

# Càlcul II

## Transformada de Laplace

Basat en els apunts de l'assignatura per Jaume Haro

Tardor 2016

## La transformada de Laplace



Figura : Pierre-Simon Laplace (1749-1827)

## Definició de la transformada

- ▶ Suposem una funció contínua  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f = f(t)$
- ▶ S'anomena la seva transformada de Laplace (o  $\mathcal{L}$ -transformada) a la funció  $\mathcal{L}[f]$  (també s'escriu  $\mathcal{L}[f(t)]$ ) definida per la següent integral impròpia en funció del paràmetre  $s$ :

$$\mathcal{L}[f(t)](s) \equiv F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt$$

sempre que la integral sigui convergent per algun valor del paràmetre  $s$ . Altrament direm que la  $\mathcal{L}$ -transformada no existeix.

- ▶ El domini de definició de  $\mathcal{L}[f]$  és el conjunt de valors  $s \in \mathbb{R}$  per als quals aquesta integral convergeix.

## Primer exemple I

- ▶ El cas més senzill  $f(t) = 1$ , per a  $s > 0$

$$\mathcal{L}[1](s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} dt = \left[ \frac{-e^{-st}}{s} \right]_{t=0}^{t=+\infty} = \frac{1}{s}$$

mentre que la integral és divergent per a valors  $s \leq 0$ .

- ▶ L'exponencial  $f(t) = e^t$ , per definició

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[e^t](s) &= \int_0^{+\infty} e^{-st} e^t dt = \\ &= \int_0^{+\infty} e^{(1-s)t} dt \left[ \frac{e^{(1-s)t}}{1-s} \right]_{t=0}^{t=+\infty} = \frac{-1}{1-s} = \frac{1}{s-1} \end{aligned}$$

sempre que  $s > 1$ . Altrament, la integral divergeix.

## Primer exemple II

- ▶ Tots dos casos es poden posar en un mateix cas (el que apareix a les taules de transformades). En efecte, si  $a \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[e^{at}](s) &= \int_0^{+\infty} e^{-st} e^{at} dt = \\ &= \int_0^{+\infty} e^{(a-s)t} dt \left[ \frac{e^{(a-s)t}}{a-s} \right]_{t=0}^{t=+\infty} = \frac{-1}{a-s} = \frac{1}{s-a}\end{aligned}$$

## Algunes transformades bàsiques

- ▶ La transformada de  $t^p$  per qualsevol  $p \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{L}[t^p](s) = \frac{p!}{s^{p+1}}, \quad s > 0$$

- ▶ Transformades de les funcions trigonomètriques, per qualsevol  $b \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{L}[\sin bt](s) = \frac{b}{s^2 + b^2}, \quad \mathcal{L}[\cos bt](s) = \frac{s}{s^2 + b^2}, \quad s > 0$$

## Propietats de la transformada de Laplace I

► **La transformació de Laplace és lineal**

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f(t) + g(t)] &= \mathcal{L}[f(t)] + \mathcal{L}[g(t)] \\ \mathcal{L}[\lambda f(t)] &= \lambda \mathcal{L}[f(t)], \quad \lambda \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

sempre i quan les transformades estiguin definides.

► **Aplicació a les funcions hiperbòliques.** Recordem que

$$\cosh(bt) = \frac{e^{bt} + e^{-bt}}{2}, \quad \sinh(bt) = \frac{e^{bt} - e^{-bt}}{2}$$

i

$$\mathcal{L}[e^{bt}] = \frac{1}{s - b}, \quad \mathcal{L}[e^{-bt}] = \frac{1}{s + b}, \quad s > 0$$

## Propietats de la transformada de Laplace II

$$\mathcal{L}[\cosh(bt)] = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{s-b} + \frac{1}{s+b} \right) = \frac{s}{s^2 - b^2}, \quad s > 0$$

$$\mathcal{L}[\sinh(bt)] = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{s-b} - \frac{1}{s+b} \right) = \frac{b}{s^2 - b^2}, \quad s > 0$$

- **Canvis d'escala.** Per mitjà del canvi de variable, per tot  $a > 0$ ,

$$\mathcal{L}[f(at)] = \frac{1}{a} \mathcal{L}[f(t)] \left( \frac{s}{a} \right)$$

