- La parametrització adequada és $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$, amb $\varphi(\theta, \phi) = g(\theta, \phi) (\cos \phi \cos \theta, \cos \phi \sin \theta, \sin \phi)$;
- L'element de superfície és $dS = \|\varphi_\theta \wedge \varphi_\phi\| d\theta d\phi = g \sqrt{g_\theta^2 + (g^2 + g_\phi^2) \cos^2 \phi} d\theta d\phi$; i per tant
- $\text{Area}(S) = \int_D g(\theta, \phi) \sqrt{g_\theta^2(\theta, \phi) + (g^2(\theta, \phi) + g_\phi^2(\theta, \phi)) \cos^2 \phi} d\theta d\phi$.

Exemple 19. L'esfera de radi R ve definida en coordenades esfèriques per l'equació $r = g(\theta, \phi) = R$ per a tot $(\theta, \phi) \in D = [0, 2\pi] \times [-\pi/2, \pi/2]$. Aplicant la fórmula anterior obtenim que la seva àrea és

$$\int_D R^2 \cos \phi d\theta d\phi = R^2 \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \phi d\phi \right) = 4\pi R^2. \quad \blacktriangle$$

Exercici. Escriu les fórmules per a superfícies definides per l'equació $r = g(\theta, z)$ en coordenades cilíndriques amb una funció donada $g : D \subset [0, 2\pi] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$. Ídem per a les superfícies definides per l'equació $z = h(r, \theta)$ en coordenades cilíndriques amb una funció donada $h : D \subset \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$.

Integrals de funcions sobre superfícies. Sigui $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ una funció contínua definida sobre una superfície regular $S = \varphi(D) \subset \mathbb{R}^3$. La *integral de f sobre S* és

$$\int_S f dS := \int_D f(\varphi(u, v)) \|\varphi_u \wedge \varphi_v\| du dv.$$

Notem que la definició de l'element de superfície ens permet escriure la igualtat $\text{Area}(S) = \int_S dS$ (és a dir, la integral de la funció 1). Aquestes integrals satisfan moltes de les propietats típiques de les integrals sobre dominis de $\mathbb{R}^n$: linealitat, additivitat, teorema del valor mitjà, etc. Destaquem les desigualtats

$$\text{Area}(S) \cdot \min_S f \leq \int_S f dS \leq \text{Area}(S) \cdot \max_S f.$$

Exemple 20. L'additivitat implica que la integral d'una funció sobre una superfície regular a trossos es calcula sumant les integrals sobre tots els seus trossos. Sigui $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ el cercle de radi 1 centrat a l'origen. Sigui $S = S_1 \cup S_2$ la superfície formada pels trossos

$$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1 - x^2 - y^2, (x, y) \in D\}, \quad S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0, (x, y) \in D\}.$$

Sigui $f(x, y, z) = 1 + xz$. Volem calcular $\int_S f dS$. Els trossos S_1 i S_2 són les gràfiques de les funcions $z = g_1(x, y) = 1 - x^2 - y^2$ i $z = g_2(x, y) = 0$ sobre el cercle D , respectivament. Per tant,

$$\begin{aligned} \int_{S_1} f dS &= \int_D f(x, y, 1 - x^2 - y^2) \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dx dy \left[\text{Canvi a polars: } D^* = [0, 1] \times [0, 2\pi] \right] \\ &= \int_{D^*} (1 + r(1 - r^2) \cos \theta) \sqrt{1 + 4r^2} r dr d\theta \left[\text{Apliquem Fubini i usem la linealitat} \right] \\ &= \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \cdot \left(\int_0^1 r \sqrt{1 + 4r^2} dr \right) + \left(\int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta \right) \cdot \left(\int_0^1 r^2(1 - r^2) \sqrt{1 + 4r^2} dr \right) \\ &= 2\pi \left[(1 + 4r^2)^{3/2} / 12 \right]_{r=0}^{r=1} + 0 \cdot (\text{no importa}) = \pi(5^{3/2} - 1)/6, \\ \int_{S_2} f dS &= \int_D f(x, y, 0) \sqrt{1 + 0^2 + 0^2} dx dy = \int_D dx dy = \text{Area}(D) = \pi. \end{aligned}$$

Finalment, $\int_S f dS = \int_{S_1} f dS + \int_{S_2} f dS = 5\pi(\sqrt{5} + 1)/6$. ▲

Les integrals de funcions sobre superfícies permeten calcular, entre altres coses, la mitjana d'una funció definida sobre una superfície, i també permeten calcular diverses magnituds físiques d'una "planxa" $S \subset \mathbb{R}^3$ a partir de la seva *densitat superficial* $\rho : S \rightarrow \mathbb{R}_+$ (en el cas en què la densitat és constant, $\rho \equiv \rho_0$, direm que la superfície S és *homogènia*). Concretament, podem calcular:

- $\bar{f} = \frac{1}{m(S)} \int_S f \rho dS$ és la mitjana, ponderada per ρ , de la funció f ;
- $m(S) = \int_S \rho dS$ és la massa de S ;
- $\text{CM}(S) = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \frac{1}{m(S)} \int_S (x, y, z) \rho dS$ és el centre de masses de S (en el cas homogeni, s'anomena centre geomètric); i
- $I_e = \int_S r^2 \rho dS$ és el moment d'inèrcia respecte un eix e de S , on $r(p) = \text{dist}(p, e)$.

Convé recordar que una superfície, i la seva funció densitat, pot tenir diferents tipus de *simetries*, i que és útil aprofitar-les en el càlcul de les integrals.

Exemple 21. Constant d'inèrcia, respecte el seu eix de revolució, de la cara lateral d'un con de radi R i alçada h . Sempre que no diguem res sobre la densitat, suposarem que l'objecte és homogeni: $\rho \equiv \rho_0$ densitat constant. Escollim la parametrització $S = \varphi(D)$ donada per

$$\varphi(\theta, z) = (kz \cos \theta, kz \sin \theta, z), \quad D = [0, 2\pi] \times [0, h],$$

on $k = R/h$, vegeu pàg. 8. L'element de superfície és $dS = \sqrt{1 + k^2} k |z| d\theta dz$, i per tant

$$m(S) = \int_S \rho dS = \rho_0 \int_D \sqrt{1 + k^2} k |z| d\theta dz = \sqrt{1 + k^2} k \rho_0 \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \cdot \left(\int_0^h z dz \right) = \pi \sqrt{1 + k^2} R h \rho_0.$$

Tot seguit, calculem el moment d'inèrcia respecte l'eix z :

$$I_z = \int_S (x^2 + y^2) \rho dS = \int_D k^2 z^2 \rho_0 \sqrt{1 + k^2} k z d\theta dz = \sqrt{1 + k^2} k^3 \rho_0 (2\pi) (h^4/4) = \pi \sqrt{1 + k^2} R^3 h \rho_0 / 2,$$

i per tant $I_z = \frac{1}{2} (\pi \sqrt{1 + k^2} R h \rho_0) R^2 = \frac{1}{2} m(S) R^2$ i la constant d'inèrcia és $c = \frac{1}{2}$. ▲

Exemple 22. Massa de la superfície S del paraboloid hiperbòlic $P = \{2az = x^2 - y^2\}$ tallada pel cilindre $C = \{x^2 + y^2 = a^2\}$ si la densitat superficial és proporcional a la distància al pla $\{z = 0\}$, essent $k > 0$ la constant de proporcionalitat. Suposarem que $a > 0$.

Escrivim la superfície S com a gràfica de la funció $z = f(x, y) = (x^2 - y^2)/2a$ sobre el cercle de radi a centrat a l'origen: $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq a^2\}$. L'element de superfície és

$$dS = \sqrt{1 + (f_x)^2 + (f_y)^2} dx dy = \sqrt{1 + (x^2 + y^2)/a^2} dx dy = a^{-1} \sqrt{a^2 + x^2 + y^2} dx dy.$$

Integrem la densitat $\rho(x, y, z) = k|z|$ sobre la superfície:

$$\begin{aligned} m(S) &= \int_S \rho dS = \frac{k}{2a^2} \int_D |x^2 - y^2| \sqrt{a^2 + x^2 + y^2} dx dy \quad [\text{Reducció a } D_1 = D \cap \{0 \leq |y| \leq x\}] \\ &= \frac{2k}{a^2} \int_{D_1} (x^2 - y^2) \sqrt{a^2 + x^2 + y^2} dx dy \quad [\text{Canvi a polars: } D_1^* = [0, a] \times [-\pi/4, \pi/4]] \\ &= \frac{2k}{a^2} \int_{D_1^*} r^2 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \sqrt{a^2 + r^2} r dr d\theta \quad [\text{Fubini \& fórmules angle doble}] \\ &= \frac{2k}{a^2} \left(\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos(2\theta) d\theta \right) \cdot \left(\int_0^a r^2 \sqrt{a^2 + r^2} r dr \right) \quad [\text{Canvi } s = a^2 + r^2, ds = 2r dr] \\ &= \frac{2k}{a^2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \int_{a^2}^{2a^2} (s - a^2) \sqrt{s} ds = \frac{k}{a^2} \left[\frac{2}{5} s^{5/2} - \frac{2}{3} a^2 s^{3/2} \right]_{s=a^2}^{s=2a^2} = \frac{4}{15} (1 + \sqrt{2}) k a^3. \quad \blacktriangle$$

Acabem aquesta secció amb dos resultats de tipus geomètric.

Teorema (Primer i segon teoremes de Guldin). *Sigui $\Pi_+ \subset \mathbb{R}^3$ un semiplà i $e = \partial\Pi_+$. Siguin $C \subset \Pi_+$ una corba plana no necessàriament tancada i $D \subset \Pi_+$ un domini pla sense contacte amb e .*

- (1) *L'àrea de la superfície de revolució S obtinguda en girar C respecte l'eix e és*

$$\text{Area}(S) = 2\pi \text{dist}(\text{CG}(C), e) \text{Long}(C).$$

- (2) *El volum del cos sòlid de revolució W obtingut en girar D respecte l'eix e és*

$$\text{Vol}(W) = 2\pi \text{dist}(\text{CG}(D), e) \text{Area}(D).$$

Prova. Podem suposar que l'eix de revolució és l'eix z , i per tant Π_+ és un semiplà vertical arbitrari on usem les coordenades (r, z) tals que $r > 0$ és la distància a l'eix i z és l'altura.

1. Sigui $C = \{(r(t), z(t)) : t \in [a, b]\}$ la corba base i sigui $\text{CG}(C) = (\bar{r}, \bar{z})$. Aleshores,

$$\text{dist}(\text{CG}(C), e) = \bar{r} = \frac{1}{\text{Long}(C)} \int_C r d\ell = \frac{1}{\text{Long}(C)} \int_a^b \sqrt{(r'(t))^2 + (z'(t))^2} r(t) dt = \frac{\text{Area}(S)}{2\pi \text{Long}(C)}.$$

A la darrera igualtat hem usat la fórmula per a calcular l'àrea d'una superfície de revolució.

2. Sigui $D \subset \{(r, z) \in \mathbb{R}^2 : r > 0\}$ el domini base i sigui $\text{CG}(D) = (\bar{r}, \bar{z}) = \frac{1}{\text{Area}(D)} \int_D (r, z) dr dz$. El cos de revolució en coordenades cilíndriques és $W^* = \{(r, \theta, z) : 0 \leq \theta \leq 2\pi, (r, z) \in D\}$, i per tant

$$\text{Vol}(W) = \int_{W^*} dx dy dz = \int_{W^*} r dr d\theta dz = \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \cdot \left(\int_D r dr dz \right) = 2\pi \bar{r} \text{Area}(D).$$

Finalment, n'hi ha prou amb observar que $\bar{r} = \text{dist}(\text{CG}(D), e)$. □

Observació. Un cercle i la circumferència que el tanca comparteixen el mateix centre geomètric, però, en general, això no es complirà amb un domini pla qualsevol i la seva frontera: $C = \partial D \not\equiv \text{CG}(C) = \text{CG}(D)$.

Exemple 23. Siguin $r, R \in \mathbb{R}$ tals que $0 < r < R$. Obtenim el tor sòlid W de radi interior r i radi exterior R en girar respecte un eix $e = \partial\Pi_+$ un cercle $D \subset \Pi_+$ de radi r amb el centre situat a distància R de l'eix e , mentre que obtenim la seva superfície $S = \partial W$ en girar la circumferència $C = \partial D$. En aquest cas, $\text{dist}(\text{CG}(D), e) = \text{dist}(\text{CG}(C), e) = R$. Aplicant els dos teoremes de Guldin, resulta:

$$\text{Area}(S) = 2\pi R \text{Long}(C) = 4\pi^2 r R, \quad \text{Vol}(W) = 2\pi R \text{Area}(D) = 2\pi^2 r^2 R. \quad \blacktriangle$$

Observació. Donada una corba plana no necessàriament tancada C i donat un domini pla D , siguin $\tilde{S}$ i $\tilde{W}$ els cilindres rectes de bases C i D , tots dos amb alçada h . És interessant comparar les anteriors fórmules de Guldin amb les ja conegudes fórmules $\text{Area}(\tilde{S}) = h \text{Long}(C)$ i $\text{Vol}(\tilde{W}) = h \text{Area}(D)$.

Fluxos de camps 3D a través de superfícies. Sigui $\Pi \subset \mathbb{R}^3$ un pla amb vector normal unitari $\mathbf{N}$. Suposem que un fluid travessa aquest pla a través d'un "forat" $S \subset \Pi$ amb una velocitat constant $\mathbf{F}_0$ en tots els punts de S . Llavors el flux (quantitat de fluid per unitat de temps) que travessa el pla ve donat pel volum (amb signe) del cilindre sòlid de base S i generatriu $\mathbf{F}_0$; és a dir, $\langle \mathbf{F}_0, \mathbf{N} \rangle \text{Area}(S)$. El signe del flux està relacionat amb el sentit del fluid: és positiu quan el fluid travessa el pla en el sentit del vector normal $\mathbf{N}$ i negatiu en cas contrari. Aquest concepte es pot generalitzar a velocitats no necessàriament constants i superfícies no necessàriament planes.

Observem també que utilitzarem superfícies orientables o amb dos costats⁶, és a dir que podem desplaçar el vector normal ($\mathbf{N}$ o $-\mathbf{N}$) de manera contínua al llarg d'ella. Direm que la superfície és orientada quan hem escollit un vector normal unitari.

⁶Ull! Algunes superfícies, com la cinta de Möbius, només tenen un costat; vegeu [Wikipedia](#), i la famosa xilografia de M.C. Escher [\[web\]](#).

Flux. Sigui el camp $\mathbf{F} : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ i $S = \varphi(D) \subset \mathbb{R}^3$ una superfície orientada. Recordem que $d\mathbf{S} = \mathbf{N} dS$, essent $\mathbf{N} = (\varphi_u \wedge \varphi_v) / \|\varphi_u \wedge \varphi_v\|$ el vector normal unitari a la superfície amb l'orientació adequada. Llavors $F_N := \langle \mathbf{F}, \mathbf{N} \rangle$ és la component normal del camp a la superfície. Definim el *flux* del camp $\mathbf{F}$ a través de la superfície S (o la integral de superfície de $\mathbf{F}$ sobre S) de la manera següent:

$$\int_S \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle = \int_S \langle \mathbf{F}, \mathbf{N} dS \rangle = \int_S F_N dS = \int_D \langle \mathbf{F} \circ \varphi, \varphi_u \wedge \varphi_v \rangle du dv = \int_D \begin{vmatrix} P \circ \varphi & Q \circ \varphi & R \circ \varphi \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} du dv,$$

on $\varphi = (x, y, z)$ i $\mathbf{F} = (P, Q, R)$. És a dir, el flux és la integral de la funció “component normal del camp” sobre la superfície. La darrera fórmula ajuda a entendre la notació alternativa

$$\int_S P dy dz + Q dz dx + R dx dy$$

per denotar el flux del camp $\mathbf{F} = (P, Q, R)$ a través de la superfície S , ja que

$$dy dz = \frac{dy dz}{du dv} du dv = \begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix} du dv, \quad dz dx = \begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix} du dv, \quad dx dy = \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} du dv.$$

En particular, no hi ha flux quan la velocitat és tangent a la superfície. Observem també a partir de la definició que la fórmula simplifica el càlcul del flux quan la component normal F_N té un expressió senzilla. Per exemple, si és constant: $F_N \equiv \alpha$, llavors $\int_S \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle = \alpha \text{Area}(S)$. Usaren això a l'exemple 26.

Orientació. Un cop hem fixat un vector normal unitari $\mathbf{N}$ (és a dir, un costat de S), utilitzarem els símbols

$$\int_S \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle = \int_{S^+} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle, \quad \int_{S^-} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle$$

per a denotar el valor del flux del camp $\mathbf{F}$ a través de la superfície S orientada per $\mathbf{N}$ o el valor del flux si orientem S per $-\mathbf{N}$ (respectivament). Òbviament, $\int_{S^-} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle = -\int_{S^+} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle$. Per tant, en calcular un flux segons un vector normal fixat, és *imprescindible* comprovar que la parametrització és positiva.

Exemple 24. Sigui S el primer octant de l'el·lipsoide $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1\}$. Calculeu el flux de $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, z)$ a través de S i E , orientades segons la normal exterior.

Si $\mathbf{N}$ és el vector normal unitari exterior, llavors $F_N = \langle \mathbf{F}, \mathbf{N} \rangle > 0$ sobre tot l'el·lipsoide. En conseqüència, els dos fluxos han de ser positius. Aquesta observació ens permetrà comprovar a posteriori que la parametrització escollida és correctament orientada. Parametritzem el primer octant de l'el·lipsoide usant la longitud i la latitud de les coordenades esfèriques modificades: $S = \varphi(D)$, on

$$\varphi(\theta, \phi) = (a \cos \phi \cos \theta, b \cos \phi \sin \theta, c \sin \phi), \quad D = [0, \pi/2] \times [0, \pi/2].$$

Aleshores, $\varphi_\theta = (-a \cos \phi \sin \theta, b \cos \phi \cos \theta, 0)$ i $\varphi_\phi = (-a \sin \phi \cos \theta, -b \sin \phi \sin \theta, c \cos \phi)$, i per tant

$$\varphi_\theta \wedge \varphi_\phi = (bc \cos^2 \phi \cos \theta, ac \cos^2 \phi \sin \theta, ab \cos \phi \sin \phi)$$

és efectivament un vector normal exterior i la parametrització φ és positiva. N'hi ha prou comprovant que $\varphi_\theta \wedge \varphi_\phi$ apunta cap a l'exterior de l'el·lipsoide⁷, ja que les seves tres components són positives. Per tant,

$$\begin{aligned} \int_{S^+} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle &= \int_D \langle \mathbf{F} \circ \varphi, \varphi_\theta \wedge \varphi_\phi \rangle d\theta d\phi \\ &= \int_D abc \cos \phi ((\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \cos^2 \phi + \sin^2 \phi) d\theta d\phi \\ &= abc \left(\int_0^{\pi/2} d\theta \right) \cdot \left(\int_0^{\pi/2} \cos \phi d\phi \right) = \pi abc / 2 > 0. \end{aligned}$$

El flux a través de tot l'el·lipsoide és $\oint_{E^+} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle = abc \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \cdot \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \phi d\phi \right) = 4\pi abc > 0$, ja que en aquest cas la longitud és $\theta \in [0, 2\pi]$ i la latitud és $\phi \in [-\pi/2, \pi/2]$. ▲

⁷En realitat, només caldria comprovar-ho en un punt de la superfície.

Gràfiques. Si S és la gràfica $z = f(x, y)$ d'una funció $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ i S està orientada segons un vector normal de component vertical positiva, aleshores:

- La parametrització positiva més adequada és $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$, amb $\varphi(x, y) = (x, y, f(x, y))$;
- El vector diferencial de superfície és $d\mathbf{S} = (\varphi_x \wedge \varphi_y) dx dy = (-f_x, -f_y, 1) dx dy$; i per tant
- $\int_S \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle = \int_D (R(x, y, f) - P(x, y, f)f_x - Q(x, y, f)f_y) dx dy$.

Exemple 25. Sigui $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 \leq R^2\}$ orientada al punt $(0, 0, 0)$ pel vector normal unitari $\mathbf{N} = \mathbf{k}$. Calculeu el flux de $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2, 0, 1 + xz)$ a través de S .

Aquesta superfície és la gràfica de $z = f(x, y) = x^2 + y^2$ sobre el disc $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq R^2\}$. Per tant, el flux $\int_S \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle$ és

$$\int_D (1 + xf - x^2 f_x - 0f_y) dx dy = \int_D (1 + x^3 + xy^2 - 2x^3) dx dy = \int_D dx dy + \int_D x(y^2 - x^2) dx dy = \pi R^2.$$

Hem usat que el disc D és simètric respecte la recta $\{x = 0\}$, i per tant $\int_D x(y^2 - x^2) dx dy = 0$. ▲

Camps solenoidals (primera part). Quan la superfície S tanqui una regió $W \subset \mathbb{R}^3$ (és a dir, quan és la frontera d'una regió, $S = \partial W$), com a l'exemple anterior referent a l'el·lipsoide, utilitzarem els símbols

$$\oint_S \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle = \oint_{S^+} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle, \quad \oint_{S^-} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle.$$

En aquests casos podem orientar la superfície segons el seu vector *normal exterior* o el seu vector *normal interior*. En particular, si l'orientem segons el normal exterior, el signe de $\oint_{S^+} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle$ ens diu si el fluid, en mitjana, surt de (signe positiu) o entra a (signe negatiu) la regió W .

Un camp vectorial 3D s'anomena *solenoidal* quan té divergència nul·la a tot el seu domini: $\operatorname{div} \mathbf{F} \equiv 0$. Això és equivalent a demanar que el flux de $\mathbf{F}$ a través de la frontera de qualsevol regió $W \subset \mathbb{R}^3$, continguda en el domini del camp, és nul. És a dir, el fluid que entra per un costat de la frontera, sempre en surt per un altre, com esdevé en tots els *fluids incompressibles*. Com veurem, el teorema de Gauss (vegeu la pàg. 19) ens dóna una de les implicacions d'aquesta equivalència.

El camp de l'exemple 24 no és solenoidal. Els camps constants $\mathbf{F} \equiv \mathbf{F}_0$ són solenoidals. (Per què?)

Exemple 26. Flux de $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, -2z)$ a través de la frontera del cub $W = [-a, a]^3 \subset \mathbb{R}^3$ orientada segons la normal exterior. La frontera del cub és regular a trossos. Calculem el flux per cada una de les seves cares i sumem els sis fluxos.

- A les dues cares $\{x = \pm a\}$, el vector normal unitari exterior és $\mathbf{N} = \pm \mathbf{i} = (\pm 1, 0, 0)$ i la component normal del camp és $F_N = \langle \mathbf{F}, \pm \mathbf{i} \rangle = \langle (\pm a, y, -2z), (\pm 1, 0, 0) \rangle \equiv \pm a$. Per tant,

$$\int_{\{x=\pm a\}} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle = \int_{\{x=\pm a\}} F_N dS = \pm a \operatorname{Area}(\{x = \pm a\}) = \pm 4a^3.$$

- Anàlogament, $\int_{\{y=\pm a\}} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle = \int_{\{y=\pm a\}} F_N dS = \pm a \operatorname{Area}(\{y = \pm a\}) = \pm 4a^3$.
- A les dues cares $\{z = \pm a\}$, el vector normal unitari exterior és $\mathbf{N} = \pm \mathbf{k} = (0, 0, \pm 1)$ i la component normal del camp és $F_N = \langle \mathbf{F}, \pm \mathbf{k} \rangle = \langle (x, y, -2a), (0, 0, \pm 1) \rangle \equiv \mp 2a$. Per tant,

$$\int_{\{z=\pm a\}} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle = \int_{\{z=\pm a\}} F_N dS = \mp 2a \operatorname{Area}(\{z = \pm a\}) = \mp 8a^3.$$

Finalment, el flux total és nul: $\oint_{\partial W} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle = 4a^3 + 4a^3 + 4a^3 + 4a^3 - 8a^3 - 8a^3 = 0$, ja que tot el fluid que entra per les quatre cares verticals del cub, surt per les seves dues cares horitzontals. Provarem més endavant que aquest camp és solenoidal, i per tant el resultat obtingut era previsible. ▲

Exercici. Continuant amb l'exemple anterior, sigui $W = [-a, a]^3$. Quina condició han de complir els paràmetres $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ per tal que $\oint_{\partial W} \alpha x dy dz + \beta y dz dx + \gamma z dx dy = 0$?

ELS TEOREMES INTEGRALS FONAMENTALS: NEWTON–LEIBNIZ, GREEN, STOKES I GAUSS

Els quatre teoremes que presentem en aquesta secció tenen tres característiques comunes:

- (1) En cadascun d'ells s'estableix una igualtat entre dues integrals;
- (2) Una de les integrals es realitza sobre la frontera de l'objecte que apareix a l'altra integral; i
- (3) Les orientacions de totes dues integrals han de ser "compatibles".

Concretament, el teorema de Newton–Leibniz relaciona corbes amb els seus extrems, el teorema de Green relaciona dominis 2D amb les corbes planes que els delimiten, el teorema de Stokes relaciona superfícies de $\mathbb{R}^3$ amb les corbes que formen les seves vores, mentre que el teorema de Gauss relaciona dominis 3D amb les superfícies que els tanquen. El Teorema Fonamental del Càlcul és la pedra angular per a provar cadascun d'aquests teoremes.

Definicions. Sigui $\mathbf{F} = (P, Q, R) : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un camp 3D i $f : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ una funció.

