

Càlcul II

Integració

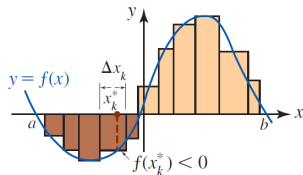
Basat en els apunts de l'assignatura per Jaume Haro

Tardor 2016

Repàs integració de Riemann a \mathbb{R}

Recordem, si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ i anem a definir la integral

- ▶ En $[a, b]$ prenem n intervals de longituds $\Delta x_1, \dots, \Delta x_n$ amb la **partició** P : $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$.
- ▶ La **norma de la partició** P , $\|P\| = \max \Delta x_k$.
- ▶ Per cada interval, prenem un **punt mostra** $x_k^* \in [x_k, x_{k+1}]$.



Definim la suma de Riemann associada a P i als punts mostra:

$$\sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x_k$$

Pàs definició integral definida a \mathbb{R}

Definició

La integral definida Sigui f una funció definida en un interval tancat $[a, b]$. Aleshores la **integral definida de f de a a b** , que es denota com $\int_a^b f(x)dx$ es defineix com

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x_k.$$

Si el límit existeix, direm que f és **integrable** (Riemann) en $[a, b]$.

- ▶ No correspon a l'àrea per a funcions que canviïn de signe.
- ▶ Si f és contínua llevat d'un número finit de punts de $[a, b]$ i acotada en tot $[a, b]$, aleshores f és integrable.

Funcions característiques i integració sobre conjunts de \mathbb{R}

La integració de Riemann sobre conjunts de \mathbb{R} :

- ▶ Sigui $\Omega \subset \mathbb{R}$ acotat,
- ▶ $f : \Omega \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,
- ▶ Sigui I interval amb $\Omega \subset I$

Com que la integral de Riemann és sobre intervals, definim

$$\tilde{f}(x) := f(x)\chi_{\Omega}(x), \quad \chi_{\Omega}(x) = \begin{cases} 1 & x \in \Omega \\ 0 & x \notin \Omega \end{cases}$$

on χ és la funció característica del conjunt Ω . Observem que, sempre que la part dreta estigui definida,

$$\int_{\Omega} f(x) := \int_I \tilde{f}(x),$$

Funcions característiques i integració sobre conjunts de \mathbb{R}

on

$$\int_I \tilde{f}(x) = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_i \tilde{f}(x_i) \Delta x_i,$$

essent Δ una partició qualsevol de I , $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ i $\|\Delta\|$ és la norma de la partició.

Generalització a \mathbb{R}^n

- ▶ Sigui Ω acotat.
- ▶ $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,
- ▶ Sigui R rectangle amb $\Omega \subset R$.

Definim l'extensió de f a R com

$$\tilde{f}(x, y) := f(x, y)\chi_{\Omega}(x, y), \quad \chi_{\Omega}(x, y) = \begin{cases} 1 & (x, y) \in \Omega \\ 0 & (x, y) \notin \Omega \end{cases}$$

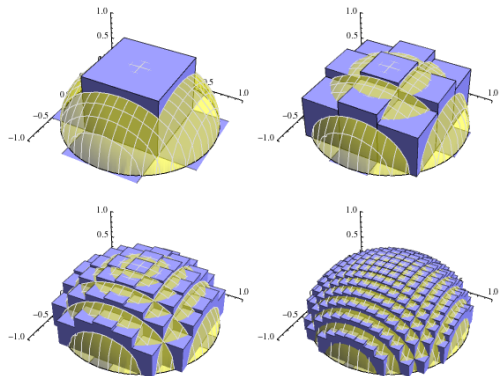
on χ és la funció característica de Ω . Llavors:

$$\int_{\Omega} f(x, y) := \int_R \tilde{f}(x, y),$$
$$\int_R \tilde{f}(x, y) = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i,j} \tilde{f}(x_i, y_j) \Delta x_i \Delta y_j,$$

on Δ és una partició qualsevol de R .