## Propietats de la transformada de Laplace III

- ▶ Per exemple, comprovem que es compleix per a  $f(t) = e^t$ :

$$\mathcal{L}[e^{at}] = \frac{1}{s - a}$$
$$\frac{1}{a} \mathcal{L}[e^t] \left( \frac{s}{a} \right) = \frac{1}{a} \frac{1}{\frac{s}{a} - 1}$$

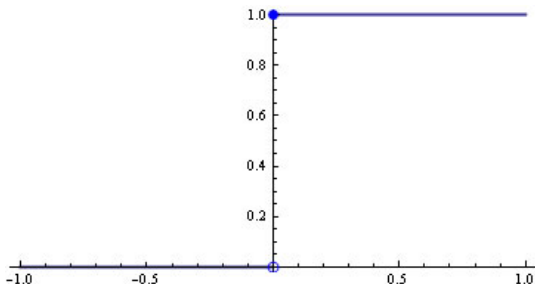
- ▶ **Teoremes de translació (I)** De nou, per canvis de variable:

$$\mathcal{L}[e^{at} f(t)] = \mathcal{L}[f](s + a), \quad a \in \mathbb{R}.$$

## Propietats de la transformada de Laplace IV

- ▶ Per poder considerar la translació dins de la transformada, convé que usem la **funció esgraó unitari en  $a$** ,  $\mathcal{U}(t - a)$  on  $\mathcal{U}(t)$  queda definida per

$$\mathcal{U}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq 0, \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}, \quad \mathcal{U}(t - a) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq a, \\ 0 & \text{si } t < a \end{cases},$$



## Propietats de la transformada de Laplace V

### ► Teoremes de translació (II):

$$\mathcal{L}[f(t-a)\mathcal{U}(t-a)] = e^{-as}\mathcal{L}[f(t)](s), \quad a > 0$$

- **Transformades de derivades.** Operant per parts, si  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  és  $k$  cops derivable, aleshores,

$$\mathcal{L}[D^k f](s) = s^k \mathcal{L}[f](s) - s^{k-1}f(0) - s^{k-2}f'(0) - \dots - D^{k-1}f(0),$$

on  $D^j$  representa la derivada  $j$ -èsima.

- Per exemple, prenent  $f(t) = \sin bt$ , com que  $f'(t) = b \cos bt$ ,

$$\mathcal{L}[b \cos bt](s) = s\mathcal{L}[\sin bt](s) - b,$$

$$\mathcal{L}[-b^2 \sin bt](s) = s^2\mathcal{L}[\sin bt](s) - b$$

i d'aquí deduir el valor de la transformada del sinus.

## Propietats de la transformada de Laplace VI

- ▶ **Transformades d'integrals.** Com a resultat del teorema fonamental del càlcul,

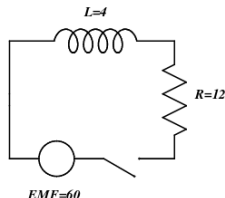
$$\mathcal{L} \left[ \int_0^t f(\tau) d\tau \right] = \frac{\mathcal{L}[f(t)]}{s}.$$

- ▶ Tot això ve motivat per la solució d'equacions diferencials, en particular, en la resolució de les equacions que apareixen en circuits electrònics.

## Aplicació a les equacions diferencials I

Suposem el següent problema per a la intensitat en un cert instant  $t$  d'un circuit format per una pila DC de 60 volts DC, un inductor de 4H i una resistència de  $12\Omega$ :

$$4i'(t) + 12i(t) = 60, \quad i(0) = 0$$



## Aplicació a les equacions diferencials II

Podem calcular la transformada de Laplace de cada terme:

$$\mathcal{L}[4i'(t)](s) = 4\mathcal{L}[i'(t)](s) = 4(s\mathcal{L}[i(t)]) = 4sI(s)$$

$$\mathcal{L}[12i(t)](s) = 12\mathcal{L}[i(t)](s) = 12I(s)$$

$$\mathcal{L}[60](s) = 60/s$$

on  $I(s) = \mathcal{L}[i(t)](s)$  és la transformada de Laplace. L'equació diferencial d'abans es converteix en una equació polinomial en  $I(s)$

$$4sI(s) + 12I(s) = \frac{60}{s} \Rightarrow I(s) = \frac{60}{s(12 + 4s)}$$

Si som capaços de trobar l'antitransformada, aleshores ja haurem trobat la forma del corrent. Concretament, veurem que

$$i(t) = -5e^{-3t} + 5.$$

## Aplicació a les equacions diferencials III

En efecte, fent la descomposició en fraccions simples,

$$\frac{60}{s(12 + 4s)} = -\frac{5}{s + 3} + \frac{5}{s}$$

i clarament,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[-5 e^{(-3t)}](s) &= -\frac{5}{s + 3} \\ \mathcal{L}[5](s) &= \frac{5}{s}\end{aligned}$$

d'on obtenim la solució de l'EDO.

