

Separacion de variables en la EDP de ondas 1D

Caso 1. Condiciones de Neumann homogéneas:

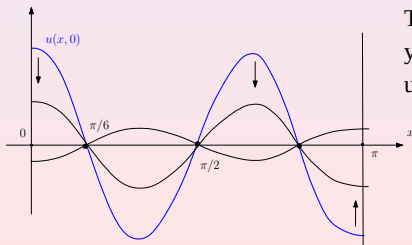
$$\begin{aligned}u_{tt} &= c^2 u_{xx}, \quad x \in [0, L], \quad \boxed{L = \pi} \\u(x, 0) &= f(x), \quad u_t(x, 0) = 0 \quad \leftarrow \text{cond. iniciales} \\u_x(0, t) &= u_x(\pi, t) = 0 \quad \leftarrow \text{cond.frontera (Neumann)}\end{aligned}$$

Soluciones básicas (*modos normales/ standing waves*):

$$u_n(x, t) = X_n(x) T_n(t) = \cos(nx) \cos(cnt), \quad x \in [0, \pi], \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Todos cumplen a las condiciones de frontera. $u_x(0, t) = u_x(\pi, t) = 0$.

Ejemplo: $n = 3, t \in \mathbb{R}$:



También cumplen a la EDP
y a la condición inicial
 $u_t(x, 0) = 0$

Pero no cumplen a la
condición $u(x, 0) = f(x)$!

Solución general: suma de todos los modos normales:

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(nx) \cos(cnt), \quad x \in [0, \pi],$$

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(nx) = \{\text{una serie de Fourier}\} \\ &= a_0 + a_1 \cos(x) + a_2 \cos(2x) + \dots = f(x) \leftarrow \text{perfil inicial} \end{aligned}$$

Ejemplo: $f(x) = 1 - 2 \cos(3x)$. Entonces,

$$a_0 = 1, \quad a_1 = a_2 = 0, \quad a_3 = -2, \quad a_4 = a_5 = \dots = 0, \quad y$$

$$u(x, t) = 1 - 2 \cos(3x) \cos(3ct).$$

Si $f(x)$ es *general* (pero $f'(0) = f'(\pi) = 0$), entonces

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(nx), \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx) dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Si $L \neq \pi \Rightarrow \{x \rightarrow x\pi/L, \quad t \rightarrow t\pi/L\}$:

$$u(x, t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\pi x/L) \cos(c n\pi t/L), \quad x \in [0, L],$$

$$u(x, 0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\pi x/L) = f(x) \quad a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos(n\pi x/L) dx$$

Separacion de variables en la EDP de ondas 1D.

Caso 2. Condiciones de Dirichlet homogéneas:

$$\begin{aligned}u_{tt} &= c^2 u_{xx}, & x \in [0, L], & \quad L = \pi, \\u(x, 0) &= f(x), & u_t(x, 0) &= 0 \quad \leftarrow \text{cond. iniciales} \\u(0, t) &= u(\pi, t) = 0 \quad \leftarrow \text{cond. frontera (Dirichlet)}\end{aligned}$$

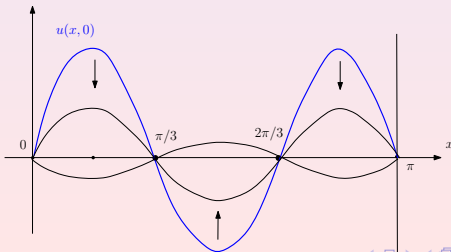
Soluciones básicas (modos normales):

$$u_n(x, t) = X_n(x) T_n(t) = \sin(nx) \cos(cnt), \quad x \in [0, \pi], \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Todos cumplen a las condiciones de frontera (Dirichlet)

$$u(x=0, t) = u(x=\pi, t) = 0.$$

Ejemplo: $n = 3, t \in \mathbb{R}$: ondas estacionarias:



Solución general: suma de todos los modos normales:

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sin(nx) \cos(cnt), \quad x \in [0, \pi],$$

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sin(nx) = \{\text{la serie de Fourier}\} \\ &= b_1 \sin(x) + b_2 \sin(2x) + \dots = f(x) \quad \leftarrow \text{perfil inicial} \end{aligned}$$

Ejemplo: $f(x) = \sin^3(x) = \frac{1}{4} (3 \sin x - \sin(3x))$. Entonces, la solución de la EDP con dichas condiciones:

$$u(x, t) = \frac{3}{4} \sin x \cos(ct) - \frac{1}{4} \sin(3x) \cos(3ct).$$

Si $f(x)$ es *general* (pero $f(0) = f(\pi)$), entonces

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx), \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx), \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

Ejemplo: $f(x) = -x^2 + x\pi$. Observamos que $f(0) = f(\pi) = 0$.