Il·lustració

Prenem Ω la circumferència centrada en $(1, -1)$ de radi 1:



Primera aplicació de la integral:

- ▶ A \mathbb{R} si tenim $f : \Omega \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, amb $f \geq 0$ la integral $\int_{\Omega} f$ és l'àrea delimitada per la gràfica de f i el domini Ω .
- ▶ També, si $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ amb $f \geq 0$ tindrem que $\int_{\Omega} f$ és el volum que delimitada per la gràfica de f i el domini Ω

Exercici

Quant val $\int_{[0,1]^2} 1 - x$? Comproveu que s'obté el mateix resultat calculant $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N$

Resposta (Arquimedes' style): Val $1/2$.

- ▶ $[0, 1]^2 = [0, 1] \times [0, 1]$
- ▶ La funció $f(x, y) = 1 - x$ és positiva (veure la gràfica).
- ▶ El volum sota la gàfica de $1 - x$ és la meitat del cub $[0, 1]^3$.

Volums i longituds

- ▶ Donat $[a, b] \subset \mathbb{R}$ tenim que $\int_{[a,b]} 1 = b - a$ és la longitud de l'interval $[a, b]$.
- ▶ El mateix es compleix per qualsevol dimensió:
 1. $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ la seva àrea és $A(\Omega) = \int_{\Omega} 1$.
 2. $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ el seu volum és $V(\Omega) = \int_{\Omega} 1$.
 3. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ parlarem de la seva **mesura**: $m(\Omega) = \int_{\Omega} 1$.
- ▶ En general, usarem la mesura d'un conjunt Ω , $m(\Omega)$, per referir-nos a tots els anteriors.

Propietats de la integral

- ▶ Linealitat

$$\int_{\Omega} af + bg = a \int_{\Omega} f + b \int_{\Omega} g.$$

- ▶ Additivitat. Si $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ amb $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$, llavors:

$$\int_{\Omega} f = \int_{\Omega_1} f + \int_{\Omega_2} f.$$

El Teorema del valor mitjà I

Teorema (Valor Mitjà a \mathbb{R})

Sigui $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, amb $f \in C^0[a, b]$, llavors

$$\int_a^b f(x) = f(c)(b - a), \quad \text{per algun } c \in [a, b].$$

En particular, tenim les següent acotacions

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x) \leq M(b - a),$$

on $m = \min_{x \in [a, b]} f(x)$ i $M = \max_{x \in [a, b]} f(x)$.

El mateix passa en dimensions més altes.

El Teorema del valor mitjà II

Teorema (Valor Mitjà a \mathbb{R}^n)

Sigui $f : \Omega \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, on suposem que

- ▶ Ω és acotat i arc-connex (tots els punts estan connectats)
- ▶ $f \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$.

Llavors

$$\int_{\Omega} f(x) = f(c)m(\Omega) \quad \text{per algun } c \in \bar{\Omega},$$

i on $m(\Omega)$ és la mesura del conjunt Ω . En particular,

$$mm(\Omega) \leq \int_{\Omega} f(x) \leq Mm(\Omega),$$

on $m = \min_{x \in \Omega} f(x)$ i $M = \max_{x \in \Omega} f(x)$.

Alguns exemples I

Exercici:

Afiteu superior i inferiorment $\int_{\mathcal{B}_R^3(0)} e^{-\|x\|^2}$.

Com que

$$e^{-\|x\|^2} \in [0, 1]$$

i

$$m(\mathcal{B}_R^3(0)) = 4\pi R^3/3,$$

aleshores

$$0 \leq \int_{\mathcal{B}_R^3(0)} e^{-\|x\|^2} \leq 4\pi R^3/3$$

Alguns exemples II

Exercici:

Demostreu que

$$1/6 \leq \int_{\Omega} \frac{1}{y-x+3} \leq 1/4,$$

on Ω és el triangle de vèrtexs $(0,0)$, $(1,1)$ i $(1,0)$.