## Més propietats de la $\mathcal{L}$ -transformada I

- ▶ **Producte i divisió per un monomi** Derivant sota el signe d'integral

$$\mathcal{L}[t^p f(t)] = (-1)^p D^p \mathcal{L}[f(t)]$$

- ▶ Aplicació (teòrica). Si existeix  $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t)/t = L$ , aleshores,

$$\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int_s^{+\infty} F(\sigma) d\sigma, \quad F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$$

## Més propietats de la $\mathcal{L}$ -transformada II

- **Producte de convolució** La idea és trobar un "producte" \* de manera que, si  $f$  i  $g$  tenen  $\mathcal{L}$ -transformada:

$$\underbrace{\mathcal{L}[f] \cdot \mathcal{L}[g]}_{\text{Producte de funcions}} = \mathcal{L}[f * g]$$

i per això es defineix el producte de convolució de dues funcions com

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau)d\tau, \quad t > 0$$

que compleix l'equació anterior sempre que existeixin les transformades de  $f$ ,  $g$  i de  $\mathcal{L}[f]$  i  $\mathcal{L}[g]$ .

## Funcions Delta de Dirac I

- ▶ El producte de convolució pot ser complicat de calcular, a excepció d'alguns casos especials.
- ▶ Una d'aquestes és la funció  $\delta$  que, intuïtivament, pren el valor 0 a tot  $\mathbb{R}$  excepte en 0 que val  $+\infty$ . De fet només usarem la propietat que  $\delta(x) = 0$  si  $x \neq 0$  i que

$$\int_{\mathbb{R}} \delta(t) dt = 1, \quad \int_{\mathbb{R}} f(t) \delta(t) dt = f(0), \quad f \in C^1(\mathbb{R}).$$

- ▶ La  $\delta$  es pot desplaçar considerant  $\delta(\cdot - a)$ ,  $a \in \mathbb{R}$  de manera que

$$\int_{\mathbb{R}} \delta(t - a) dt = 1, \quad \int_{\mathbb{R}} f(t) \delta(t - a) dt = f(a), \quad f \in C^1(\mathbb{R}).$$

## Funcions Delta de Dirac II

- ▶ La funció  $\delta$  té una transformada que es pot calcular directament usant aquestes propietats

$$\mathcal{L}[\delta(t - a)](s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} \delta(t - a) dt = e^{-sa}.$$

$$\mathcal{L}[\delta(t - a)f(t)](s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} \delta(t - a)f(t) dt = e^{-sa}f(a).$$

- ▶ El producte de convolució per una  $\delta$  també és fàcil de calcular

$$(\delta(\cdot - a) * f)(t) = \int_0^t \delta(\tau - a)f(t - \tau) d\tau = \begin{cases} 0 & t < a \\ f(a) & t \geq a \end{cases}$$

que no és altra cosa que  $f(a)\mathcal{U}(t - a)$ .

## Problema 25 de la llista I

Resoleu l'equació

$$y'' + 2y' + 2y = \delta(t - 3\pi) \cos t, \quad y(0) = 1, y'(0) = -1$$

Sigui  $Y(s) = \mathcal{L}[y(t)](s)$ . La transformada de la part esquerra és

$$(s^2 + 2s + 2)Y(s) - s - 1$$

mentre que la part dreta és, com hem vist abans,

$$\mathcal{L}[\delta(t - 3\pi) \cos t](s) = e^{-3\pi s} \cos 3\pi = -e^{-3\pi s}$$