- El *gradient* de la funció f és el camp $\text{grad } f := (f_x, f_y, f_z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$.
- La *divergència* del camp $\mathbf{F}$ és la funció $\text{div } \mathbf{F} := P_x + Q_y + R_z = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$.
- El *rotacional* del camp $\mathbf{F}$ és el camp

$$\text{rot } \mathbf{F} := \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) = (R_y - Q_z, P_z - R_x, Q_x - P_y).$$

- El *laplaciana* de la funció f és la funció $\Delta f := \text{div grad } f = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$.

Aquestes definicions s'adapten al cas 2D de manera òbvia, excepte la del rotacional. El *rotacional* del camp pla $\mathbf{F} = (P, Q) : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ és el camp *vertical* $\text{rot } \mathbf{F} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ donat per

$$\text{rot } \mathbf{F} := (Q_x - P_y)\mathbf{k} = (0, 0, Q_x - P_y).$$

Camps i funcions “especials”. Direm que un camp vectorial $\mathbf{F}$:

- (1) Prové d'un *potencial escalar* f quan $\mathbf{F} = \text{grad } f$;
- (2) Prové d'un *potencial vector* $\mathbf{G}$ quan $\mathbf{F} = \text{rot } \mathbf{G}$;
- (3) És⁸ *solenoidal*, *incompressible* o *conserva volum* quan té divergència nul·la: $\text{div } \mathbf{F} = 0$;
- (4) És *irrotacional* quan té rotacional nul: $\text{rot } \mathbf{F} = \mathbf{0}$;
- (5) És *conservatiu* quan té circulació nul·la al llarg de qualsevol corba tancada continguda en el seu domini de definició; i
- (6) És *central*⁹ quan la seva direcció en qualsevol punt apunta cap a l'origen o s'allunya d'ell, mentre que la seva magnitud només depèn de la distància a l'origen. És a dir, són camps de la forma $\mathbf{F} = h(r)\mathbf{r}$, essent $h : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ una funció arbitrària, $r = \|\mathbf{r}\|$, mentre que el camp $\mathbf{r}$ ve donat per $\mathbf{r}(x, y, z) = (x, y, z)$ en el cas 3D i $\mathbf{r}(x, y) = (x, y)$ en el cas 2D.

Veurem que les propietats 1, 4 i 5 són “quasi” equivalents. Ídem per a les propietats 2 i 3. Les funcions de laplaciana nul s'anomenen *harmòniques*. Veurem exemples de funcions harmòniques al tema dedicat a les equacions en derivades parcials (EDPs).

Exercici. Per a quins valors de $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ és solenoidal el camp lineal $\mathbf{F}(x, y) = (ax + by, cx + dy)$? I per a quins és irrotacional? Per a quines matrius $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ és solenoidal el camp 3D lineal $\mathbf{F}(p) = Ap$? I per a quines és irrotacional?

El teorema del gradient (Newton–Leibniz). La circulació d'un camp que prové d'un potencial escalar al llarg d'una corba arbitrària continguda a l'obert on està definit el camp és igual a la diferència del potencial escalar als extrems de la corba. En símbols, si $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ i $C \subset U$ és una corba, no necessàriament simple, orientada des del seu extrem A fins al seu extrem B , llavors

$$\int_{C^+} \langle \text{grad } f, d\ell \rangle = f(B) - f(A).$$

Prova. Sigui $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una parametrització de la corba C tal que $\sigma(a) = A$ i $\sigma(b) = B$. Sigui $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ la funció $g(t) = f(\sigma(t))$. Aplicant la regla de la cadena, veiem que

$$g'(t) = \frac{d}{dt} \{f(\sigma(t))\} = \langle \text{grad } f(\sigma(t)), \sigma'(t) \rangle.$$

Per tant, $\int_C \langle \text{grad } f, d\ell \rangle = \int_a^b g'(t) dt = g(b) - g(a) = f(B) - f(A)$. □

Corol·lari. Tot camp que prové d'un potencial escalar té circulació nul·la al llarg de totes les corbes tancades contingudes a l'obert on està definit el camp; és a dir, és conservatiu.

Exemple 27. Circulació $\int_C (10x^4 - 2xy^3) dx - 3x^2y^2 dy$ essent C la corba orientada des de $A = (0, 0)$ fins a $B = (2, 1)$ que comple l'equació $x^4 - 6xy^3 = 4y^2$. [Ind.: Newton–Leibniz.]

Per aplicar el teorema de Newton–Leibniz, necessitem dues coses. En primer lloc, que el camp vectorial $\mathbf{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y)) = (10x^4 - 2xy^3, -3x^2y^2)$ provengui d'un potencial escalar f . I en segon lloc, necessitem trobar f . Imposant que $(P, Q) = \mathbf{F} = \text{grad } f = (f_x, f_y)$, resulta que

$$f_x = P = 10x^4 - 2xy^3, \quad f_y = Q = -3x^2y^2.$$

⁸Aquests tres sinònims s'usen en electromagnetisme, teoria de fluids i sistemes dinàmics, respectivament.

⁹Els camps gravitatoris i elèctrics creats per una sola partícula són centrals (lleis de Newton i Coulomb).

Integrant la segona identitat respecte la variable y , veiem que $f(x, y) = -x^2y^3 + g(x)$, essent g una funció a determinar. Si ara recuperem la primera identitat, obtenim

$$g'(x) - 2xy^3 = f_x = 10x^4 - 2xy^3 \Rightarrow g(x) = \int 10x^4 dx = 2x^5 + c \Rightarrow f(x, y) = 2x^5 - x^2y^3 + c,$$

on la constant d'integració $c \in \mathbb{R}$ queda lliure. Per simplificar, prenem $c = 0$. Finalment, $\int_C \langle \mathbf{F}, d\ell \rangle = f(B) - f(A) = f(2, 1) - f(0, 0) = (64 - 4) - 0 = 60$. ▲

Observació. No ha estat necessari parametritzar la corba C . De fet, ni tan sols sabem quin aspecte té. Però això no ens importa, ja que el teorema de Newton–Leibniz implica que la circulació només depèn dels seus extrems. Un altre punt interessant és el càlcul del potencial escalar. Òbviament, si intentem aplicar el mateix mètode a un camp que no prové d'un potencial escalar, arribarem a alguna contradicció. Per tant, se'ns plantegen dos reptes. Existeix algun mètode *simple* per saber quan un camp prové d'un potencial escalar? I per a calcular el seu potencial? No respondrem aquestes preguntes per manca de temps.

Orientacions compatibles (o consistents). De cara als teoremes que segueixen, necessitem definir tres tipus d'orientacions usualment anomenades “compatibles” o “consistents”.

- Donat un domini pla $D \subset \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{R}^3 \cap \{z = 0\}$, sigui $C = \partial D$ la seva frontera. Direm que C està *orientada segons el vector vertical $\mathbf{k}$* quan el vector $\mathbf{k}$ la recorre de manera que el domini queda a la seva esquerra. Per exemple, suposem que D és el domini comprès entre dues circumferències concèntriques C_r i C_R de radis $0 < r < R$, de manera que $C = \partial D = C_r \cup C_R$ té dues components. Llavors, orientem C_r en sentit horari i C_R en sentit antihorari.
- Donada una superfície regular $S \subset \mathbb{R}^3$, sigui $C = \partial S$ la seva frontera i $\mathbf{N}$ una de les seves dues orientacions (és a dir, un vector normal unitari de S). Direm que C està *orientada segons el vector $\mathbf{N}$* quan el vector $\mathbf{N}$ la recorre de manera que la superfície queda a la seva esquerra. Per exemple, suposem que S és la cara lateral d'un cilindre vertical orientat segons el vector normal exterior, de manera que $C = \partial S = C_- \cup C_+$ té dues components: la circumferència superior C_+ i la inferior C_- . Llavors, orientem C_+ en sentit horari i C_- en sentit antihorari (respecte el pla horitzontal on estan contingudes).
- Donada una regió espacial $W \subset \mathbb{R}^3$, sigui $S = \partial W$ la seva frontera. Direm que S està *orientada segons el vector normal exterior a la regió* quan en cada punt de la frontera escollim el vector normal unitari que apunta *cap a fora* de la regió. Per exemple, suposem que W és la regió compresa entre dues esferes concèntriques S_r i S_R de radis $0 < r < R$, de manera que $S = \partial W = S_r \cup S_R$ té dues components. Llavors orientem S_r segons el seu vector normal interior i S_R segons el seu vector normal exterior.

Exercici. Realitzeu alguns dibuixos per tal de clarificar aquests tres conceptes. El segon és el més difícil.

El teorema del rotacional 2D (Green). El flux del rotacional d'un camp 2D a través d'un domini pla és igual a la circulació del camp al llarg de la frontera del domini, si escollim l'orientació adequada sobre la frontera. En símbols, si $D \subset \mathbb{R}^2$ és un domini pla, la seva frontera $C^+ = \partial D$ està orientada segons el vector $\mathbf{k}$ i el camp $\mathbf{F} = (P, Q) : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ és de classe $\mathcal{C}^1$ en un obert que conté D , llavors

$$\int_D \langle \text{rot } \mathbf{F}, \mathbf{k} \rangle dx dy = \int_D (Q_x - P_y) dx dy = \oint_{C^+} P dx + Q dy = \oint_{C^+} \langle \mathbf{F}, d\ell \rangle.$$

La primera igualtat és conseqüència de la definició de rotacional 2D. La tercera ens mostra dues formes equivalents de denotar la circulació. El teorema pròpiament dit es redueix a la segona.

Corol·lari. Tot camp irrotacional 2D té circulació nul·la al llarg de qualsevol corba que tanqui un domini pla contingut a l'obert on està definit el camp.

Exemple 28. Circulació $\oint_{\partial D} (y - \sin x) dx + \cos x dy$ essent ∂D la frontera del triangle de vèrtexs $(0, 0)$, $(\pi/2, 0)$ i $(\pi/2, 1)$ recorreguda en sentit antihorari.

Al final veurem que el camp $\mathbf{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y)) = (y - \sin x, \cos x)$ no prové d'un potencial escalar, amb la qual cosa no es pot aplicar Newton–Leibniz. Per contra, aplicant Green:

$$\begin{aligned} \oint_{\partial D} (y - \sin x) dx + \cos x dy &= \int_D (Q_x - P_y) dx dy = - \int_D (1 + \sin x) dx dy \quad [\text{Fubini}] \\ &= - \int_0^{\pi/2} (1 + \sin x) \left(\int_0^{2x/\pi} dy \right) dx = - \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} (x + x \sin x) dx \\ &= - \frac{2}{\pi} \left[x^2/2 + \sin x - x \cos x \right]_{x=0}^{x=\pi/2} = - \frac{2}{\pi} - \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

El càlcul directe requereix calcular les circulacions al llarg dels tres costats del triangle. La circulació al llarg de la corba tancada $C = \partial D$ no dona zero, i per tant deduïm que el camp $\mathbf{F}$ no prové d'un potencial escalar, tal i com havíem afirmat. ▲

Càlcul d'àrees planes. Si un camp $\mathbf{F} = (P, Q)$ compleix la condició $Q_x - P_y \equiv 1$, llavors $\text{Area}(D) = \int_D dx dy = \oint_{\partial D} P dx + Q dy$ per a tot domini pla $D \subset \mathbb{R}^2$. Per exemple,

$$\text{Area}(D) = \frac{1}{2} \oint_{\partial D} x dy - y dx = \oint_{\partial D} x dy = - \oint_{\partial D} y dx.$$

Obtenim aquestes fórmules amb els camps $\mathbf{F}(x, y) = (-y/2, x/2)$, $\mathbf{F}(x, y) = (0, x)$ i $\mathbf{F}(x, y) = (-y, 0)$, respectivament. Quan D està delimitat per una corba parametritzada en sentit antihorari per $\sigma(t) = (x(t), y(t))$, $a \leq t \leq b$, les fórmules tenen una expressió sorprenentment simple:

$$\text{Area}(D) = \frac{1}{2} \int_a^b (x(t)y'(t) - y(t)x'(t)) dt = \int_a^b x(t)y'(t) dt = - \int_a^b y(t)x'(t) dt.$$

La primera expressió sembla més complicada, però és simètrica i sovint simplifica els càlculs.

Exemple 29. Àrea del domini D delimitat per l'astroide $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}\}$ estudiat a l'exemple 4. La parametrització de l'astroide era $\sigma(t) = (x(t), y(t)) = (a \cos^3 t, a \sin^3 t)$, amb $0 \leq t \leq 2\pi$. Per tant,

$$\begin{aligned} \text{Area}(D) &= \frac{1}{2} \oint_{C^+} x dy - y dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (x(t)y'(t) - y(t)x'(t)) dt \\ &= \frac{3a^2}{2} \int_0^{2\pi} (\cos^4 t \sin^2 t + \cos^2 t \sin^4 t) dt = \frac{3a^2}{2} \int_0^{2\pi} \cos^2 t \sin^2 t dt \\ &= 6a^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 t \sin^2 t dt = \frac{3a^2}{2} \int_0^{\pi/2} \sin^2(2t) dt \\ &= \frac{3a^2}{4} \int_0^\pi \sin^2 s ds = \frac{3\pi}{8} a^2. \end{aligned}$$

Comprovem doncs, com és d'esperar en un domini pla, que l'àrea és proporcional al quadrat de a . En aquest cas la constant de proporcionalitat és $3\pi/8$. ▲

El planímetre. Hem vist que es pot calcular l'àrea d'un domini pla prenent certes mesures mentre recorrem la seva frontera en el sentit adequat. Aquesta idea és la base dels planímetres, instruments mecànics que determinen l'àrea de figures arbitràries. Podeu consultar [Wikipedia](#), o bé la web [Mathematik.com](#) sobre el funcionament d'un planímetre polar (vegeu també un problema de la llista que clarifica el seu ús).

El teorema del rotacional 3D (Stokes). El flux del rotacional d'un camp 3D a través d'una superfície és igual a la circulació del camp al llarg de la corba frontera de la superfície, si orientem la corba de manera compatible amb la superfície. En símbols, si $S \subset \mathbb{R}^3$ és una superfície orientada per un vector normal unitari $\mathbf{N}$, la seva corba frontera $C^+ = \partial S$ està orientada segons el vector $\mathbf{N}$ i el camp $\mathbf{F} : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ és de classe $\mathcal{C}^1$ en un obert que conté S , aleshores

$$\int_{S^+} \langle \text{rot } \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle = \oint_{C^+} \langle \mathbf{F}, d\boldsymbol{\ell} \rangle.$$

Corol·lari. Tot camp irrotacional 3D té circulació nul·la al llarg de qualsevol corba tancada que delimiti una superfície continguda a l'obert on està definit el camp.

Demostració del teorema de Green. El teorema de Green és una conseqüència directa del teorema de Stokes. N'hi ha prou amb notar que si la superfície S és un domini pla $D \subset \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{R}^3 \cap \{z = 0\}$, podem prendre $\mathbf{N} = \mathbf{k}$ i $dS = dx dy$, i per tant $d\mathbf{S} = \mathbf{N} dS = \mathbf{k} dx dy$ i $\langle \text{rot } \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle = \langle \text{rot } \mathbf{F}, \mathbf{k} \rangle dx dy$. De fet, la igualtat $\int_D \langle \text{rot } \mathbf{F}, \mathbf{k} \rangle dx dy = \oint_{C^+} \langle \mathbf{F}, d\boldsymbol{\ell} \rangle$ es compleix tot i que el camp $\mathbf{F}$ no sigui pla. És a dir, és certa fins i tot amb camps de la forma $\mathbf{F} = (P, Q, R) : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, sempre i quan $D \subset U$. □

Exemple 30. Sigui $\mathbf{r}(x, y, z) = (x, y, z)$. Proveu que si $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, z) \equiv (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ és un camp constant, $S \subset \mathbb{R}^3$ és una superfície i $C = \partial S$, llavors

$$2 \int_S \langle \mathbf{v}, d\mathbf{S} \rangle = \oint_C \langle \mathbf{v} \wedge \mathbf{r}, d\boldsymbol{\ell} \rangle$$

suposant que les orientacions de S i C són consistents (és a dir, suposant que S i C estan orientades segons el mateix vector normal).

Comencem calculant el camp $\mathbf{G} = \mathbf{v} \wedge \mathbf{r}$ i el seu rotacional:

$$\begin{aligned}\mathbf{G}(x, y, z) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = (bz - cy, cx - az, ay - bx), \\ \text{rot } \mathbf{G}(x, y, z) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ bz - cy & cx - az & ay - bx \end{vmatrix} = (2a, 2b, 2c) = 2\mathbf{v}.\end{aligned}$$

Ara n'hi ha prou amb aplicar Stokes: $2 \int_S \langle \mathbf{v}, d\mathbf{S} \rangle = \int_S \langle \text{rot } \mathbf{G}, d\mathbf{S} \rangle = \oint_C \langle \mathbf{G}, d\ell \rangle = \int_C \langle \mathbf{v} \wedge \mathbf{r}, d\ell \rangle$. $\blacktriangle$

Exercici. Si la corba C és plana i el vector $\mathbf{v}$ és paral·lel al pla que conté C , què podem deduir de l'exemple anterior?

Exemple 31. Circulació $\oint_C -y^3 dx + x^3 dy - z^3 dz$ essent C la intersecció del cilindre $Q \equiv x^2 + y^2 = 1$ i el pla $\Pi \equiv x + y + z = 1$, orientada segons el vector normal unitari $\mathbf{N} = (1, 1, 1)/\sqrt{3}$.

Primera manera (Definició). La projecció de la corba C al pla xy és la circumferència de radi 1 centrada a l'origen, i per tant escollim la parametrització $\sigma = (x, y, z) : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ donada per $x(t) = \cos t$, $y(t) = \sin t$ i $z(t) = 1 - x(t) - y(t) = 1 - \cos t - \sin t$. L'orientació antihorària fa que el vector normal $\mathbf{N}$ recorri C deixant l'interior del cilindre a la seva esquerra. Per tant,

$$\begin{aligned}\oint_C -y^3 dx + x^3 dy - z^3 dz &= \int_0^{2\pi} (-y^3(t)x'(t) + x^3(t)y'(t) - z^3(t)z'(t)) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (\sin^4 t + \cos^4 t) dt - \left[\frac{z^4(t)}{4} \right]_{t=0}^{t=2\pi} \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} (3 + \cos 4t) dt = 3\pi/2,\end{aligned}$$

ja que $1 = (\cos^2 t + \sin^2 t)^2 = \cos^4 t + 2\cos^2 t \sin^2 t + \sin^4 t$, i per tant $\cos^4 t + \sin^4 t = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2t = \frac{3 + \cos 4t}{4}$.

Segona manera (Stokes). Per aplicar Stokes necessitem un camp i una superfície orientada. El camp només pot ser $\mathbf{F}(x, y, z) = (-y^3, x^3, -z^3)$. El seu rotacional és

$$\text{rot } \mathbf{F}(x, y, z) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y^3 & x^3 & -z^3 \end{vmatrix} = (0, 0, 3x^2 + 3y^2).$$

Necessitem que la corba C sigui la frontera de la superfície, i per tant l'elecció més simple és la superfície plana $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, x + y + z = 1\}$. Orientem S segons el seu vector normal unitari $\mathbf{N} = (1, 1, 1)/\sqrt{3}$. Donat que la superfície és la gràfica de $z = f(x, y) = 1 - x - y$, el seu vector diferencial de superfície és $d\mathbf{S} = (-f_x, -f_y, 1) dx dy = (1, 1, 1) dx dy$. Per tant, aplicant Stokes veiem que

$$\int_{C^+} \langle \mathbf{F}, d\ell \rangle = \int_{S^+} \langle \text{rot } \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle = 3 \int_D (x^2 + y^2) dx dy = 3 \int_{D^*} r^2 r dr d\theta = 3 \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \cdot \left(\int_0^1 r^3 dr \right) = \frac{3\pi}{2}.$$

Aquí hem realitzat un canvi a polars, prenent $D^* = [0, 1] \times [0, 2\pi]$.

Exemple 32. Circulació $\oint_C 2x dx + y dy + 3z dz$ essent C la corba tancada continguda a la intersecció¹⁰ del paraboloid hiperbòlic $P \equiv x^2 - y^2 = 2z$ i el hiperboloid d'una fulla $H \equiv x^2 + y^2 = 1 + z^2$ orientada segons el vector normal $(-x, y, 1)$.

Primera manera (Stokes). Sigui S el tros del paraboloid tancat per C . Després de comprovar que el camp $\mathbf{F}(x, y, z) = (2x, y, 3z)$ és irrotacional, deduïm que

$$\oint_C 2x dx + y dy + 3z dz = \oint_C \langle \mathbf{F}, d\ell \rangle = \int_S \langle \text{rot } \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle = 0.$$

Segona manera (Newton-Leibniz). El camp $\mathbf{F}$ prové d'un potencial escalar. Efectivament, si impossem que $(2x, y, 3z) = \mathbf{F} = \text{grad } f = (f_x, f_y, f_z)$, resulta que¹¹

$$f_x = 2x, \quad f_y = y, \quad f_z = 3z.$$

Integrant la darrera identitat respecte la variable z , veiem que $f(x, y, z) = g(x, y) + 3z^2/2$, essent g una funció a determinar. Tot seguit, la segona identitat es converteix en $y = g_y(x, y)$, i per tant integrant respecte la variable y resulta que $f(x, y, z) = g(x, y) + 3z^2/2 = h(x) + y^2/2 + 3z^2/2$, essent h una funció a determinar. Finalment, la primera identitat esdevé $2x = h'(x)$, i per tant $h(x) = x^2 + c$, essent $c \in \mathbb{R}$ una constant d'integració arbitrària que podem

¹⁰ $P \cap H$ conté la corba C i quatre corbes no tancades asimptòtiques a les rectes $\{y = \pm x, z = 0\}$.

¹¹Probablement en aquest cas podeu veure quin és el potencial escalar a simple vista, però donem un mètode general (probablement, no el millor) per a trobar-lo.

escollir com a zero. Per tant, el camp prové del potencial escalar $f(x, y, z) = x^2 + y^2/2 + 3z^2/2$, i per tant té circulació nul·la al llarg de qualsevol corba tancada.

Tercera manera (Definició). Exercici apte només per a valents. Expressem la corba C usant una parametrització “antihorària” $\sigma = (x, y, z) : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ basada en coordenades cilíndriques; és a dir,

$$x(\theta) = r(\theta) \cos \theta, \quad y(\theta) = r(\theta) \sin \theta, \quad z(\theta) = (x^2(\theta) - y^2(\theta))/2 = \frac{1}{2}r^2(\theta) \cos 2\theta.$$

Per determinar la funció $r(\theta)$, imposem que C compleixi l'equació de l'hiperboloide:

$$4r^2 = 4(x^2 + y^2) = 4(1 + z^2) = 4 + r^4 \cos^2 2\theta \Rightarrow r^2 = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cos^2 2\theta}}{\cos^2 2\theta} = 2 \frac{1 \pm |\sin 2\theta|}{\cos^2 2\theta}.$$

Si $\theta \in \{\pi/4, 3\pi/4, 5\pi/4, 7\pi/4\}$, llavors $\cos(2\theta) = 0$ i l'equació $4r^2 = 4$ dona $r = 1$. Per tant, ens quedem amb el signe negatiu: $r^2(\theta)/2 = (1 - |\sin 2\theta|)/\cos^2(2\theta)$ i $z(\theta) = (1 - |\sin 2\theta|)/\cos(2\theta)$. Queda clar que els càlculs es compliquen massa (no val la pena d'acabar-los). ▲

El teorema de la divergència 3D (Gauss). La integral de la divergència d'un camp 3D sobre un cos és igual al flux sortint del camp a través de la frontera del cos. En símbols, si $W \subset \mathbb{R}^3$ és una regió, la seva frontera $S^+ = \partial W$ està orientada segons el vector normal exterior a la regió i el camp $\mathbf{F} = (P, Q, R) : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ és de classe $\mathcal{C}^1$ en un obert que conté W , llavors

$$\int_W \operatorname{div} \mathbf{F} dx dy dz = \int_W (P_x + Q_y + R_z) dx dy dz = \oint_{S^+} P dy dz + Q dz dx + R dx dy = \oint_{S^+} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle.$$

La primera igualtat és conseqüència de la definició de divergència. La tercera ens mostra dues formes equivalents de denotar el flux a través d'una superfície. El teorema pròpiament dit es redueix a la segona.

Corol·lari. Tot camp solenoidal 3D té flux nul a través de qualsevol superfície que tanqui una regió continguda a l'obert on està definit el camp.

Exemple 33. Quan el camp $\mathbf{F}$ prové d'un potencial escalar: $\mathbf{F} = \operatorname{grad} f$ para alguna funció $f : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$, el teorema de Gauss implica que

$$\int_W \Delta f dx dy dz = \oint_S \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} dS,$$

on $\Delta f = \operatorname{div} \operatorname{grad} f$ és el laplacà de f i $\partial f / \partial \mathbf{n} := \langle \operatorname{grad} f, \mathbf{N} \rangle$ denota la derivada direccional en la direcció del vector normal unitari exterior $\mathbf{N}$ a la regió W . En particular, si la funció f és harmònica, llavors $\oint_S \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} dS = 0$ per a tota superfície que tanqui una regió continguda a l'obert on està definida f . ▲

Exemple 34. La divergència del camp $\mathbf{r}(x, y, z) = (x, y, z)$ és constant igual a 3, i per tant

$$3 \operatorname{Vol}(W) = \int_W \operatorname{div} \mathbf{r} dx dy dz = \oint_{S^+} \langle \mathbf{r}, d\mathbf{S} \rangle$$

per a tota regió $W \subset \mathbb{R}^3$. És a dir, el flux del camp $\mathbf{r}$ a través de la frontera de qualsevol cos 3D és el triple del volum del cos. Per exemple, podem obtenir la relació entre el volum i l'àrea d'una esfera. Sigui W_R l'esfera sòlida de radi R centrada a l'origen i sigui $S_R = \partial W_R$. El vector normal unitari exterior sobre S_R és $\mathbf{N} = (x/R, y/R, z/R)$, i per tant la component normal del camp és $r_N = \langle \mathbf{r}, \mathbf{N} \rangle = \langle (x, y, z), (x/R, y/R, z/R) \rangle = (x^2 + y^2 + z^2)/R \equiv R$. Per tant,

$$3 \operatorname{Vol}(W_R) = \oint_{S_R^+} \langle \mathbf{r}, d\mathbf{S} \rangle = \oint_{S_R^+} r_N dS = R \operatorname{Area}(S_R).$$

No és cap sorpresa, ja que, com tothom sap, $\operatorname{Vol}(W_R) = \frac{4}{3}\pi R^3$ i $\operatorname{Area}(S_R) = 4\pi R^2$. ▲

El següent truc és important, ja que permet aplicar el teorema de Gauss a superfícies no tancades. Consisteix a tancar la superfície original afegint unes “tapes” adequades. Com que el resultat no depèn de l'elecció de les tapes, usarem les més simples (que sovint seran tapes planes).

