

Anàlogament, podem deduir la sèrie del cosinus a partir de la sèrie del sinus, utilitzant que les sèries de potències poden derivar-se terme a terme allà on són absolutament convergents:

$$\cos x = (\sin x)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Observació. La convergència de les sèries del logaritme i de l'arc tangent en els extrems $x = \pm 1$ es va estudiar en els exemples 29 i 30.

Exemple 33. Avaluant la igualtat $\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} x^n/n$ en el punt $x = -1$, que ja sabem que pertany a l'interval de convergència, s'obté que $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = \ln 2$.

Exercici. Proveu que $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} = \pi/4$ i $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)3^n} = \sqrt{3}\pi/6$.

SÈRIES DE FOURIER

És ben conegut que, fixat $T > 0$, les següents funcions trigonomètriques

$$(1) \quad 1, \sin \frac{\pi x}{T}, \cos \frac{\pi x}{T}, \sin \frac{2\pi x}{T}, \cos \frac{2\pi x}{T}, \dots$$

són periòdiques de període $2T$. En particular, això implica que n'hi ha prou a estudiar-les a l'interval $[-T, T]$ per, a partir d'aquí, estendre els resultats, de forma periòdica, a tot $\mathbb{R}$.

Aleshores, hom podria preguntar-se: donada una funció $2T$ -periòdica, es pot expressar com a combinació - finita o infinita - de sinus i cosinus dels indicats a (1)? Per a respondre a aquesta pregunta ens centrarem en el cas de funcions $2T$ -periòdiques contínues a trossos, amb discontinuïtats només de salt o evitables, i que denotarem per $CT[-T, T]$.

Definició. Donada una funció $f \in CT[-T, T]$, es defineix la seva **sèrie de Fourier** com la sèrie

$$\mathcal{F}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{T} + b_n \sin \frac{n\pi x}{T} \right)$$

on els coeficients $(a_n)_{n \geq 0}$ i $(b_n)_{n > 0}$ venen determinats per les integrals

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{T} \int_{-T}^T f(x) \cos \frac{n\pi x}{T} dx, & n \geq 0, \\ b_n &= \frac{1}{T} \int_{-T}^T f(x) \sin \frac{n\pi x}{T} dx, & n \geq 1. \end{aligned}$$

Observeu que el terme

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(x) dx,$$

és justament el promig de la funció f a $[-T, T]$. Veieu la pàgina de Wikipedia dedicada a les sèries de Fourier per saber més coses sobre ella.

Una aproximació finita de la sèrie de Fourier de f s'obté sumant fins al terme N -èsim, és a dir,

$$\mathcal{F}_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{T} + b_n \sin \frac{n\pi x}{T} \right)$$

Aquesta aproximació s'anomena *suma parcial N -èsima*. Fins ara, la sèrie de Fourier d'una funció $f \in CT[-T, T]$ és una sèrie *formal* associada a ella. Més endavant indicarem quan realment constitueix una veritable aproximació de la funció f i sota quines condicions.

Sèries de Fourier de funcions parells i senars. Si la funció $f \in CT[-T, T]$ té simetria parell o senar, aquest fet simplifica els coeficients de la seva sèrie de Fourier. En efecte:

- Si $f \in CT[-T, T]$ és parell, aleshores $b_n = 0, n > 0$ i

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) dx, \quad a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos \frac{n\pi x}{T} dx, \quad n \geq 1$$

- Si $f \in CT[-T, T]$ és senar, aleshores $a_n = 0, n \geq 0$ i

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin \frac{n\pi x}{T} dx, \quad n \geq 1.$$

Exemple: ona quadrada. Les sèries de Fourier són molt utilitzades a banda de la Matemàtica, a moltes disciplines com, per exemple, l'Electrònica. En particular, una de les funcions a les quals s'aplica és l'anomenada *ona quadrada*, definida de manera periòdica com

$$(2) \quad \mathcal{U}(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \in [-T, 0) \\ 1 & \text{si } x \in [0, T]. \end{cases}$$

Si calculem els coeficients de la seva sèrie de Fourier tenim

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T}^T \mathcal{U}(x) dx = 0,$$

$$a_n = \frac{1}{T} \int_{-T}^T \mathcal{U}(x) \cos \frac{n\pi x}{T} dx = 0, \quad \text{perquè és senar i l'interval és simètric respecte de l'origen,}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{T} \int_{-T}^T \mathcal{U}(x) \sin \frac{2\pi x}{T} dx = \frac{2}{T} \int_0^T \sin \frac{n\pi x}{T} dx = -\frac{2}{T} \left(\frac{T}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{T} \right) \Big|_0^T \\ &= -\frac{2}{n\pi} (\cos n\pi - \cos 0) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ és parell,} \\ \frac{4}{n\pi} & \text{si } n \text{ és senar.} \end{cases} \end{aligned}$$