Així, la solució per a la transformada és

$$Y(s) = \frac{s + 1}{s^2 + 2s + 2} - \frac{e^{-3\pi}}{s^2 + 2s + 2}$$

## Problema 25 de la llista II

Anem a calcular l'antitransformada dels dos termes. Com que

$$s^2 + 2s + 2 = (s + 1)^2 + 1$$

és clar que

$$\frac{s + 1}{s^2 + 2s + 2} = e^{-t} \cos(t).$$

i que

$$\frac{1}{s^2 + 2s + 2} = e^{-t} \sin(t).$$

Necessitem calcular l'antitransformada amb  $e^{-3\pi}$  davant:

$$\frac{e^{-3\pi}}{s^2 + 2s + 2} = \mathcal{L}\left[e^{-(t-3\pi)} \underbrace{\sin(t-3\pi)}_{-\sin t} \mathcal{U}(t-3\pi)\right](s)$$

## Problema 25 de la llista III

Així doncs, la solució que ens demanen és

$$\begin{aligned}y(t) &= e^{-t} \cos(t) + e^{-(t-3\pi)} \sin t \cdot \mathcal{U}(t - 3\pi) \\ &= (\cos t + e^{3\pi} \sin t \cdot \mathcal{U}(t - 3\pi)) e^{-t}\end{aligned}$$

## Problema 4 del 19/01/2016 I

*Resoleu l'equació diferencial*

$$y'' + y' + y = 0$$

*amb les condicions inicials  $y'(0) = \frac{-1}{2}$  i  $y(0) = 1$ .*

- ▶ La funció  $y = y(t)$  és la incògnita i en primer lloc calcularem l'equació que satisfà la seva transformada  $Y(s) = \mathcal{L}[y(t)](s)$ .
- ▶ Fórmules per a la transformada de la derivada (aquí usareu les c.i).

$$\underbrace{(s^2 + s + 1)}_{\text{polinomi característic}} Y(s) - s - \frac{1}{2} = 0$$

- ▶ Trobar  $Y(s) = \frac{s + \frac{1}{2}}{s^2 + s + 1}$ .

## Problema 4 del 19/01/2016 II

- Trobar la solució com a antitransformada de

$$Y(s) = \frac{s + \frac{1}{2}}{(s + 1/2)^2 + 3/4} = G(s)$$

on

$$G(s) = \frac{s}{s^2 + 3/4}, \quad G(s) = \mathcal{L} \left[ \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t \right] (s)$$

i usant les fórmules de translació

$$Y(s) = \mathcal{L} \left[ \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t \right] \left( s + \frac{1}{2} \right) = \mathcal{L} \left[ e^{-\frac{t}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t \right]$$

de manera que la solució és

$$y(t) = e^{-\frac{t}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t$$

## Problema 3 8/6/2016 (ressonància) I

*Resoleu l'equació diferencial*

$$y'' + y = \sin 2t$$

*amb les condicions inicials  $y'(0) = -1$  i  $y(0) = 0$ .*

*Solució:*

$$y(t) = -\frac{1}{3} \sin t - \frac{\sin 2t}{3}$$

*Feu el mateix amb l'equació diferencial*

$$y'' + y = \sin t$$

*amb les condicions inicials  $y'(0) = \frac{-1}{2}$  i  $y(0) = 1$ .*

## Problema 2 del 9/6/2015 (antitransformació) I

Sigui

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)](s) = \frac{1}{s^2 - s}$$

Calculeu l'antitransformada de

$$\frac{2s + 1}{(s^2 + s)^2}$$

► Observem que si fem

$$F(s+1) = \frac{1}{(s+1)^2 - (s+1)} = \frac{1}{s^2 + 2s + 1 - s - 1} = \frac{1}{s^2 + s}$$

## Problema 2 del 9/6/2015 (antitransformació) II

- ▶ Per tant, usant les fórmules de translació

$$\mathcal{L}[e^{-t}f(t)](s) = \mathcal{L}[f(t)](s) = \frac{1}{s^2 + s}$$

- ▶ Observem ara que el que ens demanen és precisament menys la derivada, és a dir

$$\frac{d}{ds} \left( \frac{1}{s^2 + s} \right) = D \left( \frac{1}{s^2 + s} \right) = -\frac{2s + 1}{(s^2 + s)^2}$$

i per tant usem la formula per a la derivada de la transformada

$$-D \left( \frac{1}{s^2 + s} \right) = -D\mathcal{L}[e^{-t}f(t)] = \mathcal{L}[te^{-t}f(t)]$$