- ▶ El triangle té àrea (mesura) $1/2$.
- ▶ Com que la hipotenusa és $y-x=0$, dins del triangle tenim

$$y-x \leq 0, \quad x \geq 0, \quad y \leq 1$$

Alguns exemples III

- ▶ Per tant, podem acotar superiorment i inferior el denominador per

$$y - x + 3 \leq 3, \quad y - x + 3 \geq y - 1 + 3 \geq 0 + 2 = 2$$

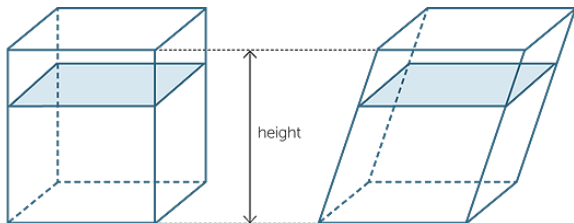
Com que $2 \leq y - x + 3 \leq 3$,

$$\frac{1}{3} \leq \frac{1}{y - x + 3} \leq \frac{1}{2}$$

i la cota surt de $m(\Omega) = 1/2$.

Principi de Cavalieri I

És la generalització del mètode dels discs (vegi's Càlcul I):



- ▶ Serveix per a volums generats per "extrusió" al llarg d'un interval $I \subset \mathbb{R}$, que pot ser una de les tres variables.
- ▶ Donat $W = \{(x, y, z) : x \in I\} \subset \mathbb{R}^3$, sigui $\Omega(x_0) \subset \mathbb{R}^2$ la secció que s'obté tallant W amb el pla $x = x_0$.

Principi de Cavalieri II

- ▶ Diem $A(x_0)$ a l' àrea de $\Omega(x_0)$,
- ▶ Llavors el volum de W és

$$V(W) = \int_I A(x).$$

Volums clàssics I

Volum d'un con:

- ▶ Escrivim el con com $W = \{z^2 = x^2 + y^2, z \in I = [0, H]\}$.
- ▶ Apliquem el mètode

$$V(W) = \int_I A(z) = \int_I \pi z^2 = \pi H^3/3.$$

Volum d'un el.lipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1.$$

Volums clàssics II

- ▶ Tallant amb plans z constant s'obtenen el·lipses de la forma

$$\frac{x^2}{a^2 \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right)} + \frac{y^2}{b^2 \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right)} \leq 1.$$

- ▶ Aquestes són el·lipses de semi-eixos:

$$\tilde{a}(z) = a\sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}}, \quad \tilde{b}(z) = b\sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}},$$

i, per tant, la seva àrea és, si $z \in [-c, c]$

$$A(z) = \pi ab \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right)$$

Volums clàssics III

- ▶ Finalment, per calcular el volum, farem

$$\int_{-c}^c A(z) dz = \pi ab \underbrace{\int_{-c}^c \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right) dz}_{4/3c} = \frac{4}{3}\pi abc$$

- ▶ Una possibilitat si no recordem l'àrea d'una el·lipse (o no és al formulari) és aplicar Cavalieri en dimensió 2, i.e., tallant amb rectes perpendiculars als eixos calculant la longitud del segment intersecció i després integrant respecte de la variable que parametriza aquestes rectes.

Volums clàssics IV

- ▶ En aquest cas la longitud és

$$L(x) = 2b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2}}$$

i per tant $A(z) = \int_a^a L(x) = \pi ab \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right)$,

- ▶ Així doncs, $V = \int_c^c A(z) = \frac{4}{3}\pi abc$.

Exercicis 3(c) i 3(d)

Exercici 3

Apliqueu el principi de Cavalieri per calcular els següents volums a partir de l'àrea de seccions amb plans paral·lels als plans coordenats (triades de forma adequada).