Exemple 35. Flux del camp solenoidal $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, -2z)$ a través de la superfície oberta $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \leq 1/2\}$, orientada segons el vector normal $\mathbf{N} = (x, y, z)$.

La superfície S té forma de bol esfèric. Podem tancar-la afegint la tapa superior del bol, que és la superfície plana $S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 3/4, z = 1/2\}$. Les dues superfícies juntes tanquen el domini 3D $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \leq 1/2\}$. Passem a estudiar l'orientació. El vector $\mathbf{N} = (x, y, z)$ és el vector normal unitari exterior sobre la part esfèrica del bol, mentre que $\mathbf{N}_1 = \mathbf{k} = (0, 0, 1)$ és el vector normal unitari exterior de la tapa plana. Per tant, aplicant el teorema de Gauss en el domini W , obtenim

$$0 = \int_W \operatorname{div} \mathbf{F} dx dy dz = \int_{\partial W} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle = \int_{S^+} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle + \int_{S_1^+} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle \Rightarrow \int_{S^+} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle = - \int_{S_1^+} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle.$$

Calculem el darrer flux integrant la component normal del camp $\mathbf{F}$ sobre la tapa plana S_1 . Com que la coordenada vertical és constant en la tapa: $z \equiv 1/2$, la component normal també ho és:

$$F_N = \langle \mathbf{F}, \mathbf{N}_1 \rangle = \langle (x, y, -2z), (0, 0, 1) \rangle = -2z \equiv -1.$$

Finalment, $\int_{S^+} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle = -\int_{S_1^+} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle = -\int_{S_1} F_N dS = \text{Area}(S_1) = 3\pi/4$, ja que la tapa S_1 és un cercle de radi $\sqrt{3}/2$. $\blacktriangle$

Exercici. Proveu que el flux del camp lineal $\mathbf{F}(x, y, z) = (ax, by, cz)$ a través de la superfície oberta de l'exemple anterior és $\int_{S^+} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle = (a + b + c) \text{Vol}(W) - c \text{Area}(S_1)/2 = \pi(9a + 9b - 6c)/8$.

Equacions Diferencials Ordinàries (EDOs)

Aquest tema és probablement el més senzill. Tracta de la resolució i anàlisi de diversos tipus d'*equacions diferencials ordinàries (EDOs)*. Suposarem que el lector sap com resoldre les EDOs de primer ordre bàsiques:

- EDOs de variables separades de la forma $x' = f(t)g(x)$, on $f(t)$ i $g(x)$ són funcions contínues en alguns interval oberts $I \subset \mathbb{R}$ i $J \subset \mathbb{R}$.
- EDOs lineals de primer ordre de la forma $x' = a(t)x + b(t)$, on $a(t)$ i $b(t)$ són funcions contínues en algun interval obert $I \subset \mathbb{R}$.

Aquí aprofundirem en l'estudi de les EDOs i sistemes d'EDOs, incloent EDOs d'ordre superior, posant èmfasi en les seves aplicacions pràctiques. Algunes de les preguntes que volem respondre, si el temps ens ho permet, són les següents:

- Com es comporten, en línies generals, les solucions d'un sistema lineal a coeficients constants? I les solucions d'un sistema no lineal autònom al voltant d'un punt d'equilibri?
- Com funciona el mètode de datació per carboni-14? (Willard Libby va guanyar el premi Nobel de Química el 1960 per aquest mètode.)
- Com evoluciona la concentració de contaminants en un llac situat al curs d'un riu amb fàbriques a les seves vores? Quan de temps han de tancar les fàbriques per tal de complir una determinada normativa medi-ambiental?
- On s'ha de col·locar un satèl·lit perquè es quedi "quiet"? Què passa si el posicionament falla i el satèl·lit es queda a uns (pocs) quilòmetres de la posició calculada?
- Quina és la base matemàtica del *principio d'exclusió* que afirma que si tenim diverses espècies que competeixen per uns recursos, llavors a llarg termini només en pot sobreviure una?

NOCIONS I RESULTATS BÀSICS

Sistemes d'EDOs. Estudiarem *equacions diferencials*, que tenen funcions com a solucions, i en les quals apareixen la funció incògnita i algunes de les seves derivades. En aquest tema considerem equacions diferencials *ordinàries (EDOs)*, la qual cosa expressa que les funcions incògnites depenen d'una única variable. Deixem per a un altre tema les equacions *en derivades parcials (EDPs)*, en les quals les funcions incògnites poden dependre de diverses variables.

Començarem pels *sistemes d'EDOs de primer ordre en forma normal*, la qual cosa significa que tenim tantes equacions com funcions incògnites i a cada equació una derivada primera apareix aïllada en funció d'una expressió que no conté derivades. És a dir, són equacions del tipus

$$(1) \quad \mathbf{x}' = \mathbf{F}(t, \mathbf{x})$$

on

- t és el *temps* o *variable independent*,
- $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ és la *incògnita* o *variable dependent*, i
- $\mathbf{F} : U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\mathbf{F} = \mathbf{F}(t, \mathbf{x})$, és una aplicació que depèn d'un argument escalar t i un argument vectorial $\mathbf{x}$.

Direm que el sistema és *autònom* si el temps no apareix explícitament a l'expressió que el defineix. Les *solucions* o *trajectòries* del sistema (1) són totes aquelles funcions vectorials

$$\mathbf{x} : I \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}(t),$$

definides en un interval obert $I \subset \mathbb{R}$ que satisfan el sistema. En particular:

- La funció $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ és derivable, i
- L'aplicació $\mathbf{F} = \mathbf{F}(t, \mathbf{x})$ es pot avaluar en els punts $(t, \mathbf{x}(t))$ per a tot $t \in I$.

La corba $C = \mathbf{x}(I) \subset \mathbb{R}^n$ és l'*òrbita* de la solució $\mathbf{x}(t)$. Així doncs, la diferència entre solucions (o trajectòries) i òrbites és que les solucions expliciten la velocitat amb què es recorren les òrbites.

Camps vectorials. Considerem el sistema de primer ordre en forma normal

$$\mathbf{x}' = \mathbf{F}(t, \mathbf{x}),$$

on l'aplicació $\mathbf{F} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ està definida en un obert $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Físicament, podem interpretar el sistema com una condició que fixa la velocitat $\mathbf{x}' = \mathbf{F}(t, \mathbf{x})$ d'una partícula situada a la posició $\mathbf{x}$ a l'instant t . Geomètricament, podem pensar que hi ha un vector $\mathbf{F}(t, \mathbf{x})$ a la posició $\mathbf{x}$ a l'instant t . D'aquí ve que en aquest context l'aplicació $\mathbf{F} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ s'anomeni *camp de velocitats* o *camp de vectors*. Dos exemples intuïtius d'aquests camps són la disposició que adquireixen unes ferritges sota l'influx d'un imant o l'aspecte canviant d'un camp de blat quan bufa el vent.

Per definició, la funció $\mathbf{x} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ és una solució o trajectòria del sistema anterior quan

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{F}(t, \mathbf{x}(t)), \quad \forall t \in I.$$

És a dir, $\mathbf{x}(t)$ és una solució del sistema si i només si, considerant-la com una corba parametritzada, té com a vector tangent el camp de vectors en cadascun dels punts per on passa. Així doncs, hem relacionat el problema analític de resoldre el sistema $\mathbf{x}' = \mathbf{F}(t, \mathbf{x})$ amb el problema geomètric de trobar trajectòries tangents al camp vectorial $\mathbf{F}(t, \mathbf{x})$.

Exercici. Dibuixeu el camp vectorial pla $\mathbf{F}(x, y) = (x, y)$ i algunes de les seves òrbites.

Exercici. Dibuixeu el camp vectorial pla $\mathbf{F}(x, y) = (-y, x)$ i algunes de les seves òrbites.

Teoremes d'existència i unicitat. Els problemes en què busquem la trajectòria d'una partícula que segueix un camp de velocitats donat i que en un cert instant inicial està situada en una posició concreta s'anomenen *problemes de valor inicial (PVI)*. La condició inicial s'expressa així: $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$, on t_0 és l'instant inicial i $\mathbf{x}_0$ és la posició o valor inicial. Si $\mathbf{x}(t)$ és una solució del sistema $\mathbf{x}' = \mathbf{F}(t, \mathbf{x})$ definida en un entorn de l'instant t_0 i $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$, llavors, suposant que els objectes involucrats es poden derivar tants cops com vulguem, resulta que

$$\mathbf{x}'(t_0) = \mathbf{F}(t_0, \mathbf{x}_0), \quad \mathbf{x}''(t_0) = D_t \mathbf{F}(t_0, \mathbf{x}_0) + D_{\mathbf{x}} \mathbf{F}(t_0, \mathbf{x}_0) \mathbf{F}(t_0, \mathbf{x}_0), \quad \dots$$

És a dir, la posició inicial de la partícula determina la seva velocitat inicial, la seva acceleració inicial, etc. Per tant, sembla raonable pensar que la trajectòria de la partícula queda completament determinada; o sigui, que els PVI tenen solucions úniques. Aquesta intuïció queda confirmada pel següent teorema, que no provarem.

Teorema (Teorema d'existència i unicitat per a sistemes). *Si el camp $\mathbf{F} = \mathbf{F}(t, \mathbf{x})$ és de classe $\mathcal{C}^1$ en un obert $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ i $(t_0, \mathbf{x}_0) \in U$, llavors el PVI*

$$\mathbf{x}' = \mathbf{F}(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0,$$

té exactament una solució local; és a dir, una única solució definida quan $|t - t_0|$ és petit.

Quan el sistema és autònom; és a dir, quan el camp de velocitats és de la forma $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$, la velocitat $\mathbf{x}' = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ de la partícula només depèn de la posició $\mathbf{x}$ però no de l'instant concret¹². En aquest cas, el teorema d'existència i unicitat implica que òrbites de partícules diferents no poden interseccionar-se (de fet, això pot ser fals si no es compleixen les condicions del teorema; per exemple amb l'EDO $x' = x^{2/3}$, en què el camp no és $\mathcal{C}^1$).

Quan el sistema no és autònom; és a dir, quan existeixen punts on la velocitat depèn de l'instant t , pot esdevenir fins i tot que òrbites de partícules diferents es tallin de manera transversal. Evidentment, les partícules passaran pel punt de tall en instants diferents.

EDOs d'ordre superior. També estudiarem les equacions amb una sola funció incògnita

$$(2) \quad x^{(n)} = f(t, x, x', \dots, x^{(n-1)})$$

on

- t és el temps o variable independent,
- x és la funció incògnita o variable dependent,
- n és el ordre de l'equació, i
- $f = f(t, x, x', \dots, x^{(n-1)})$ és una funció que depèn de $n + 1$ arguments escalars.

Aquestes equacions s'anomenen *equacions diferencials ordinàries (EDOs) en forma normal*, porque la derivada mayor $x^{(n)}$ apareix despejada.

Qualsevol EDO en forma normal d'ordre n es pot transformar en un sistema d'EDOs de primer ordre en forma normal amb n equacions. Concretament, introduint les funcions incògnita $x_1 = x$, $x_2 = x'$, $\dots$, $x_n = x^{(n-1)}$, veiem que l'equació (2) es converteix en el sistema (1) amb

$$\mathbf{F}(t, \mathbf{x}) = (x_2, \dots, x_n, f(t, \mathbf{x})).$$

Corol·lari (Teorema d'existència i unicitat per a EDOs). *Si la funció $f = f(t, x, x', \dots, x^{(n-1)})$ és de classe $\mathcal{C}^1$ en un obert $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ i $(t_0, x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) \in U$, llavors el PVI*

$$\begin{cases} x^{(n)} = f(t, x, x', \dots, x^{(n-1)}) \\ x(t_0) = x_0, x'(t_0) = x_1, \dots, x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1} \end{cases}$$

té exactament una solució local; és a dir, una única solució definida quan $|t - t_0|$ és petit.

Les EDOs dels següents exemples són de variables separades, i per tant són fàcils de resoldre.

Exemple 36. El PVI $x' = x^2$, $x(0) = 1$, té una única solució: $x(t) = 1/(1-t)$. Aquesta solució està definida a l'interval $I = (-\infty, 1)$ i no es pot estendre més, ja que arriba a infinit en un temps finit. ▲

¹²Aquesta situació implica que cada espiga manté la seva posició a l'exemple del camp de blat i el vent.

Exemple 37. El PVI $tx' = x$, $x(0) = 0$, té infinites solucions: $x(t) = ct$, amb $c \in \mathbb{R}$ constant lliure. En canvi, el PVI $tx' = x$, $x(0) = x_0 \neq 0$, no té cap solució, ja que si en tingués alguna, en avaluar l'equació a l'instant $t = 0$ resulta que $x_0 = x(0) = 0 \cdot x'(0) = 0$. Aquests resultats no contradueixen el teorema d'existència i unicitat per a EDOs lineals ja que l'equació $tx' = x$ no està normalitzada i és *singular* a l'instant $t = 0$. (Per normalitzar-la es necessita dividir per t .) ▲

Val la pena remarcar que en els PVI per a EDOs s'ha de fixar el valor de la funció incògnita i algunes de les seves derivades en un mateix instant inicial, per tenir una condició inicial "completa". En particular, les gràfiques al pla (t, x) de dues solucions diferents d'una EDO en forma normal d'ordre n només poden intersecar-se quan $n \geq 2$.

Exemple 38. La solució general de l'EDO lineal de primer ordre $x' = ax + b$, amb $a \neq 0$, és

$$x_g(t) = ce^{at} - b/a,$$

on la constant $c \in \mathbb{R}$ queda lliure. No hi ha dues solucions diferents les gràfiques de les quals s'intersequin. ▲

Exemple 39. Veurem més endavant que la solució general de l'EDO lineal homogènia de segon ordre a coeficients constants $x'' + \omega^2 x = 0$, amb $\omega > 0$, és

$$x_h(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t,$$

on les constants $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ són lliures. Les gràfiques de les solucions $x_1(t) = \cos \omega t$ i $x_2(t) = \sin \omega t$ es tallen transversalment en infinits punts. ▲

El retrat de fase d'EDO de primer ordre autònoms. Considerem l'EDO de primer ordre autònoma en forma normal

$$x' = f(x)$$

on el terme $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ és una funció de classe $\mathcal{C}^1$ en un interval obert $I \subset \mathbb{R}$. Si $x(t)$ és la solució del PVI $x' = f(x)$, $x(0) = x_0 \in I$, aleshores es compleix que:

- $f(x_0) > 0 \Rightarrow x(t)$ és creixent en $t = 0$ i el camp de vectors en x_0 apunta cap a la dreta¹³;
- $f(x_0) < 0 \Rightarrow x(t)$ és decreixent en $t = 0$ i el camp de vectors en x_0 apunta a la esquerra;
- $f(x_0) = 0 \Rightarrow x(t) \equiv x_0$ i diem que x_0 és un *punt d'equilibri*.

Una pregunta natural és: com es comporten les solucions de $x' = f(x)$ prop d'un equilibri? Direm que un equilibri és *atractor/repulsor* quan les solucions que comencen a punts propers s'apropen a/s'allunyen del punt d'equilibri. L'estabilitat d'un equilibri x_0 de l'EDO $x' = f(x)$ es pot deduir mirant el signe de la funció $f(x)$ quan $x \gtrsim x_0$ i quan $x \lesssim x_0$, la qual cosa permet determinar com és el camp de vectors als dos costats de x_0 . Els punts d'equilibri d'EDO de primer ordre poden ser repulsors per un costat i atractors per l'altre.

Exemple 40. Dibuixeu el retrat de fase de l'equació logística

$$x' = kx(1 - x/m), \quad k, m > 0.$$

La funció $f(x) = kx(1 - x/m)$ és negativa en $(-\infty, 0) \cup (m, \infty)$, positiva en $(0, m)$ i s'anul·la als dos punts d'equilibri $x = 0$ i $x = m$. Per tant, la solució del PVI

$$x' = kx(1 - x/m), \quad x(0) = x_0$$

compleix les propietats següents:

- $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = m$ si $x_0 > 0$;
- $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = -\infty$ si $x_0 < 0$; i
- $x(t) \equiv x_0$ si $x_0 = 0$ o $x_0 = m$.

L'equilibri $x = m$ és atractor (A) i l'equilibri $x = 0$ és repulsor (R), vegeu la figura 1. ▲

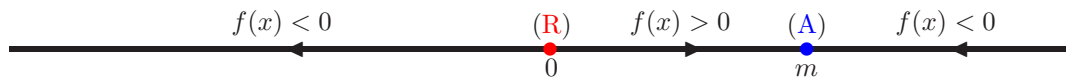


FIGURA 1. Retrat de fase de l'equació logística $x' = f(x) = kx(1 - x/m)$.

Exemple 41. Discutiu l'estabilitat del únic punt d'equilibri de l'EDO $x' = x^2$.

La funció $f(x) = x^2$ només s'anul·la a l'origen. Per tant, l'únic equilibri és $x_0 = 0$. A més, $f(x)$ és positiva als dos costats del punt d'equilibri, i per tant x_0 és repulsor per la dreta i atractor per l'esquerra. A l'exemple 36 vam veure que la partícula escapa a infinit en temps finit si la seva posició inicial és $x(0) = 1$. El mateix resultat és cert sempre que $x(0) > 0$. ▲

¹³Suposant que dibuixem l'interval I horitzontalment amb l'orientació estàndard.

Exercici. Sigui x_0 un punt d'equilibri de l'EDO $x' = f(x)$. Proveu que:

- $f'(x_0) > 0 \implies x_0$ és repulsor (pels dos costats).
- $f'(x_0) < 0 \implies x_0$ és atractor (pels dos costats).

Exercici. Practiqueu amb el [MIT Mathlet](#) sobre “Phase Lines” per visualitzar retrats de fase 1D.

SISTEMES LINEALS

El sistema $\mathbf{x}' = \mathbf{F}(t, \mathbf{x})$ és un *sistema d'EDOs lineals de primer ordre en forma normal* —o, abreviant, un sistema lineal— quan $\mathbf{F}(t, \mathbf{x})$ sigui lineal en la incògnita. És a dir, quan

$$(3) \quad \mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x} + \mathbf{b}(t)$$

amb funcions contínues $A : I \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ i $\mathbf{b} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ definides en algun interval obert $I \subset \mathbb{R}$. Direm que el sistema lineal és:

- *homogeni*, quan $\mathbf{b}(t) = 0$; i
- *a coeficients constants*, quan la matriu $A(t)$ no depèn del temps.

Si el sistema $\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x} + \mathbf{b}(t)$ és no homogeni, direm que $\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x}$ és el seu *sistema homogeni associat*.

Els sistemes lineals compleixen un resultat d'existència i unicitat més potent que els sistemes no lineals, ja que les seves solucions tenen un caràcter global.

Teorema (Teorema d'existència i unicitat per a sistemes lineals). *Si $A = A(t)$ i $\mathbf{b} = \mathbf{b}(t)$ són contínues en un interval obert $I \subset \mathbb{R}$, $t_0 \in I$ i $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, llavors el PVI lineal*

$$\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x} + \mathbf{b}(t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0,$$

té exactament una solució global; és a dir, una única solució definida a tot l'interval I .

Tot seguit, començarem resumint alguns mètodes quantitius per resoldre sistemes lineals. També desenvoluparem mètodes qualitatius que donen informació sobre l'aspecte de les trajectòries d'un sistema lineal sense necessitat de resoldre el sistema.

Resolució de sistemes lineals.

Estructura de les solucions. Les solucions d'un sistema lineal *homogeni* formen un subspai vectorial, la dimensió del qual coincideix amb la dimensió del sistema; és a dir, amb el nombre d'incògnites. D'altra banda, en el cas d'un sistema lineal *no homogeni* les solucions es poden expressar com la suma de les solucions del sistema homogeni associat i una solució particular qualsevol del sistema no homogeni.

Conjunts i matrius fonamentals. Un *conjunt fonamental de solucions* d'un sistema lineal homogeni és qualsevol base del subspai vectorial format per les seves solucions. Si el sistema té dimensió n , llavors qualsevol conjunt de n solucions $\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_n(t)$ linealment independents forma un conjunt fonamental, i llavors la solució general és la combinació lineal

$$\mathbf{x}_h(t) = c_1\mathbf{x}_1(t) + \dots + c_n\mathbf{x}_n(t), \quad c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}.$$

El *wronskià* de les solucions $\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_n(t)$ és el determinant de la matriu quadrada obtinguda escrivint les solucions en columnes. És a dir,

$$w(t) = w[\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_n(t)] = \det[\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_n(t)].$$

El wronskià és l'eina estàndard per a comprovar la independència de n solucions:

- Les solucions $\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_n(t)$ són linealment dependents $\Leftrightarrow w(t) = 0 \quad \forall t$.
- Les solucions $\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_n(t)$ són linealment independents $\Leftrightarrow w(t) \neq 0 \quad \forall t$.

Finalment, diem que una matriu quadrada $X : I \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ és una *matriu fonamental* del sistema $\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x}$ quan les seves columnes són solucions linealment independents del sistema; és a dir, quan $X'(t) = A(t)X(t)$ i $\det[X(t)] \neq 0$ per a tot $t \in I$. Una manera de obtenir una matriu fonamental consisteix a trobar n solucions linealment independents del sistema i formar una matriu $n \times n$ posant-les com a columnes. Si $X(t)$ és una matriu fonamental, llavors

$$\mathbf{x}_h(t) = X(t)\mathbf{c},$$

és la solució general del sistema homogeni, essent $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ un vector de constants lliures.

Resolució de sistemes lineals homogenis a coeficients constants. La idea bàsica per tal de resoldre un sistema lineal homogeni a coeficients constants és que les funcions vectorials que obtenim en multiplicar un vector propi per la funció exponencial que té el corresponent valor propi com a exponent són solucions (anomenades *solucions pròpies*).

Proposició. Si $\mathbf{v}$ és un vector propi de valor propi λ d'una matriu quadrada A , llavors

$$\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t} \mathbf{v}$$

és una solució del sistema $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$. A més, $\mathbf{x}(0) = \mathbf{v}$.

Prova. Com que $\mathbf{v}$ és un vector propi de valor propi λ de la matriu A , sabem que $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$. Per tant,

$$\mathbf{x}'(t) = \lambda e^{\lambda t} \mathbf{v} = e^{\lambda t} \lambda \mathbf{v} = e^{\lambda t} A\mathbf{v} = A e^{\lambda t} \mathbf{v} = A\mathbf{x}(t).$$

Aquí hem usat que la posició dels escalars en una cadena de productes és indiferent. $\square$

Exercici. Sigui $\mathbf{u}$ i $\mathbf{v}$ vectors no nuls tals que $A\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u} + \mathbf{v}$, $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$, on A és una matriu quadrada (notem que $\mathbf{v}$ és vector propi però $\mathbf{u}$ no ho és, i que A és no diagonalitzable). Proveu que la funció

$$\mathbf{y}(t) = e^{\lambda t}(\mathbf{u} + t\mathbf{v})$$

és una solució (no pròpia) del sistema $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$. (Això té relació amb les formes i bases de Jordan.)

Exercici. Proveu que si $\mathbf{v}$ és un vector propi constant de valor propi $\lambda(t)$ d'una matriu quadrada $A(t)$, llavors

$$\mathbf{x}(t) = e^{\int \lambda(t) dt} \cdot \mathbf{v}$$

és una solució del sistema homogeni no autònom $\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x}$.

Quan la matriu del sistema és diagonalitzable podem generar, a partir d'una base de vectors propis, un conjunt fonamental format per solucions de la forma anterior.