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (-x^2 + x\pi) \sin(nx) dx = -4 \frac{\cos \pi n - 1}{\pi n^3} = \begin{cases} 0, & n = 2, 4, \dots \\ \frac{8}{\pi n^3}, & n = 1, 3, 5, \dots \end{cases}$$

Entonces, en $[0, \pi]$:

$$f(x) = -x^2 + x\pi = \frac{8}{\pi} \left(\sin(x) + \frac{\sin(3x)}{3^3} + \frac{\sin(5x)}{5^3} + \frac{\sin(7x)}{7^3} + \dots \right).$$

Si $f(x)$, $x \in [0, L]$, $f(0) = f(L) = 0$ (cond. Dirichlet), entonces

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \left(nx \frac{\pi}{L} \right), \quad b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \left(nx \frac{\pi}{L} \right) dx$$

Separacion de variables en la EDP de calor 1D.

Condiciones de Dirichlet **homogéneas**:

$$\begin{aligned}u_t &= k^2 u_{xx}, \quad x \in [0, L], \\u(x, 0) &= f(x), \quad \leftarrow \text{cond. inicial} \\u(0, t) &= u(L, t) \equiv 0 \quad \leftarrow \text{cond. frontera (Dirichlet)}\end{aligned}$$

Buscamos la solución en forma $u(x, t) = X(x) T(t)$.

Soluciones básicas (modos normales):

$$u_n(x, t) = T_n(t) X_n(x) = e^{-n^2 \pi^2 k^2 t / L^2} \sin(n\pi x / L), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Todos cumplen a las condiciones de frontera $u(0, t) = u(L, t) = 0$,

y $\lim_{t \rightarrow \infty} u_n(x, t) = 0$ para toda $x \in (0, L)$.

Solución general: Combinación lineal de todas tales soluciones:

$$\begin{aligned}u(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n u_n(x, t) = b_1 e^{-\pi^2 k^2 t / L^2} \sin(\pi x / L) + b_2 e^{-4\pi^2 k^2 t / L^2} \sin(2\pi x / L) + \\u(x, 0) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi x / L) = \{\text{la serie de Fourier}\} \\&= b_1 \sin(\pi x / L) + b_2 \sin(2\pi x / L) + \dots = f(x)\end{aligned}$$

Determinamos los b_n
usando la formula en la
página anterior.

Si las condiciones de Dirichlet no son homogéneas:

$$\begin{aligned}u_t &= k^2 u_{xx}, \quad x \in [0, L], \\u(x, 0) &= f(x), \\u(0, t) &\equiv a, \quad u(L, t) \equiv b, \quad a, b \neq 0, = \text{const.}\end{aligned}$$

se puede homogenizar el PVF poniendo

$$u(x, t) = v(x, t) + w(x),$$

de manera que w es función *lineal* y $w(0) = a, w(L) = b$. Por tanto $w(x) = a + (b - a)x/L$.

Puesto que $w(x)$ es lineal en x y no depende de t , esa función cumpla a la EDP $w_t = k^2 w_{xx}$, tal como a las condiciones de frontera.

Luego, para $v(x, t) = u - w$ tenemos el PVF ya *homogéneo*:

$$\begin{aligned}v_t &= k^2 v_{xx}, \quad x \in [0, L], \\v(x, 0) &= f(x) - w(x) \equiv f(x) - [a + (b - a)x/L], \leftarrow \text{función ya conocida} \\v(0, t) &= v(L, t) \equiv 0\end{aligned}$$

y para resolverlo aplicamos el método conocido de separación de variables.

Separacion de variables en la EDP de calor 1D

Condiciones de Neumann **homogéneas**:

$$\begin{aligned}u_t &= k^2 u_{xx}, \quad x \in [0, L], \\u(x, 0) &= f(x) \quad \leftarrow \text{cond. inicial} \\u_x(0, t) &= u_x(L, t) \equiv 0 \quad \leftarrow \text{cond. frontera (Neumann)}\end{aligned}$$

Se trata del caso de *aislamiento térmico* en las fronteras $x = 0, x = L$.

Buscamos la solución en forma $u(x, t) = X(x) T(t)$.

Soluciones básicas (todas cumplan a las condiciones de frontera):

$$u_n(x, t) = T_n(t) X_n(x) = e^{-n^2 \pi^2 k^2 t / L^2} \cos(n\pi x / L), \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Solución general:

$$u(x, t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n(x, t) = \frac{a_0}{2} + a_1 e^{-\pi^2 k^2 t / L^2} \cos(\pi x / L) + \dots, \quad x \in [0, L]$$

$$u(x, 0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\pi x / L) = \{\text{la serie de Fourier}\} = f(x)$$

Observamos que si $f(x) \neq 0$, entonces $a_0 \neq 0$ y la solución $u(x, t)$ NO tiende a zero cuando $t \rightarrow \infty$: $\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) \equiv a_0/2$.

Se preserva el calor total $\int_0^L u(x, t) dx = L a_0/2 = \text{const.}$ 