Aleshores, la sèrie de Fourier de $\mathcal{U}$ en $[-T, T]$ és

$$(3) \quad \mathcal{F}_{\mathcal{U}}(x) = \sum_{n \geq 1, \text{senar}} \frac{4}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{T} = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)} \sin \frac{(2k+1)\pi x}{T}.$$

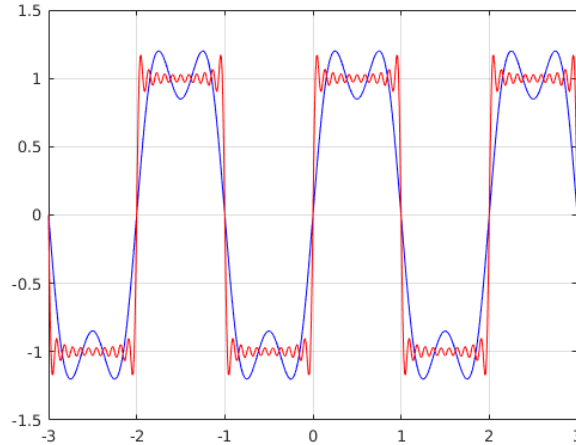


FIGURE 4. Gràfiques de les aproximacions finites de Fourier de l'ona quadrada (2): en blau per a $N = 3$ i en vermell per a $N = 21$.

Convergència de la sèrie de Fourier. Fins ara la sèrie de Fourier l'hem considerada només de manera *formal*, és a dir, no ens preguntat si en avaluar-la a un punt x_0 concret s'obté una sèrie numèrica convergent o no.

El següent Teorema mostra la relació, per a x_0 fixat, entre el valor $f(x_0)$ per a una funció $f \in CT[-T, T]$ prou regular i el valor de la sèrie numèrica $\mathcal{F}(x_0)$, obtinguda en avaluar la sèrie de Fourier associada a f al punt x_0 .

Teorema (Dirichlet). *Suposem que tant f com f' són de classe $CT[-T, T]$. Sigui*

$$\mathcal{F}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{+\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{T} + b_n \sin \frac{n\pi x}{T} \right)$$

la seva sèrie de Fourier associada. Considereu f estesa de manera periòdica a tot $\mathbb{R}$. Aleshores:

(1) *Si x_c és un punt de continuïtat de f , es verifica que*

$$\mathcal{F}(x_c) = f(x_c)$$

(2) *Si x_d és un punt de discontinuïtat de f , es verifica*

$$\mathcal{F}(x_d) = \frac{1}{2} (f(x_d^+) + f(x_d^-))$$

on $f(x_d^+)$ i $f(x_d^-)$ són els límits per la dreta i per l'esquerra de f en x_d , respectivament.

Exemple 34 (Ona quadrada (continuació)). Per exemple, si avaluem la sèrie de Fourier de l'ona quadrada (3) als punts $x_0 = -1/2, 0$ i $1/2$ s'obté:

$$\mathcal{F}_U(1/2) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2k+1} \sin(2k+1) \frac{\pi}{2} = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = 1,$$

$$\mathcal{F}_U(1/2) = 0,$$

$$\mathcal{F}_U(-1/2) = -\mathcal{F}_U(1/2) = -1.$$

Observeu que als punts $x_c = 1/2, -1/2$, on la funció $\mathcal{U}$ és contínua, s'obté

$$\mathcal{F}_U(1/2) = \mathcal{U}(1/2), \quad \mathcal{F}_U(-1/2) = \mathcal{U}(-1/2),$$

mentre, en canvi, a $x_d = 0$, on hi té una discontinuïtat,

$$\mathcal{F}_U(0) = \frac{\mathcal{U}(0^+) + \mathcal{U}(0^-)}{2} = \frac{-1 + 1}{2} = 0,$$

el punt mig del salt en aquest punt.

Exemple 35. (a) Trobeu la sèrie de Fourier de la funció $f(x) = x + \pi$ a l'interval $-\pi < x < \pi$.

(b) Useu (a) per demostrar que

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

(a) Calculem primer els coeficients del desenvolupament.

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (x + \pi) dx = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} x dx + \pi \int_{-\pi}^{\pi} 1 dx \right) = 2\pi,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos nx dx + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \pi \cos nx dx = 0,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{x}{n} (-\cos nx) =$$

$$\frac{2}{\pi} \left[-\frac{x}{n} \cos nx \right]_0^{\pi} + \frac{2}{n\pi} \int_0^{\pi} \cos nx dx = \frac{2}{n} (-1)^{n+1},$$

per $n = 1, 2, 3, \dots$ on s'ha tingut en compte que x i $x \cos nx$ són funcions senars i per tant,

$$\int_{-\pi}^{\pi} x \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} x \cos nx \, dx = 0.$$

El desenvolupament de Fourier de la funció $f(x)$ resulta doncs:

$$\mathcal{F}(x) = \pi + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx.$$