Teorema. Supposem que $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ és una base de vectors propis de valors propis $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de la matriu A . Aleshores, la solució general del sistema $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ és

$$\mathbf{x}_h(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1 + \dots + c_n e^{\lambda_n t} \mathbf{v}_n, \quad c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}.$$

Prova. Com que les n funcions vectorials $\mathbf{x}_j(t) = e^{\lambda_j t} \mathbf{v}_j$ són solucions del sistema, n'hi ha prou amb comprovar que són linealment independents. Per exemple, veient que el seu wronskià no s'anul·la a l'instant $t = 0$. Però

$$w(0) = \det[\mathbf{x}_1(0), \dots, \mathbf{x}_n(0)] = \det[\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n] \neq 0$$

ja que els vectors propis $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ formen una base. $\square$

Exemple 42. Calculeu la solució general i una matriu fonamental del sistema

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}, \quad A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

El polinomi característic d'aquesta matriu és

$$Q_A(\lambda) = \det(A - \lambda \text{Id}) = \lambda^2 - (\text{tr } A)\lambda + \det A = \lambda^2 + 6\lambda + 8 = (\lambda + 2)(\lambda + 4),$$

i per tant els valors propis són $\lambda_1 = -2$ i $\lambda_2 = -4$, tots dos simples. Per tant, la matriu A diagonalitza i resulta fàcil calcular una base de vectors propis. Una possible base és $\mathbf{v}_1 = (1, 1)$ i $\mathbf{v}_2 = (1, -1)$. Així doncs,

$$\mathbf{x}_h(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \mathbf{v}_2 = c_1 e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-4t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-4t} \\ c_1 e^{-2t} - c_2 e^{-4t} \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

és la solució general del sistema. A més,

$$X(t) = \left(\mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t} \mid \mathbf{v}_2 e^{\lambda_2 t} \right) = \begin{pmatrix} e^{-2t} & e^{-4t} \\ e^{-2t} & -e^{-4t} \end{pmatrix}$$

és una matriu fonamental, probablement la que s'obté de manera més simple. $\blacktriangle$

Exercici. Sigui $\mathbf{x}(t)$ una solució del sistema anterior. Què es pot dir sobre $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t)$?

El cas diagonalitzable complex. Quan la matriu diagonalitza sobre els complexos; és a dir, quan diagonalitza però té alguns valors propis complexos conjugats, el mètode anterior proporciona solucions complexes que es poden convertir fàcilment en solucions reals (és a dir, en solucions que prenen valors reals per a tot $t \in \mathbb{R}$). N'hi ha prou amb substituir cada parella de solucions complexes conjugades per les seves parts real i imaginària.

Proposició. Si $\mathbf{v}_{\pm} = \mathbf{u} \pm \mathbf{w}i$ són vectors propis de valors propis $\lambda_{\pm} = \alpha \pm \beta i$ d'una matriu $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, llavors

$$\mathbf{y}(t) = e^{\alpha t}(\mathbf{u} \cos \beta t - \mathbf{w} \sin \beta t), \quad \mathbf{z}(t) = e^{\alpha t}(\mathbf{u} \sin \beta t + \mathbf{w} \cos \beta t),$$

són solucions linealment independents del sistema $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$. A més, $\mathbf{y}(0) = \mathbf{u}$ i $\mathbf{z}(0) = \mathbf{w}$.

Prova. En primer lloc, recordem que les funcions

$$\mathbf{x}_{\pm}(t) = e^{\lambda_{\pm} t} \mathbf{v}_{\pm} = e^{\alpha t}(\cos \beta t \pm i \sin \beta t)(\mathbf{u} \pm i\mathbf{w}) = \mathbf{y}(t) \pm \mathbf{z}(t)i$$

són solucions complexes conjugades. A la tercera igualtat hem usat la fórmula d'Euler. Com que el conjunt de solucions és un subspai vectorial, deduïm que les combinacions lineals

$$\mathbf{y}(t) = \frac{\mathbf{x}_+(t) + \mathbf{x}_-(t)}{2}, \quad \mathbf{z}(t) = \frac{\mathbf{x}_+(t) - \mathbf{x}_-(t)}{2i}$$

també són solucions. Per veure que són linealment independents, recordem un resultat clàssic d'àlgebra lineal: vectors propis de valors propis diferents sempre són linealment independents. En particular, els vectors propis complexos conjugats $\mathbf{v}_{\pm} = \mathbf{u} \pm \mathbf{w}i$ són independents, i per tant les seves parts reals i imaginàries $\mathbf{u}$ i $\mathbf{w}$ també ho són. Les propietats $\mathbf{y}(0) = \mathbf{u}$ i $\mathbf{z}(0) = \mathbf{w}$ són trivials. $\square$

Aquest truc funciona sempre, però l'expliquem en un exemple concret per clarificar idees.

Exemple 43. Calculeu la solució general i una matriu fonamental del sistema

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -12 & -14 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Es pot comprovar (comproveu-ho!) que el polinomi característic d'aquesta matriu és

$$Q_A(\lambda) = \det(A - \lambda \text{Id}) = \dots = -\lambda^3 + \lambda^2 - 25\lambda + 25 = -(\lambda - 1)(\lambda^2 + 25).$$

Els valors propis són $\lambda_1 = 1$ i $\lambda_{2,3} = \pm 5i$, tots simples. Per tant, la matriu diagonalitza en els complexos.

Pasem a calcular una base de vectors propis. Comencem pel cas més fàcil, el valor propi real $\lambda_1 = 1$.

$$\text{Nuc}(A - \text{Id}) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{array}{l} -12y - 14z = 0 \\ x + y - 3z = 0 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 25z/6 \\ -7z/6 \\ z \end{pmatrix} : z \in \mathbb{R} \right\} = \left[\begin{pmatrix} 25 \\ -7 \\ 6 \end{pmatrix} \right].$$

Per tant, $\mathbf{v}_1 = (25, -7, 6)$ és un vector propi de valor propi $\lambda_1 = 1$, i per tant obtenim la solució

$$\mathbf{x}_1(t) = e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 25e^t \\ -7e^t \\ 6e^t \end{pmatrix}.$$

El cas dels valors propis complexos conjugats és més complicat, tot i que aprofitarem el fet que si dos valors propis són conjugats, els seus vectors propis també ho són. És a dir, n'hi ha prou amb realitzar la meitat dels càlculs. Per tant, per calcular la part de la base associada als valors propis $\lambda_{2,3} = \pm 5i$, n'hi ha prou calculant el nucli

$$\text{Nuc}(A - 5i\text{Id}) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 : \begin{array}{l} (1 - 5i)x - 12y - 14z = 0 \\ x + (2 - 5i)y - 3z = 0 \\ x + y - (2 + 5i)z = 0 \end{array} \right\} = \left[\begin{pmatrix} 1 + 5i \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right].$$

Per tant, $\mathbf{v}_{2,3} = \mathbf{u} \pm \mathbf{w}i$ són vectors propis complexos conjugats de valors propis $\lambda_{2,3} = \alpha \pm \beta i$, essent $\alpha = 0$, $\beta = 5$, $\mathbf{u} = (1, 1, 1)$ i $\mathbf{w} = (5, 0, 0)$. Usant la proposició anterior, obtenim dues solucions reals linealment independents:

$$\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} \cos 5t - 5 \sin 5t \\ \cos 5t \\ \cos 5t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{z}(t) = \begin{pmatrix} \sin 5t + 5 \cos 5t \\ \sin 5t \\ \sin 5t \end{pmatrix}.$$

En particular, $\mathbf{x}_h(t) = c_1 \mathbf{x}_1(t) + c_2 \mathbf{y}(t) + c_3 \mathbf{z}(t) = X(t)\mathbf{c}$ és la solució general real del sistema, on el vector de constants $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3$ queda lliure i

$$X(t) = \left(\mathbf{x}_1(t) \mid \mathbf{y}(t) \mid \mathbf{z}(t) \right) = \begin{pmatrix} 25e^t & \cos 5t - 5 \sin 5t & \sin 5t + 5 \cos 5t \\ -7e^t & \cos 5t & \sin 5t \\ 6e^t & \cos 5t & \sin 5t \end{pmatrix}$$

és una matriu fonamental real. $\blacktriangle$

Fórmula de variació de les constants. Serveix per a calcular una solució particular d'un sistema lineal no homogeni a partir d'una matriu fonamental del seu sistema homogeni associat.

Teorema. Si $X(t)$ és una matriu fonamental del sistema homogeni $\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x}$ i la derivada de la funció vectorial $\mathbf{u} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ és una solució del sistema $X(t)\mathbf{u}'(t) = \mathbf{b}(t)$, llavors

$$\mathbf{x}_p(t) = X(t)\mathbf{u}(t)$$

és una solució particular del sistema no homogeni $\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x} + \mathbf{b}(t)$.

Prova. $\mathbf{x}'_p(t) = X'(t)\mathbf{u}(t) + X(t)\mathbf{u}'(t) = A(t)X(t)\mathbf{u}(t) + \mathbf{b}(t) = A(t)\mathbf{x}_p(t) + \mathbf{b}(t)$. □

Exemple 44. Resoleu el sistema lineal no homogeni $\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x} + \mathbf{b}(t)$, on

$$A(t) = \begin{pmatrix} 2-t & 2t-2 \\ 1-t & 2t-1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}.$$

[Ind.: els vectors propis de la matriu $A(t)$ no depenen de t .]

La matriu $A(t)$ és diagonalitzable amb vectors propis $\mathbf{v}_1 = (1, 1)$ i $\mathbf{v}_2(2, 1)$ de valors propis $\lambda_1(t) = t$ i $\lambda_2(t) = 1$. Per tant, usant l'exercici de la pàg. 25 obtenim que les funcions

$$\mathbf{x}_1(t) = e^{\int \lambda_1(t) dt} \cdot \mathbf{v}_1 = e^{t^2/2} \mathbf{v}_1, \quad \mathbf{x}_2(t) = e^{\int \lambda_2(t) dt} \cdot \mathbf{v}_2 = e^t \mathbf{v}_2$$

són solucions del sistema homogeni $\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x}$. Posant-les com a columnes, obtenim la matriu

$$X(t) = \begin{pmatrix} e^{t^2/2} & 2e^t \\ e^{t^2/2} & e^t \end{pmatrix}.$$

Aquesta matriu és fonamental, ja que el seu wronskià és no nul: $w(t) = \det X(t) = -e^{t+t^2/2}$. Per tant,

$$\mathbf{x}_h(t) = X(t)\mathbf{c} = c_1\mathbf{x}_1(t) + c_2\mathbf{x}_2(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t^2/2} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^t, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

és la solució general del sistema homogeni. Ara resollem el sistema lineal

$$\begin{pmatrix} e^{t^2/2} & 2e^t \\ e^{t^2/2} & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u'_1(t) \\ u'_2(t) \end{pmatrix} = X(t)\mathbf{u}'(t) = \mathbf{b}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} e^{t^2/2}u'_1(t) = t \\ u'_2(t) = 0 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{u}(t) = \begin{pmatrix} -e^{t^2/2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Per tant, $\mathbf{x}_p(t) = X(t)\mathbf{u}(t)$ és una solució particular i

$$\mathbf{x}_g(t) = \mathbf{x}_h(t) + \mathbf{x}_p(t) = X(t)[\mathbf{c} + \mathbf{u}(t)] = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t^2/2} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

és la solució general del sistema no homogeni. ▲

Estabilitat de sistemes lineals a coeficients constants. Hem recordat com resoldre alguns sistemes lineals, però els sistemes (lineals o no) que sabem resoldre són una minoria, i per tant necessitem un mètode para descriure qualitativament el comportament dinàmic de les seves solucions *sense* resoldre'ls.

Començarem pels sistemes lineals a coeficients constants que són els més simples.

La primera observació és que la velocitat del sistema $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ a l'origen és igual a zero, ja que

$$\mathbf{x} = \mathbf{0} \implies \mathbf{x}' = A\mathbf{x} = A\mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

En particular, la funció constant $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{0}$ sempre és una solució (usualment anomenada *solució trivial*) del sistema homogeni $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$. Això és un cas particular del següent concepte.

Definició. Direm que un punt $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ és un *punt d'equilibri* del sistema $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ quan la velocitat del sistema en aquest punt sigui zero. És a dir, quan $\mathbf{x}_0 \in \text{Nuc } A$. Direm que el sistema $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ és *degenerat* quan tingui infinits punts d'equilibri. És a dir, quan $\det[A] = 0$.

Si un sistema és degenerat, tots els seus punts d'equilibri són "iguals" i n'hi ha prou amb estudiar l'origen.

Exercici. Proveu que si $\mathbf{x}_0$ és un punt d'equilibri del sistema lineal $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$, llavors el canvi de variable dependent $\mathbf{y} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ no modifica el sistema; és a dir, el sistema transformat és $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$.

Donat un sistema lineal homogeni a coeficients constants, la primera qüestió qualitativa que ens plantegem és determinar el comportament futur ($t \geq 0$ o $t \rightarrow \infty$) i passat ($t \leq 0$ o $t \rightarrow -\infty$) de les seves trajectòries. Distingim quatre tipus de sistemes.

Definició. Direm que el sistema $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ és:

- *Inestable* si alguna de les seves solucions escapa a infinit quan $t \rightarrow \infty$;
- *Estable* quan no és inestable (és a dir, quan totes les seves solucions estan fitades per a $t \geq 0$);

- *Atractor* (també anomenat *asimptòticament estable*) si totes les seves solucions no trivials tendeixen a l'origen quan $t \rightarrow \infty$ i escapen a infinit quan $t \rightarrow -\infty$; i
- *Repulsor* si totes les seves solucions no trivials escapen a infinit quan $t \rightarrow \infty$ i tendeixen a l'origen quan $t \rightarrow -\infty$.

Observació. Veiem que $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ és atractor/repulsor si i només si $\mathbf{x}' = -A\mathbf{x}$ és repulsor/attractor, però, en canvi, *no és cert* que $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ és estable/inestable si i només si $\mathbf{x}' = -A\mathbf{x}$ és inestable/estable.

Observació. Per definició, els conceptes estable i inestable són “complementaris”; és a dir, tot sistema lineal és estable o bé inestable. Per contra, repulsor i atractor *no* són conceptes complementaris; és a dir, existeixen sistemes que no són ni repulsors ni atractors.

El sistema $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ és estable però no atractor quan totes les seves solucions són fitades per a $t \geq 0$ però alguna d'elles no tendeix a l'origen quan $t \rightarrow \infty$.

Exemple 45. La funció $x_h(t) = x_0 e^{\lambda t}$ és la solució general de l'EDO lineal homogènia $x' = \lambda x$. Per tant, aquesta EDO és: repulsora $\Leftrightarrow \lambda > 0$, atractora $\Leftrightarrow \lambda < 0$ i estable però no atractora $\Leftrightarrow \lambda = 0$. ▲

Definició. Sigui $\mathbf{v}$ un vector propi de valor propi $\lambda \in \mathbb{R}$ de la matriu A . Sigui $r = [\mathbf{v}]$ la recta que passa per l'origen amb direcció $\mathbf{v}$. Aleshores, direm que r és una

- *Recta invariant inestable* (o de sortida) del sistema $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ quan $\lambda > 0$.
- *Recta invariant estable* (o d'entrada) del sistema $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ quan $\lambda < 0$.
- *Recta invariant de punts d'equilibri* del sistema $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ quan $\lambda = 0$.

Anàlogament, siguin $\mathbf{v}_{\pm} = \mathbf{u} \pm \mathbf{w}$ i vectors propis complexos conjugats de valors propis $\lambda_{\pm} = \alpha \pm \beta i$ de la matriu A . Sigui $\Pi = [\mathbf{u}, \mathbf{w}]$ el pla que passa per l'origen amb direccions $\mathbf{u}$ i $\mathbf{w}$. Aleshores, direm que Π és un

- *Pla invariant inestable* (o de sortida) del sistema $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ quan $\alpha > 0$.
- *Pla invariant estable* (o d'entrada) del sistema $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ quan $\alpha < 0$.
- *Pla invariant de girs tancats* del sistema $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ quan $\alpha = 0$.

La interpretació d'aquestes definicions és la següent. Sigui $\mathbf{x}(t)$ la solució del PVI

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0.$$

Si $\mathbf{x}_0 \in r$, llavors $A\mathbf{x}_0 = \lambda\mathbf{x}_0$, i per tant $\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t}\mathbf{x}_0$. Per tant, qualsevol trajectòria que comença en un punt de la recta r es manté sobre la recta (per això diem que la recta és *invariant*) i per a decidir si escapa cap a infinit, tendeix a l'origen o es queda fixa n'hi ha prou amb mirar el signe del valor propi λ .

Si $\mathbf{x}_0 \in \Pi = [\mathbf{u}, \mathbf{w}]$, llavors existeixen uns coeficients $a_0, b_0 \in \mathbb{R}$ tals que $\mathbf{x}_0 = a_0\mathbf{u} + b_0\mathbf{w}$. Usant la linealitat i el teorema d'existència i unicitat de solucions, deduïm que

$$\mathbf{x}(t) = a_0\mathbf{y}(t) + b_0\mathbf{z}(t) = a(t)\mathbf{u} + b(t)\mathbf{w},$$

on

$$\begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix} = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos \beta t & \sin \beta t \\ -\sin \beta t & \cos \beta t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}.$$

Per tant, qualsevol trajectòria que comença en un punt del pla Π es manté sobre el pla (per això diem que el pla és *invariant*) girant sempre i per decidir si escapa cap a infinit, tendeix a l'origen o els girs són tancats n'hi ha prou amb mirar el signe de la part real α . Si la part real és zero, llavors totes les trajectòries contingudes al pla són periòdiques de període $T = 2\pi/\beta$. Podem escriure la fórmula anterior en “polars”. Notant $a_0 + ib_0 = r_0 e^{i\theta_0}$ i $a(t) + ib(t) = r(t) e^{i\theta(t)}$, resulta que $r(t) = r_0 e^{\alpha t}$ i $\theta(t) = \theta_0 - \beta t$, la qual cosa mostra que tenim una velocitat angular constant.

Exercici. En una recta o pla d'entrada, quant de temps triga la trajectòria en arribar a l'origen?

Ja sabem que els valors propis reals positius i els valors propis complexos de part real positiva donen lloc a rectes i plans invariants inestables i, per tant, donen lloc a solucions inestables. Però no són els únics valors propis amb aquesta propietat. Donem els teoremes següents sense provar-los.

Teorema. *El sistema lineal homogeni a coeficients constants $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ és:*

- *Inestable si i només si algun valor propi de A té part real positiva o algun valor propi no semi-simple¹⁴ de A té part real nul·la.*
- *Atractor/repulsor si i només si tots els seus valors propis tenen part real negativa/positiva.*

¹⁴Un valor propi és *semi-simple* quan coincideixen les seves multiplicitats algebraica i geomètrica.

Teorema (Evolució d'un volum en un sistema lineal). *Siguin $A : I \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ i $\mathbf{b} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ unes funcions contínues definides en un interval obert $I \subset \mathbb{R}$. Sigui $T(t) = \text{tr } A(t)$. Donat un instant arbitrari $t_0 \in I$ i un domini arbitrari $W_{t_0} \subset \mathbb{R}^n$, sigui W_t el conjunt format a l'instant t per les partícules que a l'instant t_0 es trobaven sobre el domini W_{t_0} . És a dir,*

$$W_t = \bigcup_{\mathbf{x}_0 \in W_{t_0}} \left\{ \mathbf{x}(t) : \mathbf{x} \text{ és la solució del PVI } \mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x} + \mathbf{b}(t), \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \right\}.$$

Llavors

$$\text{Vol}(W_t) = \text{Vol}(W_{t_0}) e^{\int_{t_0}^t T(s) ds}.$$

En particular, un sistema lineal expandeix, conserva o contrau volum si la seva matriu té traça positiva, nul·la o negativa, respectivament.

Exemple 46. Estudiem l'estabilitat del sistema $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$, on $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 14 & -4 \end{pmatrix}$. Aquest sistema expandeix, conserva o contrau àrea?

Les arrels del polinomi característic $Q_A(\lambda) = \lambda^2 + \lambda + 2$ són $\lambda_{1,2} = (-1 \pm \sqrt{7}i)/2$, i per tant aquest sistema lineal és atractiu. La traça és $T = -1 < 0$, i per tant contrau àrea. ▲

Exercici. Proveu que si la traça de A és positiva, llavors el sistema $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ és inestable.

Un resultat interessant és que totes les solucions d'un sistema lineal atractiu/repulsor s'apropen/se separen quan $t \rightarrow \infty$ i se separen/s'apropen quan $t \rightarrow -\infty$ (això també és cert en el cas no homogeni).

Proposició. *Siguin $\mathbf{x}_1(t)$ i $\mathbf{x}_2(t)$ dues solucions diferents d'un sistema lineal (homogeni o no).*

(1) *Si el sistema homogeni associat és atractiu, llavors*

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \|\mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_2(t)\| = \infty, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_2(t)\| = 0.$$

(2) *Si el sistema homogeni associat és repulsor, llavors*

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \|\mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_2(t)\| = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_2(t)\| = \infty.$$

Prova. Si $\mathbf{x}_1(t)$ i $\mathbf{x}_2(t)$ són solucions diferents del sistema no homogeni $\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + \mathbf{b}(t)$, la diferència $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_2(t)$ és una solució no trivial del sistema homogeni associat, ja que

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{x}'_1(t) - \mathbf{x}'_2(t) = (A\mathbf{x}_1(t) + \mathbf{b}(t)) - (A\mathbf{x}_2(t) + \mathbf{b}(t)) = A(\mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_2(t)) = A\mathbf{x}(t).$$

Si aquest sistema homogeni és atractiu/repulsor, aleshores, per definició, totes les seves solucions no trivial es comporten de la manera descrita per la proposició anterior. □

Exercici. Argumenteu que un sistema lineal (homogeni o no) a coeficients constants tal que el seu sistema homogeni associat és atractiu o repulsor no pot tenir dues solucions periòdiques diferents.

Classificació de sistemes lineals 2D a coeficients constants. En aquesta secció ens limitem a classificar els sistemes lineals $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ quan A és una matriu 2×2 .

Suposem que el sistema $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ no és degenerat, i per tant els dos valors propis de la matriu són diferents de zero. Llavors classifiquem el sistema com a:

- Una *sella*, si els valors propis són reals i de signes diferents,
- Un *node*, si els valors propis són reals però del mateix signe, i en aquest cas direm que el node és:
 - *atractor/repulsor* quan els dos valors propis siguin negatius/positius; i
 - *propi/impropi* si la matriu diagonalitza/no diagonalitza;
- Un *centre*, si els valors propis són imaginaris purs; i
- Un *focus*, si els valors propis són complexos conjugats de part real no nul·la, i en aquest cas direm que el focus és *atractor/repulsor* quan la part real sigui negativa/positiva.

Només hi ha tres tipus de sistemes 2D a coeficients constants que conserven àrea: els centres, un tipus especial de selles i els sistemes degenerats amb valor propi zero doble.

Proposició (Criteri traça-determinant per a sistemes lineals 2D a coeficients constants). *Sigui A una matriu real 2×2 . Notem $T = \text{tr } A$, $D = \det A$ i $\Delta = T^2 - 4D$. Aleshores el sistema $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ és:*

- Una *sella* (I però no R) si i només si $D < 0$.
- Un *centre* (E però no AE) si i només si $T = 0$ i $D > 0$.
- Un *focus* si i només si $T \neq 0$ i $\Delta < 0$. El focus és repulsor (R) quan $T > 0$ i atractiu (AE) quan $T < 0$.
- Un *node* si i només si $D > 0$ i $\Delta \geq 0$. El node és repulsor (R) quan $T > 0$ i atractiu (A) quan $T < 0$. A més, el node és impropi si i només si $\Delta = 0$ i la matriu A no és diagonal.
- Degenerat quan $D = 0$. Un sistema degenerat és I quan $T > 0$, E però no AE quan $T < 0$, i pot ser E però no AE, o bé I però no R, quan $T = 0$.

Podeu veure a la figura 2 una representació gràfica d'aquests resultats sobre el pla de coordenades (T, D) .

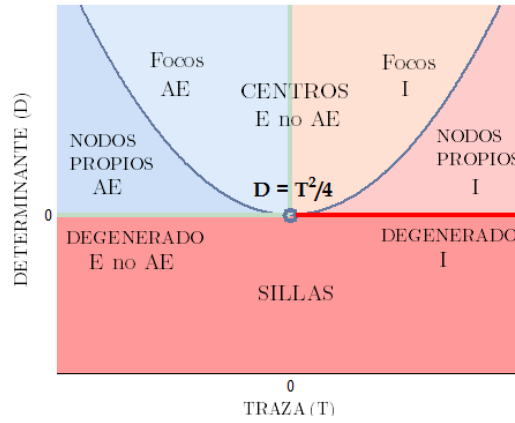


FIGURA 2. Criteri traça-determinant en el pla (T, D) .

Prova. Siguin λ_+ i λ_- les arrels del polinomi característic $Q_A(t) = t^2 - Tt + D$. Llavors

$$\lambda_{\pm} = \frac{T \pm \sqrt{T^2 - 4D}}{2} = \frac{T \pm \sqrt{\Delta}}{2}.$$

A més, $T = \lambda_+ + \lambda_-$ i $D = \lambda_+ \lambda_-$. Ara distingim cinc casos:

- $D = \lambda_+ \lambda_- < 0 \implies \Delta = T^2 - 4D \geq 0 \implies \lambda_+, \lambda_- \in \mathbb{R} \implies \text{sign } \lambda_+ \neq \text{sign } \lambda_- \implies \text{Sella (I)}.$
- $T = 0$ i $D > 0 \implies \lambda_{\pm} = \pm \sqrt{-D}$ són imaginaris purs $\implies \text{Centre (E, però no AE)}.$
- $T \neq 0$ i $\Delta < 0 \implies \lambda_{\pm} = \frac{T}{2} \pm \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}i$ són complexos conjugats i $\text{Re } \lambda_{\pm} = T/2 \neq 0 \implies \text{Focus}.$

A més, el signe de la part real dels valors propis coincideix amb el signe de la traça.

- $D = \lambda_+ \lambda_- > 0$ i $\Delta \geq 0 \implies \text{Valors propis reals del mateix signe} \implies \text{Node}.$

A més, el signe de la traça $T = \lambda_+ + \lambda_-$ coincideix amb el signe dels dos valors propis. Finalment, el node és impropri, per definició, si i només si A no diagonalitza. De fet, les úniques matrius 2×2 no diagonalitzables són les matrius no diagonals amb un valor propi doble.

- El sistema és degenerat, per definició, si i només si $D = 0$. Les relacions $D = \lambda_+ \lambda_- = 0$ i $T = \lambda_+ + \lambda_-$ impliquen que un dels valors propis és zero i l'altre coincideix amb la traça.