## Problema 3 del 9/6/2015 I

Calculeu l'antitransfomada de Laplace de la funció

$$F(s) = \frac{e^{-2s}(s+1)}{s^2 + 2s + 5}$$

- ▶ Les arrels del denominador són  $-1 \pm 2i$  i, podem completar quadrats com segueix:

$$s^2 + 2s + 5 = (s + 1)^2 + 2^2$$

- ▶ Observem que

$$\frac{s+1}{s^2 + 2s + 5} = \frac{s+1}{(s+1)^2 + 2^2} = \mathcal{L}[\cos 2t](s+1)$$

## Problema 3 del 9/6/2015 II

- ▶ Per tant, per les fórmules de translació

$$\frac{s+1}{s^2+2s+5} = \mathcal{L}[e^{-t} \cos 2t](s)$$

- ▶ Finalment, només cal tenir en compte l'exponencial

$$e^{-2s} \frac{s+1}{s^2+2s+5} = \mathcal{L}[e^{-2t} \cos 2t - 4\mathcal{U}(t-2)].$$

Solució  $f(t) = e^{-t+2} \cos(2t-4)\mathcal{U}(t-2)$ .

## Sèries de Fourier



Figura : Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830)

## Funcions periòdiques contínues a trossos

- ▶ Fixem un període  $T > 0$  i un interval bàsic  $[-T, T] \subset \mathbb{R}$ .
- ▶ A partir de la seva definició a  $[-T, T]$  considerarem la seva extensió periòdica a tot  $\mathbb{R}$  de manera que el període sigui  $2T$ .
- ▶ En el tema tractarem amb funcions  $2T$ -periòdiques contínues a trossos, que denotarem per  $CT[-T, T]$ .
- ▶ Considerarem funcions amb discontinuïtats de salt o evitables.
- ▶ Un exemple bàsic són les funcions

$$1, \sin \frac{\pi x}{T}, \cos \frac{\pi x}{T}, \sin \frac{2\pi x}{T}, \cos \frac{2\pi x}{T}, \dots$$

- ▶ La idea de Fourier és expressar funcions periòdiques com a sumes (infinites) d'aquestes.
- ▶ Veieu la pàgina de Wikipedia dedicada a les sèries de Fourier

## Ortogonalitat a $CT[-T, T]$

Igual que a  $\mathbb{R}^n$ , el problema de l'aproximació està relacionat amb l'existència d'un producte escalar a  $CT[-T, T]$ :

$$\langle f, g \rangle = \int_{-T}^T f(x)g(x)dx, \quad f, g \in CT[-T, T]$$

i de la seva norma i distàncies associades

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}, \quad d(f, g) = \|f - g\|.$$

Amb aquesta mètrica, es comprova que les funcions bàsiques:

$$1, \sin \frac{\pi x}{T}, \cos \frac{\pi x}{T}, \sin \frac{2\pi x}{T}, \cos \frac{2\pi x}{T}, \dots$$

són mútuament ortogonals (el producte escalar val zero) i que totes tenen norma  $\sqrt{T}$  excepte la funció 1 que té per norma

$$\|1\| = \sqrt{\langle 1, 1 \rangle} = \sqrt{2T}$$

## Definició de les sèries de Fourier

Per a una funció  $f \in CT[-T, T]$ , es defineixen els seus **coeficients de Fourier** com les successions  $(a_n)_{n \geq 0}$  i  $(b_n)_{n > 0}$  definides per les integrals

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T}^T f(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{T} \int_{-T}^T f(x) \cos \frac{n\pi x}{T} dx, \quad n > 0$$

$$b_n = \frac{1}{T} \int_{-T}^T f(x) \sin \frac{n\pi x}{T} dx, \quad n > 0$$

i la seva **sèrie de Fourier** associada com

$$\mathcal{F}[f] = \frac{a_0}{2} + \sum_{n > 0} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{T} + b_n \sin \frac{n\pi x}{T} \right)$$

## Aproximacions de Fourier

La suma parcial  $n$ -èsima de la sèrie de Fourier aproxima la funció:

$$\mathcal{F}_N[f] = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^N \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{T} + b_n \sin \frac{n\pi x}{T} \right)$$