Aplicant el teorema de Dirichlet tenim d'una banda:

$$(4) \quad \mathcal{F}(x) = x + \pi,$$

per tot $-\pi < x < \pi$ on hi ha continuïtat, mentre que en $x = \pi$:

$$\mathcal{F}(\pi) = \mathcal{F}(-\pi) = \frac{f(-\pi^+) + f(\pi^-)}{2} = \frac{1}{2}(0 + 2\pi) = \pi.$$

(b) $x = -\pi/2$ és un punt de continuïtat de la funció $f(x) = x + \pi$ a l'interval $-\pi < x < \pi$. Aleshores, segons (4) és $\mathcal{F}(-\pi/2) = -\pi/2 + \pi = \pi/2$. Per tant, substituint a (4):

$$\mathcal{F}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin \frac{n\pi}{2} = \pi + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \sin \frac{(2k-1)\pi}{2} = \pi + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} = \frac{\pi}{2}$$

on hem usat que $\sin \frac{n\pi}{2} = 0$ si n parell i que si $n = 2k - 1$ és senar llavors

$$\sin \frac{n\pi}{2} = \sin \frac{(2k-1)\pi}{2} = (-1)^{k+1}$$

Per tant

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

Algunes primitives útils. Les següents primitives poden ser útils per al càlcul de sèries de Fourier.

- Multiplicant per la funció x , per a $n \geq 1$

$$\begin{aligned} \int x \cos \frac{n\pi x}{T} \, dx &= \frac{1}{\pi^2 n^2} \left(\pi T n x \sin \left(\frac{\pi n x}{T} \right) + T^2 \cos \left(\frac{\pi n x}{T} \right) \right) + C, \\ \int x \sin \frac{n\pi x}{T} \, dx &= -\frac{1}{\pi^2 n^2} \left(\pi T n x \cos \left(\frac{\pi n x}{T} \right) - T^2 \sin \left(\frac{\pi n x}{T} \right) \right) + C. \end{aligned}$$

- Multiplicant per la funció x^2 , per a $n \geq 1$:

$$\int x^2 \cos \frac{n\pi x}{T} \, dx = \frac{1}{\pi^3 n^3} \left(\pi^2 T n^2 x^2 \sin \left(\frac{\pi n x}{T} \right) + 2 \pi T^2 n x \cos \left(\frac{\pi n x}{T} \right) - 2 T^3 \sin \left(\frac{\pi n x}{T} \right) \right) + C$$

mentre que per al sinus, tenim

$$\int x^2 \sin \frac{n\pi x}{T} \, dx = -\frac{1}{\pi^3 n^3} \left(\pi^2 T n^2 x^2 \cos \left(\frac{\pi n x}{T} \right) - 2 \pi T^2 n x \sin \left(\frac{\pi n x}{T} \right) - 2 T^3 \cos \left(\frac{\pi n x}{T} \right) \right) + C.$$

Aquestes integrals es simplifiquen si $\pi = T$:

$$\int x \cos nx \, dx = \frac{nx \sin(nx) + \cos(nx)}{n^2} + C, \quad \int x \sin nx \, dx = -\frac{nx \cos(nx) - \sin(nx)}{n^2} + C,$$

$$\int x^2 \cos nx \, dx = \frac{2nx \cos(nx) + (n^2 x^2 - 2) \sin(nx)}{n^3} + C,$$

$$\int x^2 \sin nx \, dx = \frac{2nx \sin(nx) - (n^2 x^2 - 2) \cos(nx)}{n^3} + C.$$

Integració i derivació de sèries de Fourier. Suposem que tant f com f' són $CT[-T, T]$ i sigui

$$\mathcal{F}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{T} + b_n \sin \frac{n\pi x}{T} \right)$$

la sèrie de Fourier associada a f . Aleshores:

- La integral de f en un interval $[\alpha, \beta] \subset [-T, T]$ es pot obtenir 'integrant terme a terme'

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \frac{a_0(\beta - \alpha)}{2} + \sum_{n \geq 1} \frac{T}{n\pi} \left[a_n \sin \frac{n\pi x}{T} - b_n \cos \frac{n\pi x}{T} \right]_{\alpha}^{\beta}$$

- En particular, la funció integral es pot calcular integrant la sèrie de Fourier 'terme a terme': si $x \in [-T, T]$:

$$\int_0^x f(x) dx = \frac{a_0}{2} x + \sum_{n \geq 1} \frac{T}{n\pi} \left(a_n \sin \frac{n\pi x}{T} - b_n \cos \frac{n\pi x}{T} + b_n \right)$$

La part dreta no és $2T$ -periòdica llevat que $a_0 = 0$ (noteu que $a_0 x/2$ no és periòdic si $a_0 \neq 0$).

- Si, a més, $f \in C^1[-T, T]$, aleshores la sèrie de Fourier de f' pot obtenir-se derivant 'terme a terme':

$$\mathcal{F}_{f'}(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{n\pi}{T} \left(-a_n \sin \frac{n\pi x}{T} + b_n \cos \frac{n\pi x}{T} \right)$$