□

Aquest criteri simplifica la classificació de sistemes 2D amb paràmetres. Vegem-ne un exemple.

Exemple 47. Classifiqueu el sistema $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$, on

$$A = \begin{pmatrix} -2\mu & 2\mu - 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

La traça $T = -2\mu$ només canvia de signe en $\mu = 0$. El determinant $D = 2\mu - 1$ només canvia de signe en $\mu = 1/2$. El discriminant $\Delta = T^2 - 4D = 4\mu^2 - 8\mu + 4 = 4(\mu - 1)^2$ és positiu si $\mu \neq 1$ i nul si $\mu = 1$. A més, la matriu A no és diagonal quan $\mu = 1$. Per tant, aplicant el criteri traça-determinant veiem que el sistema és:

- Una sella (I) quan $\mu < 1/2$;
- Degenerat (E però no AE) quan $\mu = 1/2$; i
- Un node atractor quan $\mu > 1/2$, essent propi quan $\mu \neq 1$ i impropri quan $\mu = 1$.

En particular, l'única *bifurcació*¹⁵ del sistema té lloc en creuar el valor $\mu_* = 1/2$, moment en el qual el sistema passa d'íestable a atractor. És usual representar tota la informació en un diagrama en colors¹⁶ anomenat *diagrama de bifurcació*, vegeu la figura 3. ▲



FIGURA 3. Diagrama de bifurcació de l'exemple 47 sobre la recta $\mu \in \mathbb{R}$. Aquí, $\mu_* = 1/2$.

¹⁵Una bifurcació es defineix com un canvi en l'aspecte qualitatiu de les trajectòries de sistema.

¹⁶Per exemple, vermell per a la part íestable de l'espai de paràmetres, blau per a la part atractora i verd per a la part estable però no atractora.

Croquis de sistemes lineals a coeficients constants. Quan ja sabem si el sistema $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ és atractor, repulsor, inestable no repulsor, o estable no atractor, podem dibuixar una representació geomètrica de les seves òrbites. Aquesta representació, anomenada *croquis* o *retrat de fase* del sistema, ha de ressaltar les rectes i plans invariants. Seguirem un codi de colors per a distingir sortides (vermelles), entrades (blaves), plans de girs tancats (verdes) i rectes de punts d'equilibri (grogues). I un codi de fletxes per a distingir direccions ràpides i lentes o visualitzar els sentits de gir.

La interpretació geomètrica de les rectes i els plans invariants donada a la pàg. 28 ens ajuda a dibuixar croquis precisos de qualsevol sistema lineal homogeni a coeficients constants $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ quan la matriu A diagonalitza.

Per exemple, siguin $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ els vectors propis i suposem que tots els valors propis $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ són reals. Els signes dels valors propis determinen el comportament de les trajectòries contingudes en les rectes invariants $r_j = [\mathbf{v}_j]$. I per tant la pregunta és: Quin aspecte tenen les altres trajectòries? Per respondre aquesta pregunta projectem una condició inicial arbitrària sobre cadascuna de les rectes invariants. Com que els vectors propis $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ formen una base de $\mathbb{R}^n$, sabem que donat un punt arbitrari $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, existeixen uns coeficients $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}^n$ tals que $\mathbf{x}_0 = c_1\mathbf{v}_1 + \dots + c_n\mathbf{v}_n$. Aleshores, usant el teorema d'existència i unicitat de solucions deduïm que

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1 + \dots + c_n e^{\lambda_n t} \mathbf{v}_n$$

és la solució del PVI corresponent a la condició inicial $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$. Això permet descriure la forma de qualsevol trajectòria del sistema. Vegem un exemple 2D i un altre 3D.

Exemple 48. Sigui A la matriu 2×2 del sistema de l'exemple 42. Sabem que té vectors propis $\mathbf{v}_1 = (1, 1)$ i $\mathbf{v}_2 = (1, -1)$ de valors propis $\lambda_1 = -2$ i $\lambda_2 = -4$. Per tant, hi ha dues rectes invariants d'entrada:

$$r_1 = [\mathbf{v}_1] = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 - x_2 = 0\}, \quad r_2 = [\mathbf{v}_2] = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 = 0\}.$$

A més, r_1 correspon a l'entrada lenta i r_2 a la ràpida, ja que $e^{\lambda_1 t} = e^{-2t}$ tendeix a zero més lentament que $e^{\lambda_2 t} = e^{-4t}$. Per tant, totes les solucions del sistema $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ tendeixen a l'origen. Concretament, les solucions situades sobre una recta invariant no abandonen la recta, mentre que les altres solucions tracen òrbites amb aspecte de paràboles que són tangents a l'origen a la recta lenta i que lluny de l'origen tendeixen a adquirir la direcció de la recta ràpida. Amb aquestes dades ja podem dibuixar el croquis del sistema. ▲

Exemple 49. Sigui A la matriu 3×3 de l'exemple 43. Sabem que té vectors propis $\mathbf{v}_1 = (25, -7, 6)$ i $\mathbf{v}_{2,3} = \mathbf{u} \pm \mathbf{w}i$, amb $\mathbf{u} = (1, 1, 1)$ i $\mathbf{w} = (5, 0, 0)$, de valors propis $\lambda_1 = 1$ i $\lambda_{2,3} = \pm 5i$. Per tant,

$$r = [\mathbf{v}_1] = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1/25 = -x_2/7 = x_3/6\}$$

és una recta invariant de sortida i

$$\Pi = [\mathbf{u}, \mathbf{w}] = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_2 = x_3\}$$

és un pla invariant de girs tancats on totes les trajectòries tenen període $T = 2\pi/5$. El truc de projectar una condició inicial arbitrària sobre r i Π per veure la forma de la seva trajectòria funciona igual que abans. En aquest cas, obtenim que totes les òrbites del sistema $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ no contingudes ni en r ni en Π són hèlixs que escapen a infinit. ▲

En aquests apunts no incloem dibuixos. El lector interessat els pot realitzar per si mateix i comparar-los després amb els dibuixos de la referència *Notes on Differential Equations* [pdf] de Robert E. Terrell o, millor encara, realitzar l'exercici següent.

Exercici. Practiqueu amb els dos [MIT Mathlets](#) sobre “*Linear Phase Portraits*”.

Els següents comentaris proporcionen algunes claus para dibuixar un croquis:

- Dues òrbites diferents no poden intersecar-se;
- Els valors propis reals donen lloc a rectes invariants d'entrada, sortida o punts d'equilibri;
- Els valors propis complexos conjugats donen lloc a plans invariants d'entrada, sortida o girs;
- Una sella té una recta invariant de sortida i una altra d'entrada, la resta de les seves òrbites tenen aspecte d'hipèrboles;
- Un node propi atractor/repulsor amb valors propis simples té dues rectes d'entrada/sortida (la lenta i la ràpida) i la resta de les seves òrbites semblen paràboles tangents a l'origen a la recta lenta;
- Un node impropri atractor/repulsor té una única recta invariant d'entrada/sortida i totes les seves altres òrbites són tangents a l'origen a aquesta recta invariant;
- Totes les òrbites d'un node propi amb un valor propi doble són rectes que passen per l'origen;
- En un sistema degenerat 2D el camp de vectors $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ apunta sempre en la mateixa direcció, i per tant les seves òrbites formen un feix de rectes paral·leles;
- Totes les òrbites d'un centre són el·lipses;
- Totes les òrbites d'un focus són espirals; i
- En aquests dos darrers casos, que corresponen a valors propis complexos conjugats $\lambda_{\pm} = \alpha \pm \beta i$, el sentit de gir es determina calculant la velocitat en algun punt del pla. La velocitat de gir depèn de la part imaginària β i l'expansió/contracció depèn de la part real α .

Exemple 50. Sigui A una matriu 3×3 amb valors propis $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tals que

$$\lambda_3 < \lambda_2 < 0 < \lambda_1$$

i sigui $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ una base de vectors propis. Llavors existeixen tres rectes importants: $r_1 = [\mathbf{v}_1]$ (sortida), $r_2 = [\mathbf{v}_2]$ (entrada lenta) i $r_3 = [\mathbf{v}_3]$ (entrada ràpida). Sobre el pla generat pels vectors propis de valors propis negatius el sistema té l'aspecte d'un node propi atractiu. Sobre els plans generats per $\mathbf{v}_1$ i un vector propi de valor propi negatiu, el sistema és una sella. La resta del croquis 3D es dedueix d'aquest "esquelet".

Exercici. Dibuixeu el croquis en els casos: (1) $\lambda_3 < \lambda_2 < \lambda_1 = 0$, i (2) $\lambda_3 < \lambda_2 < \lambda_1 < 0$.

Exemple 51. Sigui A una matriu amb valors propis $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ i $\lambda_{2,3} = \alpha \pm \beta i$ tals que

$$\alpha < 0 < \lambda_1.$$

Sigui $\mathbf{v}_1$ un vector propi de valor propi λ_1 i siguin $\mathbf{v}_{2,3} = \mathbf{u} \pm \mathbf{w}i$ vectors propis de valor propi $\lambda_{2,3}$. Llavors $r_1 = [\mathbf{v}_1]$ és una recta invariant de sortida i $\Pi = [\mathbf{u}, \mathbf{w}]$ és un pla invariant d'entrada. Sobre el pla Π el sistema és un focus atractiu. Les trajectòries 3D tracen espirals que escapen a infinit en la direcció $\mathbf{v}_1$, però les seves amplituds es fan cada cop més petites.

Exercici. Dibuixeu el croquis en els casos: (1) $\alpha = 0 < \lambda_1$, (2) $0 < \alpha < \lambda_1$, i (3) $0 < \lambda_1 < \alpha$.

Exercici. Dibuixeu els croquis dels sistemes degenerats $\mathbf{x}' = A_{\pm} \mathbf{x}$ i $\mathbf{x}' = A_0 \mathbf{x}$ donats per

$$A_{\pm} = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

SISTEMES NO LINEALS

Ja sabem resoldre sistemes lineals, determinar la seva estabilitat i dibuixar les seves trajectòries. Ara passem a estudiar sistemes no lineals autònoms de primer ordre expressats en forma normal. Concretament, sistemes de la forma

$$\mathbf{x}' = \mathbf{F}(\mathbf{x})$$

on el camp vectorial $\mathbf{F} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ és una funció de classe $\mathcal{C}^1$ en un obert $U \subset \mathbb{R}^n$. Recordem que les trajectòries d'aquest sistema són tangents al camp de velocitats $\mathbf{F}(\mathbf{x})$. A més, per cada posició inicial passa una única òrbita del sistema (teorema d'existència i unicitat).

Estabilitat de punts d'equilibri. La següent definició és una còpia del cas lineal.

Definició. Direm que un punt $\mathbf{x}_0 \in U$ és un *punt d'equilibri* del sistema $\mathbf{x}' = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ quan la velocitat del sistema en aquest punt és zero. És a dir, quan $\mathbf{F}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$.

Si $\mathbf{x}_0$ és un punt d'equilibri, la funció constant $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{x}_0$ és una solució del sistema no lineal, ja que

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{0} = \mathbf{F}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{F}(\mathbf{x}(t)), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Això era previsible, ja que ens diu que si una partícula es mou segons un camp de velocitats, restarà quieta quan la situem en una posició amb velocitat zero.

La pregunta que ens fem ara és: com es comporten les trajectòries d'un sistema no lineal que comencen a punts *propers* a un punt d'equilibri del sistema no lineal? En línies generals, direm que un punt d'equilibri és estable quan les trajectòries amb condicions inicials a punts suficientment propers al punt d'equilibri es mantenen properes (és a dir, no se n'allunyen); inestable quan existeixen trajectòries que se n'allunyen tot i que comencin en punts molt propers; i atractiu/repulsor quan les trajectòries amb condicions inicials a punts suficientment propers hi tendeixen quan el temps avança/retrocedeix. No obstant, la definició formal és quelcom més tècnica.

Definició. Sigui $\mathbf{x}_0 \in U$ un punt d'equilibri del sistema $\mathbf{x}' = \mathbf{F}(\mathbf{x})$. Direm que aquest punt és:

- *Estable (E)* si i només si per a tot $\epsilon > 0$ existeix algun $\delta > 0$ tal que

$$\|\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}_0\| \leq \delta \implies \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_0\| \leq \epsilon, \quad \forall t \geq 0.$$

Aquí, $\mathbf{x}(t)$ denota una trajectòria qualsevol del sistema.

- *Inestable (I)* quan no és estable.
- *Atractiu o asimptòticament estable (AE)* si i només si és estable i, a més, existeix $\delta_0 > 0$ tal que

$$\|\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}_0\| \leq \delta \implies \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0.$$

- *Repulsor* si i només si és atractiu per al sistema $\mathbf{x}' = -\mathbf{F}(\mathbf{x})$.

Aquestes definicions són semblants, però no iguals, a les donades per al cas de sistemes lineals. Convé entendre les tres principals diferències. La primera diferència és que són els propis sistemes lineals els que es defineixen com a atractors, repulsors, inestables o estables, però en treballar amb sistemes no lineals són els seus punts d'equilibri els que es defineixen com tals. Per exemple, un sistema no lineal pot tenir simultàniament punts d'equilibri atractors i punts d'equilibri repulsors. Ja vam veure una mostra d'aquesta convivència en estudiar l'equació logística a l'exemple 40. La segona diferència és el caràcter local que tenen les definicions en el cas no lineal, en contraposició amb el caràcter global del cas lineal. Per exemple, si un sistema lineal és atractor, totes les seves trajectòries tendeixen a l'origen. En canvi, donat un punt d'equilibri atractor d'un sistema no lineal, només podem afirmar que hi tendeixen les trajectòries que comencen suficientment a prop d'aquest punt, en una zona que rep el nom de *conca d'atracció*. La tercera diferència és que en els atractors i repulsors lineals fixem el comportament passat i futur: $t \rightarrow \pm\infty$, mentre que en els atractors/repulsors no lineals només fixem el comportament futur/passat.

Estabilitat de punts d'equilibri per linealització. La idea darrere del mètode de linealització per estudiar l'estabilitat d'un punt d'equilibri d'un sistema no lineal autònom consisteix a construir un sistema lineal homogeni a coeficients constants que “s'assembli” al sistema no lineal original en les proximitats del punt d'equilibri, tot esperant que el comportament dinàmic dels dos sistemes sigui “similar”.

Definició. Sigui $\mathbf{x}_0 \in U$ un punt d'equilibri del sistema no lineal $\mathbf{x}' = \mathbf{F}(\mathbf{x})$. Llavors, direm que

$$A = D\mathbf{F}(\mathbf{x}_0) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0) \right)_{1 \leq i, j \leq n}$$

és la matriu del *sistema linealitzat* de $\mathbf{x}' = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ al punt $\mathbf{x}_0$.

Aquest concepte és clau para estudiar l'estabilitat de sistemes no lineals. Donem el següent teorema sense provar-lo.

Teorema. Sigui A la matriu del sistema linealitzat d'un sistema no lineal en un punt d'equilibri.

- Si A té algun valor propi de part real positiva, llavors el punt d'equilibri és inestable.
- Si tots els valors propis tenen part real negativa/positiva, el punt d'equilibri és atractor/repulsor.
- A la resta de casos (és a dir, si tots els valors propis tenen part real ≤ 0 i algun té part real $= 0$), la linealització no decideix l'estabilitat.

Observació. En alguns casos en què existeix algun valor propi de part real nul·la la linealització pot decidir l'estabilitat. Per exemple, si la matriu associada a un punt d'equilibri d'un sistema no lineal 2D té un valor propi nul i un valor propi positiu, llavors el punt d'equilibri és inestable.

Es pot provar que si el sistema linealitzat d'un sistema no lineal en un punt d'equilibri no té valors propis de part real nul·la, llavors els sistemes lineal i no lineal són qualitativament “similars”. Aquest resultat rep el nom de *teorema de Hartman–Grobman*. Hem definit cinc tipus de sistemes lineals 2D homogenis a coeficients constants: selles, nodes, focus, centres i els sistemes degenerats. només els centres i els sistemes degenerats tenen valors propis amb part real nul·la. Per tant, si el sistema linealitzat d'un sistema no lineal 2D en un punt d'equilibri és una sella, un node o un focus, llavors podem dir com són les trajectòries del sistema no lineal prop del punt d'equilibri. Per exemple, si el sistema lineal associat és una sella, el sistema no lineal té unes corbes invariants d'entrada i sortida (tangents al punt d'equilibri a les rectes invariants d'entrada i sortida del sistema lineal associat) que organitzen la seva dinàmica local entorn d'aquest punt. En l'argot matemàtic, aquestes corbes s'anomenen *corbes invariants estable i inestable*. El terme invariant emfatitza que si prenem una condició inicial arbitrària sobre qualsevol d'aquestes corbes, la trajectòria es manté sobre la corba.

Exemple 52. L'origen és un punt d'equilibri del sistema 3D de Lorenz

$$\begin{cases} x'_1 &= \sigma(x_2 - x_1) \\ x'_2 &= x_1(\rho - x_3) - x_2 \\ x'_3 &= x_1x_2 - \beta x_3 \end{cases}$$

on $\sigma, \rho, \beta > 0$ són paràmetres del sistema. Per simplificar, suposarem que $\rho > 1$.

La matriu del sistema linealitzat a l'origen és

$$A = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \rho & -1 & -x_1 \\ x_2 & x_1 & -\beta \end{pmatrix}_{(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0)} = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \rho & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \end{pmatrix},$$

i els seus tres valors propis són

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(\sigma + 1) \pm \sqrt{(\sigma + 1)^2 + 4\sigma(\rho - 1)}}{2}, \quad \lambda_3 = -\beta.$$

Com que $\lambda_1 > 0$ i $\lambda_2, \lambda_3 < 0$, l'origen té una dimensió inestable (una corba invariant de sortida) i dues dimensions estables (una superfície invariant d'entrada). L'eix vertical corresponent a la coordenada x_3 és una corba invariant d'entrada. (Per què?) Les trajectòries properes a l'origen no giren, ja que tots els valors propis són reals. ▲

Exercici. Accediu a l'applet de Java de Paul Falstad, sobre “3D Vector Fields”, marqueu el sistema de Lorenz al menú de camps vectorials i visualitzeu les seves trajectòries.

Exemple 53. L'origen és un punt d'equilibri del sistema 2D no lineal

$$\begin{cases} x_1' &= x_2(x_1 - 1) \\ x_2' &= x_1(1 - x_1) \end{cases}.$$

La matriu del sistema linealitzat a l'origen és

$$A = \begin{pmatrix} x_2 & x_1 - 1 \\ 1 - 2x_1 & 0 \end{pmatrix}_{(x_1, x_2) = (0, 0)} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

que té valors propis complexos conjugats de part real nul·la: $\lambda_{1,2} = \pm i$. Per tant, la linealització no decideix l'estabilitat i tampoc no sabem quin aspecte tenen les trajectòries del sistema no lineal prop de l'origen, només podem dir que el sistema linealitzat és un centre. L'única conclusió que podem deduir de la linealització és que les trajectòries giren entorn a l'origen. No obstant, no sabem si aquestes trajectòries s'allunyen, s'apropen o es mantenen a una distància constant de l'origen després de donar una volta completa. ▲

Exercici. Volem entendre el significat del sistema linealitzat mitjançant un exemple. Per a això, veurem que el sistema no lineal anterior tendeix al seu sistema linealitzat quan fem un zoom cada cop més gran sobre l'origen. Concretament, considerem el canvi d'escala

$$x_1 = \epsilon y_1, \quad x_2 = \epsilon y_2, \quad \epsilon > 0.$$

Quan $\epsilon \ll 1$, el quadrat $[-1, 1] \times [-1, 1]$ en les noves coordenades (y_1, y_2) es correspon amb el minúscul quadrat $[-\epsilon, \epsilon] \times [-\epsilon, \epsilon]$ en les coordenades originals (x_1, x_2) . Realitzant aquest canvi d'escala, el sistema no lineal de l'exemple anterior es transforma en el sistema no lineal

$$\begin{cases} y_1' &= y_2(\epsilon y_1 - 1) \\ y_2' &= y_1(1 - \epsilon x_1) \end{cases}.$$

Finalment, prenent el límit $\epsilon \rightarrow 0$, el sistema no lineal transformat tendeix al sistema lineal donat per

$$\begin{cases} y_1' &= -y_2 \\ y_2' &= y_1 \end{cases}.$$

És a dir, hem obtingut el sistema lineal $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$, essent $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ la matriu calculada anteriorment.

Exercici. Practiqueu amb el [MIT Mathlet](#) sobre “Vector Fields”. En particular, useu el seu zoom per comprovar que els sistemes no lineals s'assemblen als seus sistemes linealitzats entorn de cadascun dels seus punts d'equilibri.

Exercici. El punt $(1, 1)$ també és un punt d'equilibri del sistema no lineal anterior. Calculeu la matriu del sistema linealitzat en aquest punt. Què podem dir sobre l'estabilitat del sistema no lineal?

Estabilitat de punts d'equilibri pel mètode de Lyapunov. El mètode de Lyapunov pot proporcionar informació quan el mètode de linealització no decideix l'estabilitat. Recordem que en el cas 2D això només pot passar quan el sistema linealitzat és degenerat i sense valors propis positius o quan el sistema linealitzat és un centre.

El mètode consisteix a considerar una funció $V(\mathbf{x})$ que mesuri la “distància” al punt d'equilibri (per exemple, $V(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2$ que és el quadrat de la distància al punt $\mathbf{x}_0$), per després estudiar si aquesta “distància” $V(\mathbf{x})$ augmenta, no augmenta, disminueix, no disminueix o es manté constant al llarg de les trajectòries del sistema, casos en què el punt d'equilibri serà repulsor, estable, atractiu, no atractiu o estable però no atractiu, respectivament.

Exemple 54. Estudiem com varia el valor de la funció

$$V(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{0}\|^2 = (x_1)^2 + (x_2)^2$$

sobre les trajectòries del sistema 2D de l'exemple 53. Donada una trajectòria $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t))$ del sistema, apliquem la regla de la cadena per calcular la derivada de la composició $t \mapsto V(\mathbf{x}(t))$ respecte el temps. En aquest cas la derivada és idènticament nul·la, ja que

$$\frac{d}{dt}\{V(\mathbf{x}(t))\} = \frac{\partial V}{\partial x_1}(\mathbf{x}(t)) \cdot \frac{dx_1}{dt}(t) + \frac{\partial V}{\partial x_2}(\mathbf{x}(t)) \cdot \frac{dx_2}{dt}(t) = 2x_1(t)x_1'(t) + 2x_2(t)x_2'(t) \equiv 0.$$

A la darrera igualtat hem usat les equacions diferencials $x_1' = x_2(x_1 - 1)$ i $x_2' = x_1(1 - x_1)$. Per tant, la funció $V(\mathbf{x})$ és constant sobre les trajectòries del sistema, ja que la seva “derivada temporal” val zero. En altres paraules, les trajectòries són contingudes a les corbes de nivell de la funció $V(\mathbf{x})$, les quals són circumferències centrades a l'origen. En particular, deduïm que l'origen és un punt d'equilibri estable, però no atractiu. ▲

Exercici. Dibuixeu el *retrat de fase* del sistema 2D que acabem d'estudiar. És a dir, dibuixeu els seus punts d'equilibri, esquematitzeu la forma de les seves òrbites i representeu mitjançant fletxes el sentit de cada trajectòria. Discutiu l'estabilitat de cada punt d'equilibri a partir del retrat de fase.

Exercici. Accediu a l'applet de Java de Paul Falstad, sobre “*2D Vector Fields*”, introduïu el sistema 2D de l'exemple 53 a ‘*user-defined field*’ del menú de sistemes i compareu els resultats visuals amb el retrat de fase obtingut a l'exercici anterior.

Definició. Donat un sistema autònom $\mathbf{x}' = \mathbf{F}(\mathbf{x})$, la *derivada temporal* d'una funció $V(\mathbf{x})$ és

$$W(\mathbf{x}) := \langle \text{grad } V(\mathbf{x}), \mathbf{F}(\mathbf{x}) \rangle.$$

Direm que $V(\mathbf{x})$ és una *quantitat conservada* o *integral primera* quan la seva derivada temporal sigui idènticament nul·la.

Si $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ és una trajectòria del sistema $\mathbf{x}' = \mathbf{F}(\mathbf{x})$, llavors la derivada de la funció $t \mapsto V(\mathbf{x}(t))$ a l'instant t coincideix amb la derivada temporal de $V(\mathbf{x})$ al punt $\mathbf{x}(t)$, ja que

$$\frac{d}{dt}\{V(\mathbf{x}(t))\} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_j}(\mathbf{x}(t)) \frac{dx_j}{dt}(t) = \langle \text{grad } V(\mathbf{x}(t)), \mathbf{x}'(t) \rangle = \langle \text{grad } V(\mathbf{x}(t)), \mathbf{F}(\mathbf{x}(t)) \rangle = W(\mathbf{x}(t)).$$

El signe d'aquesta derivada ens indica com varia el valor de la funció $V(\mathbf{x})$ sobre les trajectòries del sistema. Per exemple, si $V(\mathbf{x})$ és una quantitat conservada i les seves hipersuperfícies de nivell tenen l'aspecte d'“esferes deformades” centrades al punt d'equilibri, com que les trajectòries són contingudes en aquestes “esferes” podem afirmar que el punt d'equilibri és estable però no atractor. (És la mateixa idea que ja usem a l'exemple 54.) L'estratègia general del mètode de Lyapunov consisteix a trobar una funció “distància al punt d'equilibri” $V(\mathbf{x})$ tal que la seva derivada temporal no tingui canvis de signe prop del punt d'equilibri. Les funcions que no tenen canvis de signe prop d'un punt s'anomenen definides (quan localment només s'anul·len al punt en qüestió) o semidefinides (quan permetem que falli la condició anterior).