Veieu la pàgina de Wikipedia dedicada a les sèries de Fourier

### Sèries de Fourier de funcions parells i senars

- ▶ Si  $f \in CT[-T, T]$  és parell, aleshores  $b_n = 0, n > 0$  i

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) dx, \quad a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos \frac{n\pi x}{T} dx, \quad n > 0$$

- ▶ Si  $f \in CT[-T, T]$  és senar, aleshores  $a_n = 0, n \geq 0$  i

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin \frac{n\pi x}{T} dx, \quad n > 0$$

## Exemple: La funció impuls

Sèrie de Fourier de la funció impuls  $\mathcal{U}$  definida en  $[-\pi, \pi]$ .

$$\mathcal{U}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0, \pi], \\ 0 & \text{si } t \in [-\pi, 0) \end{cases}$$

(el valor que prengui en un punt no importa en de càlcul de  $\mathcal{F}$ )

$$a_0 = 1$$

$$a_n = 0$$

$$b_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ és parell,} \\ \frac{2}{n\pi} & \text{si } n \text{ és senar,} \end{cases}$$

de manera que la sèrie de Fourier de  $\mathcal{U}$  en  $[-\pi, \pi]$  és

$$\mathcal{F}[\mathcal{U}] = \sum_{n>0, \text{senar}} \frac{2}{n\pi} \sin nx = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{2}{(2p+1)\pi} \sin (2p+1)x.$$

## Convergència de la sèrie de Fourier

- ▶ Fins ara la sèrie de Fourier només l'hem considerada *formalment*, i.e. sense donar valors a  $x$ .
- ▶ Considerar la convergència de la sèrie de Fourier significa fer

$$\mathcal{F}[f](x_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \mathcal{F}_N[f](x_0) =$$
$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^N \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{T} + b_n \sin \frac{n\pi x}{T} \right)$$

- ▶ També ens podem preguntar si, en el cas que existeixi convergència de la sèrie de Fourier en un punt  $x_0$ , aquesta convergeix a  $f(x_0)$ .

## Teorema de Dirichlet

Suposem que tant  $f$  com  $f'$  són de classe  $CT[[-T, T]$  Aleshores:

1. Si  $x_c \in (-T, T)$  és un punt de continuïtat de  $f$ , es verifica que

$$\mathcal{F}[f](x_c) = f(x_c)$$

2. Si  $x_d \in (-T, T)$  es un punt de discontinuïtat de  $f$ , es verifica

$$\mathcal{F}[f](x_d) = \frac{1}{2} (f(x_d^+) + f(x_d^-))$$

on  $f(x_d^+)$  i  $f(x_d^-)$  són els límits per la dreta i per l'esquerra de  $f$  en  $x_d$  respectivament.

3. En els extrems de l'interval  $T, -T$  es satisfà

$$\mathcal{F}[f](T) = \frac{1}{2} (f(T^+) + f(T_d^-))$$

## Exemple redux I

Considerem com abans la funció graó  $\mathcal{U}$  a  $[-\pi, \pi]$ :

- ▶ Si  $x_c \in (-\pi, 0) \cup (0, \pi)$ ,  $f$  i  $f'$  (idènticament zero) són contínues en  $x_c$  i compleixen que  $\mathcal{F}[f](x_c) = f(x_c)$ . Per exemple, això ho podem comprovar per al valor  $x_c = \pi/2$ :

$$\begin{aligned}
 1 = \mathcal{U}\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \mathcal{F}[\mathcal{U}]\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} + \sum_{p=0}^{\infty} \frac{2}{(2p+1)\pi} \underbrace{\sin \frac{2p+1}{2}\pi}_{(-1)^p} = \\
 &= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{p=0}^{\infty} \underbrace{\frac{(-1)^p}{(2p+1)}}_{\arctan 1} \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \frac{\pi}{4} = 1
 \end{aligned}$$

## Exemple redux II

- Dins l'interior de l'interval, l'únic punt de discontinuïtat és  $x_d = 0$ . El teorema de Dirichlet conclou que

$$\mathcal{F}[\mathcal{U}](0) = \frac{\mathcal{U}(0^+) + \mathcal{U}(0^-)}{2} = \frac{1}{2}$$

mentre que, en termes de la sèrie de Fourier

$$\mathcal{F}[\mathcal{U}](0) = \frac{1}{2} + \sum_{p=0}^{\infty} \frac{2}{(2p+1)\pi} \underbrace{\sin(2p+1)0}_0 = \frac{1}{2}$$