Definició. Direm que una funció $W : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ és *semidefinida positiva/negativa* en un punt $\mathbf{x}_0 \in U$ quan té un mínim/màxim local en aquest punt i, a més, $W(\mathbf{x}_0) = 0$. I direm que és *definida positiva/negativa* quan, a més, aquest mínim/màxim local és estricte.

Per exemple, la funció $W(x_1, x_2, x_3) = 3(x_1)^2 + 7(x_2)^2 + (x_3)^2$ és definida positiva a l'origen, mentre que la funció $W(x_1, x_2, x_3) = (x_1)^2 + 4(x_3)^2$ no ho és, tot i que sí és semidefinida positiva. També convé notar que si $\mathbf{x}_0$ és un punt d'equilibri del sistema $\mathbf{x}' = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ i $V(\mathbf{x})$ és una funció arbitrària, llavors la seva derivada temporal $W(\mathbf{x}) = \langle \text{grad } V(\mathbf{x}), \mathbf{F}(\mathbf{x}) \rangle$ s'anul·la en $\mathbf{x}_0$.

Teorema (Lyapunov). *Segui $\mathbf{x}_0$ un punt d'equilibri del sistema $\mathbf{x}' = \mathbf{F}(\mathbf{x})$, sigui $V(\mathbf{x})$ una funció que té un mínim local estricte al punt $\mathbf{x}_0$ i sigui $W(\mathbf{x}) = \langle \text{grad } V(\mathbf{x}), \mathbf{F}(\mathbf{x}) \rangle$ la seva derivada temporal.*

- (1) *Si $W(\mathbf{x})$ és definida positiva/negativa en $\mathbf{x}_0$, llavors el punt $\mathbf{x}_0$ és repulsor/attractor.*
- (2) *Si $W(\mathbf{x})$ és semidefinida negativa en $\mathbf{x}_0$, llavors el punt d'equilibri $\mathbf{x}_0$ és estable.*
- (3) *Si $W(\mathbf{x})$ és semidefinida positiva en $\mathbf{x}_0$, llavors el punt d'equilibri $\mathbf{x}_0$ no és atractor.*
- (4) *Si $W(\mathbf{x}) \equiv 0$, llavors el punt d'equilibri $\mathbf{x}_0$ és estable però no atractor.*
- (5) *Si $W(\mathbf{x})$ és semidefinida positiva/negativa en $\mathbf{x}_0$ i el conjunt de nivell $\{\mathbf{x} \in U : W(\mathbf{x}) = 0\}$ no conté cap trajectòria¹⁷, llavors el punt $\mathbf{x}_0$ és repulsor/attractor.*

Observació. La principal dificultat del mètode de Lyapunov és trobar una funció $V(\mathbf{x})$ que permeti aplicar el teorema. No és fàcil. Una elecció estàndard en els problemes mecànics és prendre l'energia mecànica (cinètica més potencial) com a funció $V(\mathbf{x})$. Si no tenim en compte la fricció, l'energia mecànica es conserva, i per tant la seva derivada temporal serà nul·la. Si tenim en compte la fricció, l'energia mecànica es dissipa, i per tant la seva derivada temporal serà definida (o semidefinida) negativa.

Definició. Un punt d'equilibri d'un sistema no lineal 2D s'anomena un *centre no lineal* si el sistema té una quantitat conservada (ben definida en tot un entorn del punt) i el seu sistema linealitzat en aquest punt és un centre.

Totes les trajectòries de sistemes no lineals 2D properes a un centre no lineal són solucions periòdiques; és a dir, giren formant corbes tancades, vegeu l'exemple 54. Si els valors propis del sistema linealitzat entorn a un centre no lineal són $\lambda_{\pm} = \pm\beta i$, amb $\beta > 0$, llavors el període de les solucions del sistema no lineal tendeix a $p = 2\pi/\beta$ quan ens apropem al punt d'equilibri. Usarem aquesta propietat per a calcular el període de les petites oscil·lacions d'un pèndol.

¹⁷Llevat de la trajectòria constant $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{x}_0$, és clar.

Evolució d'un volum. La divergència d'un camp vectorial $\mathbf{F} : U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$, on $\mathbf{F} = \mathbf{F}(t, \mathbf{x})$ amb $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ i $\mathbf{F} = (f_1, \dots, f_n)$, és la funció

$$\operatorname{div} \mathbf{F}(t, \mathbf{x}) = \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(t, \mathbf{x}) + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(t, \mathbf{x}).$$

Teorema. Als instants t i posicions $\mathbf{x}$ on el camp té divergència positiva, nul·la o negativa, el sistema no lineal $\mathbf{x}' = \mathbf{F}(t, \mathbf{x})$ expandeix, conserva o contrau (localment) volum, respectivament.

Una conseqüència d'aquest teorema és que la divergència d'un camp autònom en un punt d'equilibri atractor/repulsor no pot ser positiva/negativa. I el següent resultat n'és una altra.

Corol·lari. Si $\mathbf{F} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ és un camp autònom 2D tal que la seva divergència mai no s'anul·la, llavors el sistema autònom $\mathbf{x}' = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ no pot tenir cap solució periòdica no constant que tanqui un domini contingut a l'obert U .

Prova. Per reducció al absurd. Suposem que el sistema té una solució T -periòdica no constant $\sigma(t)$ que tanca un domini $D \subset U$. Sigui $C = \partial D = \sigma([0, T])$ la seva òrbita. En primer lloc, $D \neq \emptyset$, ja que $\sigma(t)$ no és constant. En segon lloc, D és invariant, ja que el teorema d'existència i unicitat implica que una partícula que inicialment es troba dins de D , no pot escapar-ne. I, anàlogament, una partícula que comença fora no pot entrar-hi. És a dir,

$$D_t := \bigcup_{\mathbf{x}_0 \in D} \left\{ \mathbf{x}(t) : \mathbf{x} \text{ és la solució del PVI } \mathbf{x}' = \mathbf{F}(\mathbf{x}), \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \right\} \equiv D.$$

Però sabem que la divergència mai no s'anul·la. Per tant, o bé és positiva o bé és negativa. En el primer cas, el sistema expandeix àrea: $\operatorname{Area}(D_t)$ és estrictament creixent en t . En el segon cas, el sistema contrau àrea: $\operatorname{Area}(D_t)$ és estrictament decreixent en t . Ambdues situacions contradiuen la igualtat $D_t \equiv D$. $\square$

Exercici. Proveu que un camp autònom $\mathbf{F} : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que la divergència mai no s'anul·la no pot tenir cap superfície invariant tancada que tanqui una regió $W \subset U$.

El retrat de fase del pèndol sense fricció. Aquesta secció és una mica més dura. Tenim un pèndol ([Wikipedia](#)) de massa m i longitud l sota un camp gravitatori d'intensitat constant g . Usant la segona llei de Newton comprovem que l'equació del moviment del pèndol sense fricció és l'EDO de segon ordre

$$ml\theta'' = -mg \sin \theta,$$

on $\theta(t)$ és l'angle format pel pèndol amb la posició vertical inferior, vegeu la figura 4.

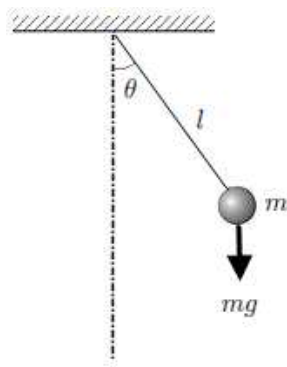


FIGURA 4. Esquema d'un pèndol.

Introduint la velocitat angular $\omega = \theta'$, reescrivim l'EDO anterior com el sistema no lineal 2D de primer ordre

$$\begin{cases} \theta' &= \omega \\ \omega' &= -gl^{-1} \sin \theta \end{cases}$$

Volem dibuixar el retrat de fase d'aquest sistema no lineal 2D. Això inclou calcular tots els seus punts d'equilibri, estudiar l'estabilitat de cadascun d'ells i representar les òrbites del sistema de manera aproximada. El procés consta dels següents passos:

- *Punts d'equilibri.* Busquem els punts on el camp és zero:

$$\left. \begin{array}{l} \theta' = \omega = 0 \\ \omega' = -gl^{-1} \sin \theta = 0 \end{array} \right\} \implies (\theta, \omega) = (k\pi, 0), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Aquests punts d'equilibri corresponen a les posicions de equilibri inferior (si k és parell) i superior (si k és senar) del pèndol.

- *Estabilitat dels punts d'equilibri per linealització.* La matriu del sistema linealitzat al punt d'equilibri $(\theta, \omega) = (k\pi, 0)$ és

$$A_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -gl^{-1} \cos \theta & 0 \end{pmatrix}_{(\theta, \omega) = (k\pi, 0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ (-1)^{k+1} g/l & 0 \end{pmatrix}.$$

Si $k = 2n + 1$ és senar, $\det A_k = (-1)^{2n+1} g/l = -g/l < 0$ i el sistema linealitzat és una sella. Per tant, hem provat que la posició d'equilibri superior és inestable. En canvi, si $k = 2n$ és parell, $\det A_k = (-1)^{2n} g/l = g/l > 0$ i $\text{tr } A_k = 0$, i per tant el sistema linealitzat és un centre. En aquest segon cas, la linealització no decideix l'estabilitat.

- *Estabilitat de la posició d'equilibri inferior per Lyapunov.* Si normalizem el problema prenent l'origen d'energia potencial a la posició d'equilibri inferior (és a dir, $\theta = 0$), llavors l'energia mecànica del pèndol és

$$V(\theta, \omega) = ml^2 \omega^2 / 2 + mgl(1 - \cos \theta).$$

Aquesta energia mecànica assoleix el seu valor mínim si i només si: (1) l'energia cinètica és nul·la: $\omega = 0$; i (2) l'energia potencial és mínima: $\cos \theta = 1$. Aquest argument físic demostra que l'energia té mínims locals estrictes als punts d'equilibri associats a la posició d'equilibri inferior. Tot seguit, calculem la derivada temporal de l'energia mecànica:

$$\frac{d}{dt} \{V(\theta, \omega)\} = \frac{\partial V}{\partial \theta}(\theta, \omega) \frac{d\theta}{dt} + \frac{\partial V}{\partial \omega}(\theta, \omega) \frac{d\omega}{dt} = (mgl \sin \theta) \theta' + (ml^2 \omega) \omega' = mgl \omega \sin \theta - mgl \omega \sin \theta \equiv 0.$$

És a dir, l'energia mecànica es conserva. Finalment, apliquem el darrer apartat del teorema de Lyapunov i obtenim que la posició d'equilibri inferior és estable, però no atractora. De fet, és un centre no lineal. És a dir, totes les trajectòries del pèndol prop de la posició d'equilibri inferior són periòdiques.

- *Dibuixeu les corbes de nivell de la funció $V(\theta, \omega)$.* Com que el valor de funció $V(\theta, \omega)$ es manté constant al llarg de les trajectòries del sistema, dibuixar les corbes de nivell d'aquesta funció equival a dibuixar les òrbites del sistema. Un cop fixada l'energia mecànica total $E \geq 0$, les corbes de nivell $\{V(\theta, \omega) = E\}$ s'expressen en forma de gràfiques:

$$\omega = \pm l^{-1} \sqrt{2E/m - 2gl(1 - \cos \theta)}.$$

Veiem que $E = 0$ i $E = 2mgl$ en les posicions d'equilibri inferior i superior, respectivament.

- *Determineu el sentit de les trajectòries.* Les trajectòries es recorren cap a la dreta mentre es troben al semiplà superior $\{(\theta, \omega) \in \mathbb{R}^2 : \omega > 0\}$, ja que $\theta'(t) = \omega(t) > 0$. Anàlogament, al semiplà inferior es recorren cap a la esquerra.
- *Ressalteu les corbes invariants de la posició d'equilibri superior.* Els punts $(\theta, \omega) = (k\pi, 0)$ amb k senar són selles no lineals, i per tant tenen una corba invariant de sortida (inestable) i una corba invariant d'entrada (estable). A més, l'energia mecànica en aquests punts és $E = 2mgl$. Aquest nivell d'energia es pot expressar així:

$$V(\theta, \omega) = 2mgl \iff \omega^2 = 2gl^{-1}(1 + \cos \theta) \iff \omega = \pm 2\sqrt{g/l} |\cos \theta/2|.$$

Exercici. Deixem caure el pèndol des de la posició que correspon a un cert angle θ_0 amb velocitat angular nul·la: $\omega_0 = 0$. Sabem que el pèndol oscil·la periòdicament entorn de la posició d'equilibri inferior. Sigui $p = p(\theta_0)$ el període. Argumenteu que

$$\lim_{\theta_0 \rightarrow 0} p(\theta_0) = 2\pi \sqrt{l/g}.$$

[Ind.: Si $|\theta_0|$ és petit, llavors les petites oscil·lacions del pèndol es poden aproximar per l'oscil·lacions del sistema linealitzat.]

Exercici. Determineu l'estabilitat de les dues posicions d'equilibri quan tenim en compte la fricció. És a dir, quan l'EDO de segon ordre és

$$ml\theta'' = -mg \sin \theta - \mu l \theta',$$

essent $\mu > 0$ el coeficient de fricció.

Equacions en Derivades Parcial

Una *equació en derivades parcials* (EDP) és una equació diferencial que té com a incògnita una funció que depèn de més d'una variable. L'ordre d'una EDP és l'ordre de la derivada parcial més alta. En aquest tema estudiarem algunes EDPs lineals de segon ordre a coeficients constants.

LES TRES EQUACIONS BÀSIQUES: ONES, CALOR I LAPLACE/POISSON

Totes les EDPs que estudiarem provenen de models físics: la vibració vertical de les cordes d'una guitarra o de la membrana d'un tambor; l'evolució de la temperatura en peces 1D, 2D o 3D; els equilibris elàstics i tèrmics dels problemes anteriors, etc. Això proporciona una valiosa intuïció del comportament que han de tenir les solucions de les EDPs considerades i podrem interpretar físicament els resultats obtinguts.

L'equació d'ones 1D (corda vibrant). Considerem el moviment ondulatori vertical d'una corda vibrant horitzontal de longitud L de densitat constant i composició homogènia sotmesa a una força externa que actua en la direcció vertical. Notem per $u(x, t)$ al desplaçament vertical respecte la posició d'equilibri del punt $x \in [0, L]$ de la corda a l'instant $t \in \mathbb{R}$. Anàlogament, $F(x, t)$ és la força externa per unitat de massa que actua sobre el punt $x \in [0, L]$ a l'instant $t \in \mathbb{R}$. La força empeny cap amunt/avall quan $F(x, t)$ és positiva/negativa.

L'EDP que modelitza el moviment és

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x, t), \quad x \in (0, L), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Aquí, els símbols u_{tt} i u_{xx} denoten les derivades parcials segones respecte el temps i la posició, respectivament. El paràmetre $c^2 = \tau/\rho$ depèn de la tensió τ i de la densitat lineal ρ . La quantitat c serà interpretada més endavant com la *velocitat* a la qual viatgen les ones a través del material considerat. Direm que aquesta EDP és *homogènia* quan $F(x, t) \equiv 0$. Si considerem que la corda vibrant és de longitud infinita —sense sentit físic, però amb interès matemàtic—, escriurem $x \in \mathbb{R}$.

Exercici. Usem que els termes u_{tt} i $c^2 u_{xx}$ tenen les mateixes unitats per deduir que c té unitats de velocitat “horitzontal” (és a dir, espai “horitzontal” dividit per temps).

L'equació de la calor 1D. Considerem l'evolució de la temperatura en una barra homogènia de longitud L que té algunes fonts de calor internes¹⁸ descrits per una funció $F(x, t)$. De fet, parlariem pròpiament d'una font de calor per als punts x i instants t en què la funció $F(x, t)$ és positiva, mentre que una “font de calor negativa” seria en realitat un embornal de calor. Notem per $u(x, t)$ la temperatura del punt $x \in [0, L]$ a l'instant $t \geq 0$. Com que no vivim en un món 1D, des d'un punt de vista físic té més sentit considerar l'evolució de la temperatura en un mur homogeni infinit de gruix L , essent $x \in [0, L]$ la coordenada que “travessa” el mur.

L'EDP que modelitza l'evolució de la temperatura és

$$u_t - k^2 u_{xx} = F(x, t), \quad x \in (0, L), \quad t > 0.$$

El paràmetre $k^2 = \kappa/c\rho$ depèn de la conductivitat tèrmica κ , la densitat lineal ρ i el calor específic c del material que conforma la barra o el mur infinit. L'EDP és *homogènia* quan $F(x, t) \equiv 0$. Si considerem que la barra és de longitud infinita, escriurem $x \in \mathbb{R}$.

Exercici. Proveu que la funció $u : \mathbb{R} \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida per

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi k^2 t}} e^{-x^2/4k^2 t}$$

compleix l'equació de la calor homogènia. Calculeu $\lim_{t \rightarrow 0} u(x, t)$. Què passa quan $t < 0$?

Equilibris elàstics i tèrmics 1D del cas homogeni. Busquem els equilibris elàstics en absència de forces externes i els equilibris tèrmics en absència de fonts de calor internes: $F(x, t) \equiv 0$. Equilibri vol dir que l'estat del cos es manté estacionari en el temps, i per tant busquem solucions $u = u(x)$ que no depenguin del temps i així desapareixen les derivades parcials u_t i u_{tt} . En aquest cas, les EDPs $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ i $u_t = k^2 u_{xx}$ es redueixen a l'EDO lineal de segon ordre $u'' = 0$, que té com a úniques solucions les funcions lineals de la forma $u(x) = ax + b$, amb $a, b \in \mathbb{R}$.

Queda provat doncs que els únics equilibris elàstics d'una corda vibrant no sotmesa a forces externes i els únics equilibris tèrmics d'una barra sense fonts de calor internes són els estats (desplaçament o temperatura) lineals.

¹⁸Per exemple, un transistor s'escalfa quan hi circula un corrent elèctric.

Les versions multidimensionals. Abans de donar les versions multidimensionals de les equacions anteriors, recordem que el *laplaciana* d'una funció $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ que depèn d'una variable vectorial $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ és la funció

$$\Delta u = \operatorname{div} \operatorname{grad} u = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = u_{x_1 x_1} + \dots + u_{x_n x_n}.$$

Per exemple, si la funció u depèn d'una única variable $x \in \mathbb{R}$, llavors $\Delta u = u_{xx}$. En canvi, si depèn de tres variables: $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, llavors $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$. A més, quan la funció depengui de la posició $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ i el temps t , interpretarem que el laplaciana només afecta les variables de posició; és a dir, el laplaciana no inclou el terme u_{tt} .

Les versions n -dimensionals de les equacions anteriors són les següents.

- *L'equació d'ones* que modelitza el moviment ondulatori d'un cos elàstic $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ és

$$u_{tt} - c^2 \Delta u = F(\mathbf{x}, t), \quad u = u(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega, \quad t \in \mathbb{R}.$$

- *L'equació de la calor* que modelitza l'evolució de la temperatura en un cos $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ és

$$u_t - k^2 \Delta u = F(\mathbf{x}, t), \quad u = u(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega, \quad t > 0.$$

Des d'un punt de vista físic, només interessen els casos 1D, 2D o 3D. És a dir, $n \leq 3$. Igual que amb les versions 1D estem suposant que el cos és completament homogeni. La funció $F(\mathbf{x}, t)$ representa l'acció d'una força exterior en el cas de l'equació d'ones o les fonts de calor internes en el cas de l'equació de calor. Estem suposant que $F(\mathbf{x}, t)$ és una dada coneguda.

L'equació de Laplace/Poisson. A partir de les versions n -dimensionals de les equacions d'ones i calor, veiem que si la funció $F(\mathbf{x}, t)$ no depèn de t , llavors els equilibris tèrmics i elàstics d'un cos $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ vénen modelitzats per l'anomenada *equació de Poisson*

$$\Delta u = G(\mathbf{x}), \quad u = u(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega.$$

Aquí, $G(\mathbf{x}) = -F(\mathbf{x})/c^2$ en el cas de l'equació d'ones i $G(\mathbf{x}) = -F(\mathbf{x})/k^2$ en el cas de l'equació de la calor. La versió homogènia d'aquesta equació rep el nom d'*equació de Laplace*:

$$\Delta u = 0, \quad u = u(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega.$$

CONDICIONS INICIALS, CONDICIONS DE FRONTERA I FLUX

Totes les equacions anteriors tenen infinites solucions. Per tal de capturar una solució concreta imposarem condicions addicionals, que poden ser de dos tipus: inicials i de frontera.

Condicions inicials: desplaçament, velocitat i temperatura. Aquestes condicions fixen l'estat de l'objecte a l'instant inicial. Comencem per l'equació d'ones, que és de segon ordre en el temps, i per tant necessita exactament dues condicions inicials, que fixaran

- El *desplaçament inicial*: $u(\mathbf{x}, 0) = f(\mathbf{x})$ per a $\mathbf{x} \in \Omega$; i
- La *velocitat inicial*: $u_t(\mathbf{x}, 0) = g(\mathbf{x})$ per a $\mathbf{x} \in \Omega$.

En canvi, l'equació de la calor és de primer ordre en el temps, i per tant n'hi ha prou amb fixar la *temperatura inicial*: $u(\mathbf{x}, 0) = f(\mathbf{x})$ per a $\mathbf{x} \in \Omega$. I, per acabar, l'equació de Laplace/Poisson és estàtica, i per tant no té sentit fixar l'estat inicial de l'objecte, ja que aquest estat és justament la incògnita del problema.

Condicions de frontera: Dirichlet, Neumann, mixtes i periòdiques. Aquestes condicions (també anomenades *condicions de contorn*) determinen la interacció de l'objecte amb el medi que l'envolta, i per tant només tenen sentit quan l'objecte estudiat té frontera. Per exemple, la corda vibrant infinita no té frontera i les cordes d'una guitarra sí.

Considerarem quatre tipus de condicions de frontera.

- *Dirichlet*: Consisteixen a fixar el valor de la funció u als punts de la frontera.
- *Neumann*: Consisteixen a fixar el valor de la derivada $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}$ als punts de la frontera. El símbol $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}$ denota a la derivada en la direcció normal exterior a la frontera. La convenció que seguim en el cas 1D és: $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = u_x$ a l'extrem dret i $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = -u_x$ a l'extrem esquerre. Més endavant, veurem que la derivada $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}$ quantifica el flux de calor a través de la frontera.
- *Mixtes (només en el cas 1D)*: Consisteixen a considerar una condició de tipus Dirichlet en un extrem i una condició de tipus Neumann en l'altre.
- *Periòdiques (només en el cas 1D)*: Consisteixen a imposar que les funcions u i u_x tinguin el mateix valor als dos extrems de l'interval $[0, L]$.

En els tres primers casos, direm que aquestes condicions són *homogènies* quan tots els valors fixats zero. La funció idènticament nul·la (també anomenada solució trivial) compleix qualsevol condició homogènia.

Exemple 55. Sigui $W \subset \mathbb{R}^3$ un cos de frontera $S = \partial W$. Un PVI de calor en aquest cos 3D sense fonts de calor intern amb condicions de frontera de tipus Neumann ve donat per les equacions

$$\begin{cases} u_t = k^2 \Delta u & (x, y, z) \in W \quad t > 0 \\ u(x, y, z, 0) = f(x, y, z) & (x, y, z) \in W \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x, y, z, t) = h(x, y, z, t) & (x, y, z) \in S \quad t > 0 \end{cases}$$

on la temperatura inicial $f : W \rightarrow \mathbb{R}$ i el flux $h : S \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ són funcions conegudes.

Exemple 56. Un PVI de calor 1D en una barra de longitud L sense fonts de calor intern amb condicions de frontera de tipus Neumann ve donat per les equacions

$$\begin{cases} u_t = k^2 u_{xx} & x \in (0, L) \quad t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) & x \in (0, L) \\ u_x(0, t) = -h_1(t) & t > 0 \\ u_x(L, t) = h_2(t) & t > 0 \end{cases}$$

on la temperatura inicial $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ i els fluxos $h_1, h_2 : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ són funcions conegudes. Anàlogament, si imposem que les condicions de frontera siguin periòdiques, el problema queda així:

$$\begin{cases} u_t = k^2 u_{xx} & x \in (0, L) \quad t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) & x \in (0, L) \\ u(0, t) = u(L, t) & t > 0 \\ u_x(0, t) = u_x(L, t) & t > 0 \end{cases}$$

Exemple 57. Un problema de Poisson 2D en un quadrat de costat $2L$ amb condicions de frontera de tipus Dirichlet homogènies consisteix en les equacions

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = G(x, y) & x \in (-L, L) \quad y \in (-L, L) \\ u(\pm L, y) = 0 & y \in (-L, L) \\ u(x, \pm L) = 0 & x \in (-L, L) \end{cases}$$

on la funció $G : [-L, L] \times [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$ és una dada coneguda. Anàlogament, si imposem que les condicions de frontera siguin de tipus Neumann homogènies, llavors el problema queda així:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = G(x, y) & x \in (-L, L) \quad y \in (-L, L) \\ u_x(\pm L, y) = 0 & y \in (-L, L) \\ u_y(x, \pm L) = 0 & x \in (-L, L) \end{cases}.$$

Interpretació del flux a l'equació de la calor. Per entendre què és flux de calor a través de la frontera, explicarem una llei de conservació referent a l'evolució de la temperatura en un cos 3D o una barra 1D sense fonts de calor internes.

Comencem pel cas 3D. Considerem un cos $W \subset \mathbb{R}^3$ i sigui $S = \partial W$ la seva frontera. Sigui $u(x, y, z, t)$ una solució del problema considerat en l'exemple 55 i introduïm la funció

$$T(t) = \frac{1}{\text{Vol}(W)} \int_W u(x, y, z, t) dx dy dz$$

que mesura la *temperatura mitjana* del cos a l'instant t . La seva derivada és

$$\begin{aligned} T'(t) &= \frac{1}{\text{Vol}(W)} \int_W u_t(x, y, z, t) dx dy dz = \frac{k^2}{\text{Vol}(W)} \int_W \Delta u(x, y, z, t) dx dy dz \\ &= \frac{k^2}{\text{Vol}(W)} \oint_S \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x, y, z, t) dS = \frac{k^2}{\text{Vol}(W)} \oint_S h(x, y, z, t) dS. \end{aligned}$$

Les propietats que hem usat són: derivada sota el signe de la integral (primera igualtat), l'equació de la calor homogènia (segona igualtat), el teorema de la divergència de Gauss (tercera igualtat, vegeu l'exemple 33 del primer tema, dedicat al càlcul vectorial) i les condicions de frontera de tipus Neumann (quarta igualtat).

Per tant, la variació de la temperatura mitjana és proporcional a la integral del *flux de calor* h sobre la superfície tancada S . En realitat, la funció $h(x, y, z, t)$ determina exactament a quina velocitat escapa/entra el calor a través de cada punt $(x, y, z) \in S$ en cada instant $t \geq 0$. La temperatura mitjana es manté constant quan $h \equiv 0$ (és a dir, quan el cos està tèrmicament aïllat i ni entra ni surt calor per la frontera) o quan $\oint_S h dS \equiv 0$ (és a dir, quan la calor que entra per un costat es compensa exactament amb la calor que surt per un altre). Per contra, la temperatura mitjana augmenta/disminueix quan la integral $\oint_S h dS$ és positiva/negativa (és a dir, quan hi ha una entrada/sortida neta de calor).

Tot seguit, estudiem el cas 1D; és a dir, l'evolució de la temperatura en una barra de longitud L . Sigui $u(x, t)$ una solució del problema considerat a la primera part de l'exemple 56 i introduïm la funció

$$T(t) = \frac{1}{L} \int_0^L u(x, t) dx$$

que mesura la *temperatura mitjana* de la barra a l'instant t . La seva derivada és

$$T'(t) = \frac{1}{L} \int_0^L u_t(x, t) dx = \frac{k^2}{L} \int_0^L u_{xx}(x, t) dx = \frac{k^2}{L} [u_x(x, t)]_{x=0}^{x=L} = \frac{k^2}{L} (h_2(t) + h_1(t)).$$

Les propietats que hem usat són: derivada sota el signe de la integral (primera igualtat), l'equació de la calor (segona igualtat), el teorema fonamental del càlcul (tercera igualtat) i les condicions de frontera (quarta igualtat). Per tant, la suma $h_2(t) + h_1(t)$ ens diu quina és variació de la temperatura mitjana $T(t)$. En altres paraules, les funcions $h_2(t)$ i $h_1(t)$ ens diuen a quina velocitat flueix la calor per l'extrem dret i esquerre de la barra, respectivament. Quan són positives/negatives, tenim una entrada/sortida de calor per l'extrem corresponent.

Exercici. Comproveu que la temperatura mitjana es manté constant en considerar condicions de frontera periòdiques en una barra 1D. Interpreteu físicament el resultat.

LINEALITAT: SUPERPOSICIÓ I HOMOGENEÏTZACIÓ

Existeixen diversos trucs simples que es poden aplicar en tots els problemes lineals que apareixen en aquest tema, però els explicarem a través d'exemples concrets per no dispersar-nos.

Superposició. Considerem els dos PVI de calor 1D en una barra de longitud L sense fonts de calor internes donats per

$$\left\{ \begin{array}{lll} v_t = k^2 v_{xx} & x \in (0, L) & t > 0 \\ v(x, 0) = f(x) & x \in (0, L) & \\ v_x(0, t) = 0 & & t > 0 \\ v_x(L, t) = 0 & & t > 0 \end{array} \right\}, \quad \left\{ \begin{array}{lll} w_t = k^2 w_{xx} & x \in (0, L) & t > 0 \\ w(x, 0) = 0 & x \in (0, L) & \\ w_x(0, t) = -h_1(t) & & t > 0 \\ w_x(L, t) = h_2(t) & & t > 0 \end{array} \right\}.$$

Tots dos problemes tenen condicions de frontera de tipus Neumann. La diferència rau en el fet que el primer té una única condició no homogènia (la temperatura inicial), mentre que el segon en té dues (les condicions de frontera als extrems de la barra).

Aleshores, donades dues solucions qualssevol $v(x, t)$ i $w(x, t)$ d'aquests problemes, la seva superposició (suma) $u(x, t) = v(x, t) + w(x, t)$ és una solució del PVI de calor 1D presentat a la primera part de l'exemple 56, que té tres condicions no homogènies.

En general, podem “trossejar” qualsevol problema lineal en diversos subproblemes de manera que cada subproblema tingui poques (potser només una) equacions/condicions no homogènies, essent, per tant, més simple que el problema original. Llavors, si aconseguim resoldre tots aquests subproblemes, la superposició (suma) de les seves respectives solucions serà solució del problema original.

Homogeneïtzació. Aquest truc és similar al anterior, però en comptes de “trossejar” el problema original en diversos subproblemes simples, ara volem simplificar-lo mitjançant un canvi de variables astut.

Per fixar idees, considerem el PVI de calor 1D en una barra de longitud $L = 1$ sense fonts de calor internes amb condicions de frontera de tipus Dirichlet constants

$$\left\{ \begin{array}{lll} u_t = k^2 u_{xx} & x \in (0, 1) & t > 0 \\ u(x, 0) = x^2 & x \in (0, 1) & \\ u(0, t) = 1 & & t > 0 \\ u(1, t) = 2 & & t > 0 \end{array} \right\}.$$

La funció $v(x) = x + 1$ compleix les condicions de frontera: $v(0) = 1$ i $v(1) = 2$. Per tant, si fem el canvi de variables $w(x, t) = u(x, t) - v(x)$, el problema original es transforma en

$$\left\{ \begin{array}{lll} w_t = k^2 w_{xx} & x \in (0, 1) & t > 0 \\ w(x, 0) = x^2 - x - 1 & x \in (0, 1) & \\ w(0, t) = 0 & & t > 0 \\ w(1, t) = 0 & & t > 0 \end{array} \right\}$$

que és un problema força més simple ja que hem *homogeneïtzat* les dues condicions de frontera, sense deshomogeneïtzar l'EDP.

FÓRMULA DE D'ALEMBERT PER A LA CORDA VIBRANT INFINITA

Teorema (Fórmula de D'Alembert). *Considerem el PVI de la corda vibrant infinita*

$$\left\{ \begin{array}{lll} u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x, t) & x \in \mathbb{R} & t \in \mathbb{R} \\ u(x, 0) = f(x) & x \in \mathbb{R} & \\ u_t(x, 0) = g(x) & x \in \mathbb{R} & \end{array} \right\}$$

on la força externa $F(x, t)$, el desplaçament inicial $f(x)$ i la velocitat inicial $g(x)$ són funcions conegudes. Aquest PVI té una única solució que ve donada per

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(f(x+ct) + f(x-ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(y) dy + \frac{1}{2c} \int_0^t \left\{ \int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} F(y, s) dy \right\} ds.$$

La següent demostració (opcional) ens permetrà entendre les conseqüències físiques que es deriven de la fórmula. *Prova.* Només considerem el cas $F(x, t) \equiv 0$; és a dir, quan no actua cap força externa sobre la corda. La idea principal consisteix a realitzar el canvi de variables

$$\xi = x + ct, \quad \eta = x - ct$$

per simplificar l'EDP. Ens cal relacionar les derivades parcials de la funció transformada

$$v(\xi, \eta) = u(x, t)$$

amb les derivades parcials de la funció original $u(x, t)$. Apliquem repetidament la regla de la cadena:

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = v_\xi + v_\eta \\ u_t &= \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} = cv_\xi - cv_\eta \\ u_{xx} &= \frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{\partial v_\xi}{\partial x} + \frac{\partial v_\eta}{\partial x} = \left(\frac{\partial v_\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial v_\eta}{\partial \xi} \right) \frac{\partial \xi}{\partial x} + \left(\frac{\partial v_\xi}{\partial \eta} + \frac{\partial v_\eta}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \eta}{\partial x} = v_{\xi\xi} + 2v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta} \\ u_{tt} &= \frac{\partial u_t}{\partial t} = c \frac{\partial v_\xi}{\partial t} - c \frac{\partial v_\eta}{\partial t} = c \left(\frac{\partial v_\xi}{\partial \xi} - \frac{\partial v_\eta}{\partial \xi} \right) \frac{\partial \xi}{\partial t} + c \left(\frac{\partial v_\xi}{\partial \eta} - \frac{\partial v_\eta}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \eta}{\partial t} = c^2 (v_{\xi\xi} - 2v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta}). \end{aligned}$$

Per tant, resolent l'EDP transformada obtenim:

$$\begin{aligned} u_{tt} = c^2 u_{xx} &\iff c^2 (v_{\xi\xi} - 2v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta}) = c^2 (v_{\xi\xi} + 2v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta}) \\ &\iff v_{\xi\eta} = 0 \\ &\iff v_\xi(\xi, \eta) = r(\xi) \text{ amb alguna funció } r: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ arbitrària} \\ &\iff v(\xi, \eta) = p(\xi) + q(\eta) \text{ amb algunes funcions } p, q: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ arbitràries} \\ &\iff u(x, t) = p(x+ct) + q(x-ct) \text{ amb algunes funcions } p, q: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ arbitràries.} \end{aligned}$$

És a dir, la “solució general” de l'EDP de la corda vibrant infinita són infinites solucions, les quals depenen de dues funcions arbitràries, de la mateixa manera que la solució general d'una EDO lineal de segon ordre depenia de dues constants lliures. Per tant, per trobar la solució del PVI plantejat, utilitzarem la mateixa estratègia seguida amb les EDOs: determinar les dues funcions “lliures” imposant les dues condicions inicials. Així doncs, imposem que

$$f(x) = u(x, 0) = p(x) + q(x), \quad g(x) = u_t(x, 0) = cp'(x) - cq'(x).$$

Derivant la primera equació i multiplicant per c , obtenim la relació $cp'(x) + cq'(x) = cf'(x)$. Combinant aquesta darrera relació amb la segona equació resulta que

$$p'(x) = \frac{1}{2}f'(x) + \frac{1}{2c}g(x).$$

Integrant aquesta darrera igualtat, obtenim

$$p(x) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2c} \int_0^x g(y) dy + k, \quad q(x) = f(x) - p(x) = \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2c} \int_0^x g(y) dy - k,$$

amb la qual cosa les funcions “lliures” $p(x)$ i $q(x)$ queden determinades llevt d'una constant d'integració comuna $k \in \mathbb{R}$. Finalment,

$$u(x, t) = p(x+ct) + q(x-ct) = \frac{1}{2}(f(x+ct) + f(x-ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(y) dy,$$

ja que les dues constants d'integració es cancel·len. □

Observació. La fórmula de D'Alembert implica que el desplaçament vertical de la corda al punt x i a l'instant t només depèn de: (1) El desplaçament inicial als punts $x \pm ct$; (2) La velocitat inicial a l'interval $[x-ct, x+ct]$; i (3) La força externa exercida sobre els punts y als instants s tals que (y, s) pertany al triangle de vèrtexs (x, t) i $(x \pm ct, 0)$.

Observació. L'anterior demostració de la fórmula de D'Alembert mostra que, en absència de forces externes, el desplaçament de la corda és de la forma

$$u(x, t) = p(x+ct) + q(x-ct)$$

amb algunes funcions $p, q: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Això vol dir que el desplaçament de la corda vibrant infinita en absència de forces externes consisteix en la superposició de dues ones, amb perfils que vénen donats per les funcions $p(x)$ i $q(x)$, viatjant en sentits oposats a velocitat c . Concretament, l'ona de perfil $p(x)$ es desplaça cap a l'esquerra, mentre que l'ona de perfil $q(x)$ es desplaça cap a la dreta. És recomanable que accediu al [MIT Mathlet](https://mat-web.upc.edu/etseib/ed/) de títol “Wave Equation” per veure l'animació que mostra aquest fenomen.

Pregunta. Sigui $F(x, t)$ la força (per unitat de massa) externa sobre la corda. Siguin $f(x)$ i $g(x)$ el desplaçament i la velocitat inicials de la corda. Quina és l'acceleració inicial?

(Resposta: $u_{tt}(x, 0) = c^2 u_{xx}(x, 0) + F(x, 0) = c^2 f''(x) + F(x, 0)$.)

SEPARACIÓ DE VARIABLES

El *mètode de separació de variables* és un mètode per resoldre problemes amb simetries que tenen una única condició (inicial o de frontera) no homogènia. No desenvoluparem una teoria general, sinó que l'aplicarem a tres o quatre exemples concrets.

PVFs lineals de segon ordre. L'esmentat mètode de separació de variables requereix resoldre certs problemes de valors en la frontera (PVFs) associats a EDOs lineals homogènies a coeficients constants de segon ordre mitjançant el mètode del polinomi característic.

Definició. $P(m) = m^2 + a_1 m + a_0$ és el *polinomi característic* de l'EDO $x'' + a_1 x' + a_0 x = 0$.

La importància del polinomi característic rau en el fet que si $x(t) = e^{mt}$, llavors

$$x''(t) + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = m^2 e^{mt} + a_1 m e^{mt} + a_0 e^{mt} = P(m) e^{mt}.$$

Usant aquesta relació podem expressar la solució general de l'EDO $x'' + a_1 x' + a_0 x = 0$ en termes de les arrels del seu polinomi característic.

Lema. Sigui $x_h(t)$ la solució general de l'EDO $x'' + a_1 x' + a_0 x = 0$, on $a_1, a_0 \in \mathbb{R}$. Aleshores:

- $P(m)$ té dues arrels reals diferents $m_1, m_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow x_h(t) = c_1 e^{m_1 t} + c_2 e^{m_2 t}$;
- $P(m)$ té una arrel real doble $m_* \in \mathbb{R} \Rightarrow x_h(t) = e^{m_* t} (c_1 + c_2 t)$; i
- $P(m)$ té arrels complexes conjugades $m_{\pm} = \alpha \pm \beta i \notin \mathbb{R} \Rightarrow x_h(t) = e^{\alpha t} (c_1 \cos \beta t + c_2 \sin \beta t)$.

Prova. Sabem que el conjunt de solucions d'una EDO lineal homogènia d'ordre n és un subspai vectorial de dimensió n . Per tant, si trobem dues solucions linealment independents $x_1(t)$ i $x_2(t)$ de l'EDO $x'' + a_1 x' + a_0 x = 0$, podem assegurar que la seva solució general és $x_h(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)$, amb $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ lliures.

- Si $P(m)$ té dues arrels reals diferents m_1 i m_2 , llavors $x_1(t) = e^{m_1 t}$ i $x_2(t) = e^{m_2 t}$ són dues solucions linealment independents.
- Si $P(m)$ té una arrel real doble m_* , llavors $x_1(t) = e^{m_* t}$ és una solució, i $x_2(t) = t e^{m_* t}$ és una altra solució (la qual es pot obtenir aplicant el mètode de reducció d'ordre).
- Si $P(m)$ té dues arrels complexes conjugades $m_{\pm} = \alpha \pm \beta i \notin \mathbb{R}$, llavors les funcions

$$x_{\pm}(t) := e^{(\alpha \pm \beta i)t} = e^{\alpha t} e^{\pm \beta i t} = e^{\alpha t} (\cos \beta t \pm i \sin \beta t),$$

són solucions de l'EDO. La darrera igualtat és conseqüència de la fórmula d'Euler. En particular, les combinacions lineals

$$x_1(t) := \frac{x_+(t) + x_-(t)}{2} = e^{\alpha t} \cos \beta t, \quad x_2(t) := \frac{x_+(t) - x_-(t)}{2i} = e^{\alpha t} \sin \beta t$$

també són solucions de l'EDO i resulten ser linealment independents.

Amb això queda provat que la solució general té una de les tres formes donades al lema. □

Ens centrem ara en els PVFs homogenis de la forma

$$\begin{cases} x'' + a_1(\lambda)x' + a_0(\lambda)x &= 0 \\ \alpha_{10}x(t_1) + \alpha_{11}x'(t_1) &= 0 \\ \alpha_{20}x(t_2) + \alpha_{21}x'(t_2) &= 0 \end{cases}$$

on els instants $t_1 \neq t_2$ i els coeficients α_{ij} i $a_i(\lambda)$ són dades del problema. Els coeficients $a_1(\lambda)$ i $a_0(\lambda)$ són constants, però depenen d'un paràmetre λ . La funció $x(t) \equiv 0$ sempre és una solució d'aquests PVFs. És l'anomenada *solució trivial*. Volem saber per a quins valors del paràmetre $\lambda \in \mathbb{R}$ existeixen solucions no trivials.

Definició. Aquests valors són els *valors propis* i les solucions no trivials són les *funcions pròpies* del PVF (sovint, hom escriu “VAPs” i “FUPs” respectivament). Un valor propi és *simple* o *doble* quan la dimensió del subspai vectorial format per les seves funcions pròpies és 1 o 2, respectivament.

Seguirem les següents passes per a calcular els valors propis i les seves funcions pròpies associades:

- (1) Expressem la solució general de l'EDO homogènia en funció del paràmetre $\lambda \in \mathbb{R}$; és a dir,

$$x_h(t; \lambda) = c_1 x_1(t; \lambda) + c_2 x_2(t; \lambda), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

- (2) Imposem les condicions de frontera, per tal d'obtenir un sistema lineal homogeni amb una matriu A_λ dependent del paràmetre:

$$A_\lambda \mathbf{c} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

- (3) Calculem els (possiblement infinits) valors propis resolent l'equació $\det[A_\lambda] = 0$ (que de fet és l'equació característica del PVF).

- (4) Per a cada valor propi $\lambda = \lambda_*$, calculem les seves funcions pròpies resolent el sistema indeterminat $A_{\lambda_*} \mathbf{c} = \mathbf{0}$.

Abans de calcular els valors propis i les funcions pròpies d'alguns PVFs clàssics, observem que és possible expressar la solució general de l'EDO $x'' = \lambda x$, $\lambda \in \mathbb{R}$, com una combinació lineal de:

- Funcions trigonomètriques si $\lambda = -\mu^2 < 0$: $x_h(t) = c_1 \cos \mu t + c_2 \sin \mu t$;
- Funcions hiperbòliques si $\lambda = \mu^2 > 0$: $x_h(t) = c_1 \cosh \mu t + c_2 \sinh \mu t$;
- Funcions monomials si $\lambda = 0$: $x_h(t) = c_1 + c_2 t$.

La importància d'aquestes expressions rau en el fet que l'EDO $x'' = \lambda x$ apareix a gairebé tots els problemes de separació de variables que estudiarem després. En particular, cal saber resoldre els quatre PVFs que apareixen a la següent proposició.

Proposició. *Escrivim els valors propis i les funcions pròpies dels següents PVFs clàssics.*

- (1) PVF amb condicions de frontera tipus Dirichlet: $x'' = \lambda x$, $x(0) = x(L) = 0$.
Valors propis: $\lambda_n = -(n\pi/L)^2$, funcions pròpies: $x_n(t) = \sin(n\pi t/L)$, per a $n \geq 1$.
- (2) PVF amb condicions de frontera tipus Neumann: $x'' = \lambda x$, $x'(0) = x'(L) = 0$.
Valors propis: $\lambda_n = -(n\pi/L)^2$, funcions pròpies: $x_n(x) = \cos(n\pi t/L)$, per a $n \geq 0$.
- (3) PVF amb condicions de frontera mixtes: $x'' = \lambda x$, $x(0) = x'(L) = 0$.
Valors propis: $\lambda_n = -(n + 1/2)^2 \pi^2 / L^2$, funcions pròpies: $x_n(t) = \sin((n + 1/2)\pi t/L)$, per a $n \geq 0$.
- (4) PVF amb condicions de frontera periòdiques: $x'' = \lambda x$, $x(-L) = x(L)$ i $x'(-L) = x'(L)$.
 $\lambda_0 = 0$ és un valor propi simple de funció pròpia $c_0(t) \equiv 1$.
 $\lambda_n = -(n\pi/L)^2$ és valor propi doble de funcions pròpies $c_n(t) = \cos(n\pi t/L)$ i $s_n(t) = \sin(n\pi t/L)$, per a $n \geq 1$.

Prova. Cap d'aquests quatre PVFs no té valors propis positius. Per exemple, si $x(t)$ és una funció pròpia de valor propi λ , integrant per parts, usant que $x'' = \lambda x$ i qualsevol dels tres primers tipus de condicions de frontera anteriors (Dirichlet, Neumann o mixtes), veiem que

$$-\int_0^L (x'(t))^2 dt = \int_0^L x(t)x''(t) dt - [x(t)x'(t)]_{t=0}^{t=L} = \lambda \int_0^L (x(t))^2 dt \Rightarrow \lambda = -\frac{\int_0^L (x'(t))^2 dt}{\int_0^L (x(t))^2 dt} \leq 0.$$

En el cas periòdic obtenim el mateix resultat, però integrant a l'interval $[-L, L]$.

A més, $\lambda = 0 \Leftrightarrow x'(t) \equiv 0$. És a dir, $\lambda = 0$ és un valor propi si i només si la funció $x(t) \equiv 1$ compleix les condicions de frontera, la qual cosa només succeeix amb les condicions de tipus Neumann i les periòdiques.

Finalment, n'hi ha prou amb calcular els valors propis negatius: $\lambda = -\mu^2 < 0$ i les seves funcions pròpies. Recordem que en aquest cas la solució general de l'EDO $x'' = \lambda x$ és la combinació lineal de funcions trigonomètriques

$$x_h(t) = c_1 \cos \mu t + c_2 \sin \mu t, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

- (1) En imposar que $x_h(t)$ compleixi les condicions de frontera tipus Dirichlet, obtenim el sistema

$$A_\lambda \mathbf{c} = \mathbf{0}, \quad A_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \cos \mu L & \sin \mu L \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Per tant, $\sin \mu L = \det[A_\lambda] = 0 \Leftrightarrow \mu = \mu_n = \frac{n\pi}{L}$, $n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \lambda = \lambda_n = -\mu_n^2 = -(\frac{n\pi}{L})^2$, $n \geq 1$. A la darrera equivalència hem passat de $n \in \mathbb{Z}$ als enters $n \geq 1$. Les dues raons per fer-ho són que tenim n elevat al quadrat (per tant, els enters negatius són superflus) i que l'elecció $n = 0$ no té sentit (ja que estem en el cas $\lambda < 0$).

Per tal de calcular les funcions pròpies de valor propi $\lambda = \lambda_n = -\mu_n^2$, hem de resoldre el sistema indeterminat

$$\left. \begin{array}{llll} c_1 & = & c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0 & = & x(0) & = & 0 \\ (-1)^n c_1 & = & c_1 \cos n\pi + c_2 \sin n\pi & = & x(L) & = & 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} c_1 = 0 \\ c_2 \in \mathbb{R} \text{ lliure} \end{array} \right\}.$$

Per tant, $x_n(t) = \sin(\mu_n t) = \sin(n\pi t/L)$ és una funció pròpia de valor propi $\lambda_n = -(n\pi/L)^2$, per a $n \geq 1$.

- (2) En imposar que $x_h(t)$ compleixi les condicions de frontera tipus Neumann, obtenim el sistema

$$A_\lambda \mathbf{c} = \mathbf{0}, \quad A_\lambda = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\sin \mu L & \cos \mu L \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Per tant, $\sin \mu L = \det[A_\lambda] = 0 \Leftrightarrow \mu = \mu_n = \frac{n\pi}{L}$, $n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \lambda = \lambda_n = -\mu_n^2 = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$, $n \geq 1$. Hem passat de $n \in \mathbb{Z}$ als enters $n \geq 1$ pel mateix motiu que abans.

Per calcular les funcions pròpies de valor propi $\lambda = \lambda_n = -\mu_n^2$, hem de resoldre el sistema indeterminat

$$\left. \begin{aligned} \mu_n c_2 &= -c_1 \mu_n \sin 0 + c_2 \mu_n \cos 0 &= x'(0) &= 0 \\ (-1)^n \mu_n c_2 &= -c_1 \mu_n \sin n\pi + c_2 \mu_n \cos n\pi &= x'(L) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} c_1 &\in \mathbb{R} \text{ lliure} \\ c_2 &= 0 \end{aligned} \right\}.$$

Per tant, $x_n(t) = \cos(\mu_n t) = \cos(n\pi t/L)$ és una funció pròpia de valor propi $\lambda_n = -(n\pi/L)^2$, per a $n \geq 0$. Hem escrit $n \geq 0$, en comptes de $n \geq 1$, per incloure el fet que $x_0(t) \equiv 1$ és una funció pròpia de valor propi $\lambda_0 = 0$.

(3) En imposar que $x_h(t)$ compleixi les condicions de frontera mixtes, obtenim el sistema

$$A_\lambda \mathbf{c} = \mathbf{0}, \quad A_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\sin \mu L & \cos \mu L \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

I $\cos \mu L = \det[A_\lambda] = 0 \Leftrightarrow \mu = \mu_n = \frac{(n+1/2)\pi}{L}$, $n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \lambda = \lambda_n = -\mu_n^2 = -\frac{(n+1/2)^2 \pi^2}{L^2}$, $n \geq 0$. Hem passat de $n \in \mathbb{Z}$ als enters $n \geq 0$ pel mateix motiu que abans.