## Exemple redux III

- ▶ Una cosa similar succeeix quan  $x_d = \pi$ , l'extrem de l'interval

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[\mathcal{U}](\pi) &= \frac{\mathcal{U}(\pi^+) + \mathcal{U}(-\pi^-)}{2} = \\ &= \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \sum_{p=0}^{\infty} \frac{2}{(2p+1)\pi} \underbrace{\sin(2p+1)\pi}_0 = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

## Problema 29 I

### Problema 29

- (a) Trobeu la sèrie de Fourier de la funció  $f(x) = x + \pi$  a l'interval  $-\pi < x < \pi$ .
- (b) Useu (a) per demostrar que

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

- (a) Calculem primer els coeficients del desenvolupament.

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (x + \pi) x = \frac{1}{\pi} \left( \int_{-\pi}^{\pi} x x + \pi \int_{-\pi}^{\pi} x \right) = 2\pi,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos nx + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \pi \cos nx = 0,$$

## Problema 29 II

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{x}{n} (-\cos nx) \, dx = \\
 &\quad \frac{2}{\pi} \left[ -\frac{x}{n} \cos nx \right]_0^{\pi} + \frac{2}{n\pi} \int_0^{\pi} \cos nx \, dx = -\frac{2}{n} (-1)^n,
 \end{aligned}$$

per  $n = 1, 2, 3, \dots$  on s'ha tingut en compte que  $x$  i  $x \cos nx$  són funcions senars i per tant,

$$\int_{-\pi}^{\pi} x \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} x \cos nx \, dx = 0.$$

El desenvolupament de Fourier de la funció  $f(x)$  resulta doncs:

$$\mathcal{F}[f](x) = \pi + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx.$$

## Problema 29 III

Aplicant el teorema de Dirichlet tenim d'una banda:

$$\mathcal{F}[f](x) = x + \pi, \quad (1)$$

per tot  $-\pi < x < \pi$  on hi ha continuïtat, mentre que en  $x = \pi$ :

$$\mathcal{F}[f](\pi) = \mathcal{F}[f](-\pi) = \frac{f(-\pi^+) + f(\pi^-)}{2} = \frac{1}{2}(0 + 2\pi) = \pi.$$

(b)  $x = -\pi/2$  és un punt de continuïtat de la funció  $f(x) = x + \pi$  a l'interval  $-\pi < x < \pi$ . Aleshores, segons (1) és

## Problema 29 IV

$\mathcal{F}[f](-\pi/2) = -\pi/2 + \pi = \pi/2$ . Per tant, substituïnt a (1):

$$\mathcal{F}[f]\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \underbrace{\sin \frac{n\pi}{2}}_{(*)}$$

$$(*) = \begin{cases} \sin \frac{n\pi}{2} = 0 & \text{si } n \text{ parell} \\ \sin \frac{n\pi}{2} = \sin \frac{(2p-1)\pi}{2} = (-1)^{p+1} & \text{si } n \text{ senar} \end{cases}$$

$$= \pi + 2 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2p+1}}{2p-1} \sin \frac{(2p-1)\pi}{2} = \pi + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^p}{2p-1} = \frac{\pi}{2}$$

Per tant

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{2p-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

## Problema 29 V

Feu també els problemes 30 i 31.

## Algunes primitives útils (afegir C) I

Multiplicant per la funció  $x$ , sempre que  $n > 0$

$$\int x \cos \frac{n\pi x}{T} dx = \frac{\pi T n x \sin \left( \frac{\pi n x}{T} \right) + T^2 \cos \left( \frac{\pi n x}{T} \right)}{\pi^2 n^2},$$

$$\int x \sin \frac{n\pi x}{T} dx = -\frac{\pi T n x \cos \left( \frac{\pi n x}{T} \right) - T^2 \sin \left( \frac{\pi n x}{T} \right)}{\pi^2 n^2}$$

Multiplicant per la funció  $x^2$ , sempre que  $n > 0$

$$\int x^2 \cos \frac{n\pi x}{T} dx = \frac{\pi^2 T n^2 x^2 \sin \left( \frac{\pi n x}{T} \right) + 2 \pi T^2 n x \cos \left( \frac{\pi n x}{T} \right) - 2 T^3 \sin \left( \frac{\pi n x}{T} \right)}{\pi^3 n^3}$$