Per calcular les funcions pròpies de valor propi $\lambda = \lambda_n = -\mu_n^2$, hem de resoldre el sistema indeterminat

$$\left. \begin{aligned} c_1 &= c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0 &= x(0) &= 0 \\ (-1)^{n+1} \mu_n c_1 &= -c_1 \mu_n \sin \mu_n L + c_2 \mu_n \cos \mu_n L &= x'(L) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} c_1 &= 0 \\ c_2 &\in \mathbb{R} \text{ lliure} \end{aligned} \right\}.$$

Per tant, $x_n(t) = \sin(\mu_n t) = \sin((n+1/2)\pi t/L)$ és una funció pròpia de valor propi $\lambda_n = -(n+1/2)^2 \pi^2/L^2$, per a tot $n \geq 0$.

(4) En imposar que $x_h(t)$ compleixi les condicions de frontera periòdiques, obtenim el sistema

$$A_\lambda \mathbf{c} = \mathbf{0}, \quad A_\lambda = \begin{pmatrix} 0 & 2 \sin \mu L \\ -2 \mu \sin \mu L & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

I per tant $4\mu \sin^2 \mu L = \det[A_\lambda] = 0 \Leftrightarrow \mu = \mu_n = \frac{n\pi}{L}$, $n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \lambda = \lambda_n = -\mu_n^2 = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$, $n \geq 1$. Hem passat una cop més de $n \in \mathbb{Z}$ als enters $n \geq 1$.

Per calcular les funcions pròpies de valor propi $\lambda = \lambda_n = -\mu_n^2$, hem de resoldre el sistema indeterminat

$$\left. \begin{aligned} 0 &= 2c_2 \sin(\mu_n L) &= x(L) - x(-L) &= 0 \\ 0 &= -2\mu_n c_1 \sin(\mu_n L) &= x'(L) - x'(-L) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} c_1 &\in \mathbb{R} \text{ lliure} \\ c_2 &\in \mathbb{R} \text{ lliure} \end{aligned} \right\}.$$

Per tant, $c_n(t) = \cos(\mu_n t) = \cos(n\pi t/L)$ i $s_n(t) = \sin(\mu_n t) = \sin(n\pi t/L)$ són dues funcions pròpies linealment independents del valor propi doble $\lambda_n = -(n\pi/L)^2$, per a tot $n \geq 1$.

Amb això hem acabat la prova de la proposició. □

Exercici. Resoleu el PVF amb condicions mixtes $x'' = \lambda x$, $x'(0) = x(L) = 0$.

Separació de variables a l'equació d'ones 1D. Considerem una equació d'ones 1D homogènia amb condicions de contorn de tipus Neumann homogènies. Per simplificar suposarem que la corda té longitud $L = \pi$ i que la deixem anar, sense impuls, amb un desplaçament inicial $f(x) = 1 - 2\cos(3x)$. també suposarem que no actua cap força externa. Denotem per c la velocitat a la que viatgen les ones per la corda. Les equacions que modelitzen aquest problema són

$$(1) \begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} & x \in (0, \pi) & t \in \mathbb{R} \\ u(x, 0) = 1 - 2\cos(3x) & x \in (0, \pi) \\ u_t(x, 0) = 0 & x \in (0, \pi) \\ u_x(0, t) = 0 & t \in \mathbb{R} \\ u_x(\pi, t) = 0 & t \in \mathbb{R} \end{cases}.$$

La idea bàsica del mètode consisteix a buscar solucions en forma de variables separades

$$u(x, t) = X(x)T(t)$$

de la part homogènia del problema a resoldre. En el cas anterior, totes les condicions i equacions són homogènies, llevat de la que correspon al desplaçament inicial, i per tant la seva part homogènia és

$$(1)_h \begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} & x \in (0, \pi) & t \in \mathbb{R} \\ u_t(x, 0) = 0 & x \in (0, \pi) \\ u_x(0, t) = 0 & t \in \mathbb{R} \\ u_x(\pi, t) = 0 & t \in \mathbb{R} \end{cases}.$$

En imposar que la funció $u(x, t) = X(x)T(t)$ compleixi:

- L'equació d'ones $u_{tt} = c^2 u_{xx}$, obtenim $X(x)T''(t) = c^2 X''(x)T(t)$, i per tant

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{c^2 T(t)} = \lambda \in \mathbb{R}.$$

- La condició inicial $u_t(x, 0) = 0$, veiem que $T'(0) = 0$.
- La condició de frontera $u_x(0, t) = 0$, veiem que $X'(0) = 0$.
- La condició de frontera $u_x(\pi, t) = 0$, veiem que $X'(\pi) = 0$.

Per tant, obtenim dos problemes separats:

$$\begin{cases} X''(x) = \lambda X(x) \\ X'(0) = X'(\pi) = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} T''(t) = \lambda c^2 T(t) \\ T'(0) = 0 \end{cases}.$$

A la secció anterior hem vist que els valors propis i les funcions pròpies del PVF amb condicions de Neumann associat a la funció $X(x)$ són

$$\left. \begin{array}{l} \text{Valors propis: } \lambda = \lambda_n = -n^2 \\ \text{Funcions pròpies: } X(x) = X_n(x) = \cos(nx) \end{array} \right\} \quad n \geq 0.$$

Ara ens centrem en el problema associat a la funció $T(t)$, però tenint en compte que $\lambda = \lambda_n = -n^2$. En particular, la solució general de l'EDO $T'' + n^2 c^2 T = 0$ és

$$T(t) = c_1 \cos(cnt) + c_2 \sin(cnt), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

En imposar la condició inicial $T'(0) = 0$, veiem que $c_2 = 0$ i $c_1 \in \mathbb{R}$ queda lliure. Prenent $c_1 = 1$, que és l'opció més simple, obtenim la família de funcions

$$T(t) = T_n(t) = \cos(cnt), \quad n \geq 0.$$

Així doncs, hem obtingut que totes les funcions de variables separades de la família

$$u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t) = \cos(nx) \cos(cnt), \quad n \geq 0$$

són solucions del problema homogeni $(1)_h$. Aquestes funcions reben el nom de *modes normals* i descriuen la forma en què vibra la corda. Concretament, per la linealitat del problema homogeni $(1)_h$, qualsevol vibració de la corda que estem estudiant és una superposició (suma) d'aquests infinits modes normals. En altres paraules, la solució general del problema homogeni $(1)_h$ ve donada, almenys a nivell formal, per la sèrie

$$u(x, t) = \sum_{n \geq 0} a_n u_n(x, t) = \sum_{n \geq 0} a_n \cos(nx) \cos(cnt),$$

on les infinites amplituds $a_0, a_1, a_2, \dots \in \mathbb{R}$ queden, de moment, indeterminades. Per tal de resoldre aquesta indeterminació, recuperem la única condició no homogènia del problema original; és a dir, la que correspon al desplaçament inicial. Imposant que

$$1 - 2 \cos(3x) = f(x) = u(x, 0) = \sum_{n \geq 0} a_n \cos(nx) = a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos(2x) + a_3 \cos(3x) + \dots,$$

obtenim per inspecció directa que $a_0 = 1$, $a_3 = -2$ i totes les altres amplituds són nul·les, i per tant

$$u(x, t) = a_0 u_0(x, t) + a_3 u_3(x, t) = 1 - 2 \cos(3x) \cos(3ct)$$

és una solució del problema original. (En realitat és l'única, però no ho provarem.) Així doncs, en aquest cas la vibració de la corda és la superposició de dos modes normals concrets.

Observació. La solució anterior es pot reescriure en forma de dues ones superposades viatjant en sentits oposats a velocitat c . Efectivament,

$$u(x, t) = 1 - 2 \cos(3x) \cos(3ct) = 1 - \cos(3(x + ct)) - \cos(3(x - ct)) = p(x + ct) + q(x - ct),$$

amb $p(x) = 1/2 - \cos(3x) = q(x)$. (Hem usat la relació $2 \cos a \cos b = \cos(a + b) + \cos(a - b)$.)

Exercici. Llegiu l'entrada sobre ones estacionàries (*standing waves*) a [Wikipedia](#). Vegeu també algun dels molts vídeos sobre aquest mateix tema a [YouTube](#), en els quals es visualitzen experimentalment els primers modes normals de vibració d'una corda.

També podeu veure alguns modes normals de vibració d'una membrana elàstica rectangular al vídeo de títol *Science fun* a [YouTube](#). L'experiment consisteix a abocar sal damunt d'una membrana negra que vibra pel so que emet un altaveu situat a sota, i comprovar que els modes normals canvien amb la freqüència del so.

Exercici. Escriviu les dues EDOs obtingudes en imposar que la funció $u(x, t) = X(x)T(t)$ compleixi l'EDP $u_{tt} = -ku_t + c^2 u_{xx}$, escollint l'opció que proporciona l'EDO més simple possible per a la funció $X(x)$. Aquesta EDP rep el nom d'*equació de la corda vibrant amb fricció*, ja que el terme $-ku_t$ prové d'una força de fricció proporcional (i oposada) a la velocitat.

Desenvolupaments de Fourier. Al darrer pas de l'exemple anterior, hem aconseguit determinar tots els coeficients lliures per inspecció directa. Quan això no sigui possible, utilitzarem les fórmules següents per a calcular desenvolupaments de Fourier.

- El *desenvolupament de Fourier complet* d'una funció $f : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$ és

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} a_n \cos(n\pi x/L) + b_n \sin(n\pi x/L), \quad \begin{cases} a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos(n\pi x/L) dx, \\ b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin(n\pi x/L) dx. \end{cases}$$

- El *desenvolupament de Fourier en cosinus* d'una funció $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ és

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} a_n \cos(n\pi x/L), \quad a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos(n\pi x/L) dx.$$

- El *desenvolupament de Fourier en sinus* d'una funció $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ és

$$f(x) \sim \sum_{n \geq 1} b_n \sin(n\pi x/L), \quad b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin(n\pi x/L) dx.$$

Als dos primers casos, el primer terme $a_0/2$ és la mitjana de la funció $f(x)$.

Es pot provar que aquests desenvolupaments en serie són (absoluta, uniformement) convergents quan la funció $f(x)$ és suficientment regular, si bé aquí treballarem a un nivell purament formal, sense preocupar-nos de la convergència.

Exercici. Sigui $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ la funció definida per $f(x) = 1 - \pi^2 x$. Comproveu, integrant per parts, que els coeficients del seu desenvolupament de Fourier en sinus són

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (1 - \pi^2 x) \sin(nx/2) dx = 4\pi^2 \frac{(-1)^n}{n} + \frac{2}{\pi} \frac{1 - (-1)^n}{n}, \quad n \geq 1.$$

Separació de variables a l'equació de la calor 1D.

Objectiu. En aquest segon exemple del mètode de separació de variables, veurem que en resoldre l'equació de la calor 1D homogènia amb condicions de contorn de tipus Dirichlet *constants*, la temperatura tendeix a l'equilibri tèrmic (en anglès, *steady state*). Homogeneïtzarem les condicions de contorn abans de separar variables mitjançant un canvi de variables "astut".

Problema físic. Tenim una barra de longitud $L > 0$ composta per un material de conductivitat tèrmica κ , densitat ρ i calor específic c . Notem $k^2 = \kappa/c\rho$. La temperatura inicial de la barra ve donada per una funció $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$. Finalment, mantenim constant la temperatura de la barra als dos extrems: $\alpha \in \mathbb{R}$ és la temperatura a l'esquerra i $\beta \in \mathbb{R}$ és la temperatura al dret. A més, suposem que no hi ha fonts de calor internes.

Model matemàtic. Les equacions que modelitzen aquest problema són

$$\begin{cases} u_t = k^2 u_{xx} & x \in (0, L) & t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) & x \in (0, L) \\ u(0, t) = \alpha & & t > 0 \\ u(L, t) = \beta & & t > 0 \end{cases}.$$

Passos del mètode.

- (1) Trobeu unes funcions $v(x)$ i $g(x)$ tals que el canvi de variables $w(x, t) = u(x, t) - v(x)$ transformi el problema original en el problema amb condicions de contorn homogènies

$$(*) \begin{cases} w_t = k^2 w_{xx} & x \in (0, L) & t > 0 \\ w(x, 0) = g(x) & x \in (0, L) \\ w(0, t) = 0 & & t > 0 \\ w(L, t) = 0 & & t > 0 \end{cases}.$$

Expresseu $v(x)$ i $g(x)$ en termes de les quantitats α , β , L i de la funció $f(x)$.

- (2) Imposeu que $w(x, t) = X(x)T(t)$ compleixi la part homogènia del problema (*). Escriviu el PVF associat a la funció $X(x)$ i el problema associat a la funció $T(t)$.
- (3) Resoleu el PVF associat a la funció $X(x)$.
- (4) Tenint en compte els valors propis del PVF anterior, resoleu el problema associat a $T(t)$.
- (5) Calculeu els modes normals (és a dir, les funcions pròpies) de la part homogènia del problema (*).
- (6) Proveu que, a nivell formal, la solució del problema original compleix $\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = v(x)$.
- (7) Interpreteu físicament aquests resultats.

Desenvolupament del mètode.

- (1) En imposar que la funció $w(x, t) = u(x, t) - v(x)$ compleixi l'EDP $w_t = k^2 w_{xx}$ resulta

$$0 = w_t - k^2 w_{xx} = (u_t - k^2 u_{xx}) - (v_t - k^2 v_{xx}) = 0 - k^2 v''(x) \implies v''(x) = 0.$$

En imposar que la funció $w(x, t) = u(x, t) - v(x)$ compleixi les condicions de contorn ens queda

$$\begin{cases} 0 = w(0, t) = u(0, t) - v(0) = \alpha - v(0) & \implies v(0) = \alpha \\ 0 = w(L, t) = u(L, t) - v(L) = \beta - v(L) & \implies v(L) = \beta. \end{cases}$$

L'única funció $v(x)$ tal que $v''(x) = 0$, $v(0) = \alpha$ i $v(L) = \beta$ és $v(x) = \alpha + (\beta - \alpha)x/L$. La gràfica de la funció $v(x)$ és la línia recta que uneix els punts $(0, \alpha)$ i (L, β) .

Finalment, $g(x) = w(x, 0) = u(x, 0) - v(x) = f(x) - \alpha + (\alpha - \beta)x/L$.

- (2) En imposar que la funció $w(x, t) = X(x)T(t)$ compleixi:

- L'equació de la calor $w_t = k^2 w_{xx}$, obtenim la igualtat $X(x)T'(t) = k^2 X''(x)T(t)$, i per tant

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{k^2 T(t)} = \lambda \in \mathbb{R}.$$

- La condició de frontera $w(0, t) = 0$, veiem que $X(0) = 0$.
- La condició de frontera $w(L, t) = 0$, veiem que $X(L) = 0$.

Per tant, obtenim dos problemes separats:

$$(a) \begin{cases} X''(x) = \lambda X(x) \\ X(0) = X(L) = 0 \end{cases} \quad (b) \quad T'(t) = \lambda k^2 T(t).$$

El problema (a) és un PVF amb condicions de tipus Dirichlet associat a la funció $X(x)$.

- (3) Hem vist a la secció anterior que els valors propis i les funcions pròpies del PVF (a) són:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Valors propis:} \quad \lambda = \lambda_n = -n^2 \pi^2 / L^2 \\ \text{Funcions pròpies:} \quad X(x) = X_n(x) = \sin(n\pi x / L) \end{array} \right\} \quad n \geq 1.$$

- (4) Una solució del problema (b) per a $\lambda = \lambda_n = -n^2 \pi^2 / L^2$ és $T(t) = T_n(t) = e^{-n^2 k^2 \pi^2 t / L^2}$, $n \geq 1$.
 (5) Així doncs, els modes normals (les funcions pròpies) de la part homogènia del problema (*) són

$$w_n(x, t) = T_n(t)X_n(x) = e^{-n^2 k^2 \pi^2 t / L^2} \sin(n\pi x / L), \quad n \geq 1.$$

Donat que $X_n(x)$ és una funció fitada i $T_n(t)$ tendeix a zero quan $t \rightarrow \infty$, resulta que $\lim_{t \rightarrow \infty} w_n(x, t) = 0$ per a tota $x \in (0, L)$ i per a tot enter $n \geq 1$.

- (6) La solució final $w(x, t) = \sum_{n \geq 1} b_n w_n(x, t)$ del problema (*) es determina imposant la condició no homogènia

$$g(x) = w(x, 0) = \sum_{n \geq 1} b_n w_n(x, 0) = \sum_{n \geq 1} b_n \sin(n\pi x / L).$$

És a dir, $b_n = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \sin(n\pi x / L) dx$, $n \geq 1$, són els coeficients del desenvolupament de Fourier en sinus de la funció $g(x)$ a l'interval $[0, L]$. Per tant, desfent el canvi de variables, la solució $u(x, t) = v(x) + w(x, t)$ del problema original compleix

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = v(x) + \lim_{t \rightarrow \infty} w(x, t) = v(x) + \sum_{n \geq 1} b_n \lim_{t \rightarrow \infty} w_n(x, t) = v(x).$$

- (7) Hem provat que quan el temps tendeix a infinit, la temperatura tendeix a l'equilibri tèrmic, en el qual la temperatura ve donada per la recta que uneix les temperatures als extrems. Això concorda amb la nostra experiència física, la qual ens diu que el calor tendeix a distribuir-se de la manera més uniforme possible.

Exercici. Practiqueu amb el MIT Mathlet de títol “Heat Equation”, que exemplifica aquest fenomen físic.

Exercici. Proveu que si substituïm les dues condicions tipus Dirichlet constants per dues condicions tipus Neumann homogènies, llavors es compleix que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx.$$

La interpretació física d'aquest resultat és la següent. Les condicions tipus Neumann homogènies equivalen a l'existència d'un aïllament tèrmic perfecte als extrems que evita que la calor escapi o entri, i per tant només pot redistribuir-se internament. Per tant, la temperatura tendeix a un valor constant i aquest valor ha de coincidir amb la mitjana de la temperatura inicial.

Separació de variables a l'equació de Poisson 2D en dominis rectangulars.

Objectiu. En aquest darrer exemple del mètode de separació de variables, resollem una equació de Poisson 2D en un domini rectangular amb condicions de contorn de tipus Dirichlet. Dues de les quatre condicions de contorn són no homogènies. Abans de separar variables, homogeneïtzarem tant l'equació de Poisson (és a dir, la transformarem en una equació de Laplace) com una condició de contorn, mitjançant un canvi de variables.

Problema original. Considerem les equacions

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 2y & x \in (0, \pi) \quad y \in (0, 2\pi) \\ u(x, 0) = 0 & x \in (0, \pi) \\ u(x, 2\pi) = 2\pi x^2 & x \in (0, \pi) \\ u(0, y) = 0 & y \in (0, 2\pi) \\ u(\pi, y) = 1 & y \in (0, 2\pi) \end{cases}$$

Passos del mètode.

- (1) Trobeu unes funcions $v(x, y)$ i $g(y)$ tal que el canvi de variables $w(x, y) = u(x, y) - v(x, y)$ transformi el problema original en el problema

$$(\Delta) \begin{cases} w_{xx} + w_{yy} = 0 & x \in (0, \pi) \quad y \in (0, 2\pi) \\ w(x, 0) = 0 & x \in (0, \pi) \\ w(x, 2\pi) = 0 & x \in (0, \pi) \\ w(0, y) = 0 & y \in (0, 2\pi) \\ w(\pi, y) = g(y) & y \in (0, 2\pi) \end{cases}$$

- (2) Imposau que la funció $w(x, y) = X(x)Y(y)$ compleixi la part homogènia del problema (Δ) . Escriviu el PVF associat a la funció $Y(y)$ i el problema associat a la funció $X(x)$.
 (3) Resoleu el PVF associat a la funció $Y(y)$.
 (4) Tenint en compte els valors propis del PVF anterior, resoldeu el problema associat a $X(x)$.
 (5) Calculeu la solució general de la part homogènia del problema (Δ) .
 (6) Resoleu el problema original.

Desenvolupament del mètode.

- (1) En imposar que la funció $w(x, y) = u(x, y) - v(x, y)$ compleixi l'equació $w_{xx} + w_{yy} = 0$ resulta

$$0 = w_{xx} + w_{yy} = (u_{xx} + u_{yy}) - (v_{xx} + v_{yy}) = 2y - (v_{xx} + v_{yy}) \implies v_{xx} + v_{yy} = 2y.$$

En imposar que la funció $w(x, y) = u(x, y) - v(x, y)$ compleixi les condicions de contorn corresponents als costats inferior, superior i esquerre ens queda

$$\begin{cases} 0 = w(0, y) = u(0, y) - v(0, y) = 0 - v(0, y) & \implies v(0, y) = 0 \\ 0 = w(x, 0) = u(x, 0) - v(x, 0) = 0 - v(x, 0) & \implies v(x, 0) = 0 \\ 0 = w(x, 2\pi) = u(x, 2\pi) - v(x, 2\pi) = 2\pi x^2 - v(x, 2\pi) & \implies v(x, 2\pi) = 2\pi x^2 \end{cases}$$

Necessitem una funció $v(x, y)$ que compleixi aquestes quatre condicions. Per tal de simplificar els càlculs, busquem aquesta funció en forma de variables separades: $v(x, y) = \tilde{X}(x)\tilde{Y}(y)$. Aleshores, les quatre condicions anteriors equivalen a

$$\tilde{X}''(x)\tilde{Y}(y) + \tilde{X}(x)\tilde{Y}''(y) = 2y, \quad \tilde{X}(0) = 0, \quad \tilde{Y}(0) = 0, \quad \tilde{X}(x)\tilde{Y}(2\pi) = 2\pi x^2.$$

Una possible solució és prendre $\tilde{X}(x) = x^2$ i $\tilde{Y}(y) = y$. És a dir, $v(x, y) = x^2 y$, i per tant

$$g(y) = w(\pi, y) = u(\pi, y) - v(\pi, y) = 1 - \pi^2 y.$$

- (2) En imposar que la funció $w(x, y) = X(x)Y(y)$ compleixi:

- L'equació de Laplace $w_{xx} + w_{yy} = 0$ obtenim $X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0$, i per tant

$$-\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda \in \mathbb{R}.$$

- La condició de contorn $w(0, y) = 0$, obtenim $X(0) = 0$.
- La condició de contorn $w(x, 0) = 0$, obtenim $Y(0) = 0$.
- La condició de contorn $w(x, 2\pi) = 0$, obtenim $Y(2\pi) = 0$.

Per tant, obtenim dos problemes separats:

$$(a) \begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = 0 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} Y''(y) = \lambda Y(y) \\ Y(0) = 0 = Y(2\pi) \end{cases}.$$

El problema (b) és un PVF amb condicions de tipus Dirichlet associat a la funció $Y(y)$.

- (3) Ja hem vist que els valors propis i les funcions pròpies del PVF (b) són:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Valors propis: } \lambda = \lambda_n = -n^2/4 \\ \text{Funcions pròpies: } Y(y) = Y_n(y) = \sin(ny/2) \end{array} \right\} \quad n \geq 1.$$

- (4) L'EDO $X''(x) + \lambda_n X(x) = 0$ és lineal, homogènia i a coeficients constants. El seu polinomi característic és $P(m) = m^2 + \lambda_n$ i les seves arrels són $m_{1,2} = \pm \sqrt{-\lambda_n} = \pm n/2$. Per tant, la solució general d'aquesta equació és

$$X(x) = c_1 e^{nx/2} + c_2 e^{-nx/2}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

En imposar la condició addicional $0 = X(0) = c_1 + c_2$ obtenim $c_2 = -c_1$, i per tant

$$X(x) = c_1 (e^{nx/2} - e^{-nx/2}), \quad c_1 \in \mathbb{R}.$$

Prenent $c_1 = 1/2$, obtenim la família de funcions

$$X_n(x) = \frac{e^{nx/2} - e^{-nx/2}}{2} = \sinh(nx/2), \quad n \geq 1.$$

- (5) Així doncs, els modes normals (les funcions pròpies) de la part homogènia del problema (Δ) són

$$w_n(x, y) = X_n(x)Y_n(y) = \sinh(nx/2) \sin(ny/2), \quad n \geq 1.$$

En particular, resulta que, per linealitat, totes les sèries de la forma

$$w(x, y) = \sum_{n \geq 1} \beta_n w_n(x, y) = \sum_{n \geq 1} \beta_n \sinh(nx/2) \sin(ny/2)$$

són solucions formals de la part homogènia del problema (Δ).

- (6) En el pas anterior els coeficients β_n havien quedat lliures, però ara els determinem —per obtenir d'aquesta manera la solució final del problema (Δ)— imposant l'única condició no homogènia del problema; que és la condició de contorn al costat dret del rectangle:

$$g(y) = w(\pi, y) = \sum_{n \geq 1} \beta_n w_n(\pi, y) = \sum_{n \geq 1} \beta_n \sinh(n\pi/2) \sin(ny/2) = \sum_{n \geq 1} b_n \sin(ny/2)$$

on hem denotat $b_n = \beta_n \sinh(n\pi/2)$. A la secció sobre desenvolupaments de Fourier hem vist que

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (1 - \pi^2 y) \sin(ny/2) dy = 4\pi^2 \frac{(-1)^n}{n} + \frac{2}{\pi} \frac{1 - (-1)^n}{n}, \quad n \geq 1$$

són els coeficients de Fourier del desenvolupament en sinus de la funció $g(y) = 1 - \pi^2 y$ a l'interval $[0, 2\pi]$.

I desfent el canvi de variables $w(x, y) = u(x, y) - v(x, y)$, la solució final és

$$u(x, y) = v(x, y) + w(x, y) = x^2 y + \sum_{n \geq 1} \frac{b_n}{\sinh(n\pi/2)} \sinh(nx/2) \sin(ny/2).$$