## Algunes primitives útils (afegir C) II

mentre que per al sinus, tenim

$$\int x^2 \sin \frac{n\pi x}{T} dx =$$
$$-\frac{\pi^2 T n^2 x^2 \cos\left(\frac{\pi n x}{T}\right) - 2 \pi T^2 n x \sin\left(\frac{\pi n x}{T}\right) - 2 T^3 \cos\left(\frac{\pi n x}{T}\right)}{\pi^3 n^3}$$

## Algunes primitives útils

Les integrals es simplifiquen si  $\pi = T$ :

$$\int x \cos nx dx = \frac{nx \sin(nx) + \cos(nx)}{n^2} + C$$

$$\int x \sin nx dx = -\frac{nx \cos(nx) - \sin(nx)}{n^2} + C$$

$$\int x^2 \cos nx dx = \frac{2nx \cos(nx) + (n^2x^2 - 2) \sin(nx)}{n^3} + C$$

$$\int x^2 \sin nx dx = \frac{2nx \sin(nx) - (n^2x^2 - 2) \cos(nx)}{n^3} + C$$

Per exemple, podem fer el problema 4 del 8/6/2016.

## Integració i derivació de sèries de Fourier I

Suposem que tant  $f$  com  $f'$  són  $CT[-T, T]$  i sigui

$$\mathcal{F}[f] = \frac{a_0}{2} + \sum_{n>0} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{T} + b_n \sin \frac{n\pi x}{T} \right)$$

- ▶ La integral de  $f$  en un interval  $[\alpha, \beta] \subset [-T, T]$  es pot obtenir 'integrant terme a terme'

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \frac{a_0(\beta - \alpha)}{2} + \sum_{n>0} \frac{T}{n\pi} \left[ a_n \sin \frac{n\pi x}{T} - b_n \cos \frac{n\pi x}{T} \right]_{\alpha}^{\beta}$$

## Integració i derivació de sèries de Fourier II

- ▶ En particular, la funció integral es pot calcular integrant la sèrie de Fourier 'terme a terme': si  $x \in [-T, T]$ :

$$\int_0^x f(x) dx = \frac{a_0}{2}x + \sum_{n>0} \frac{T}{n\pi} \left( a_n \sin \frac{n\pi x}{T} - b_n \cos \frac{n\pi x}{T} + b_n \right)$$

La part dreta no és  $2T$ -periòdica llevat que  $a_0 = 0$ .

- ▶ Si, a més,  $f \in C^0[-T, T]$ , aleshores la sèrie de Fourier de  $f'$  pot obtenir-se derivant 'terme a terme':

$$\mathcal{F}[f'](x) = \sum_{n>0} \frac{n\pi}{T} \left( -a_n \sin \frac{n\pi x}{T} + b_n \cos \frac{n\pi x}{T} \right)$$

- ▶ Si la funció  $f$  no és contínua, aleshores la derivació terme a terme no funciona. Per exemple  $\mathcal{U}$  en  $[-\pi, \pi]$ .

## Convergència en mitjana quadràtica

La sèrie de Fourier, no sempre convergeix al valor de la funció en un punt, però en una certa mitjana sí:

### Teorema de Parseval

Si  $f \in CT[-T, T]$ , aleshores

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-T}^T (f(x) - \mathcal{F}_N[f](x))^2 dx = 0$$

o, en termes dels coeficients de Fourier,

$$\frac{1}{T} \int_{-T}^T f(x)^2 dx = \frac{1}{T} \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-T}^T (\mathcal{F}_N[f](x))^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n>0} (a_n^2 + b_n^2)$$

## Sèries de Fourier en forma exponencial

Si recordem que la identitat d'Euler

$$\exp i \frac{n\pi x}{T} = \cos \frac{n\pi x}{T} + i \sin \frac{n\pi x}{T}$$

podem escriure la sèrie de Fourier de  $f$  com

$$\mathcal{F}[f] = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \exp\left(i \frac{n\pi x}{T}\right), \quad c_n = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(x) e^{-i \frac{n\pi x}{T}} dx$$

essent

$$c_0 = \frac{a_0}{2}$$

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, \quad n > 0$$

$$c_n = \frac{a_{-n} + ib_{-n}}{2}, \quad n < 0$$