- (c) Volum de la piràmide de base rectangular de costats a , b i alçada h . (Sol.: $\frac{abh}{3}$.)
- (d) Volum del tetràedre limitat pels plans $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ ($a, b, c > 0$). (Solució: $\frac{abc}{6}$.)

Generalització de Cavalieri: Fubini-Tonelli I

Podeu mirar els exemples del següent web.

Considerem un cos/volum a \mathbb{R}^3 sota la gràfica de f :

$$W = \{(x, y, z) : x \in I_x, y \in I_y, z \in [0, f(x, y)]\}, \text{ amb } f \geq 0.$$

en un cert rectangle $R = I_x \times I_y$. El seu volum serà la integral

$$\int_R f(x, y) = \int_R f(x, y) dx dy$$

Si considerem la integral en funció de x per plans $x = x_0$

$$A(x_0) = \int_{I_y} f(x_0, y) dy$$

Generalització de Cavalieri: Fubini-Tonelli II

aleshores pel principi de Cavalieri el volum és la integral reiterada:

$$V(W) = \int_{I_x} A(x) dx = \int_{I_x} \left(\int_{I_y} f(x, y) dy \right) dy,$$

Per altra banda també podríem haver començat amb la y i aplicar el principi de Cavalieri amb plans de la forma $y = y_0$

$$A(y_0) = \int_{I_x} f(x, y_0) dx$$

que ens conduiria a la següent expressió

$$V(W) = \int_{I_y} A(y) dy = \int_{I_y} \left(\int_{I_x} f(x, y) dx \right) dy.$$

Generalització de Cavalieri: Fubini-Tonelli III

Teorema (Fubini-Tonelli)

Si la funció $f : I_x \times I_y \rightarrow \mathbb{R}$ és "bona" (pe. positiva o contínua a trossos):

$$\int_{I_y} \left(\int_{I_x} f(x, y) dx \right) dy = \int_{I_x} \left(\int_{I_y} f(x, y) dy \right) dx = \int_{I_x \times I_y} f(x, y)$$

Dominis on es pot aplicar Fubini I

El teorema de Fubini pot aplicar-se en dominis Ω de \mathbb{R}^2 (o de \mathbb{R}^3 , la idea és la mateixa) de determinades formes, no només per a rectangles de la forma

$$\Omega = [a, b] \times [c, d]$$

1. Per $\Omega = \{(x, y) : x \in I, y \in I_x = [\phi_1(x), \phi_2(x)]\}$, $\phi_1 \leq \phi_2$:

$$\int_{\Omega} f(x, y) = \int_I \int_{I_x} f(x, y) = \int_I \left(\int_{I_x} f(x, y) dy \right) dx$$

Dominis on es pot aplicar Fubini II

2. Per $\Omega = \{(x, y) : y \in \bar{I}, x \in \bar{I}_y = [\phi_1(y), \phi_2(y)]\}$, $\phi_1 \leq \phi_2$:

$$\int_{\Omega} f(x, y) = \int_{\bar{I}} \int_{\bar{I}_y} f(x, y) = \int_{\bar{I}} \left(\int_{\bar{I}_y} f(x, y) dx \right) dy.$$

3. Per $\Omega = \{(x, y, z) : x \in I, y \in I_x = [\phi_1(x), \phi_2(x)], z \in I_{x,y} = [\psi_1(x, y), \psi_2(x, y)]\}$, $\phi_1 \leq \phi_2$ i $\psi_1 \leq \psi_2$:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f(x, y, z) &= \int_I \int_{I_x} \int_{I_{x,y}} f(x, y, z) = \\ &= \int_I \left(\int_{I_x} \left(\int_{I_{x,y}} f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx = \\ &= \int_I dx \int_{I_x} dy \int_{I_{x,y}} f(x, y, z) dz \text{ (notació)} \end{aligned}$$

Alguns exemples I

1. $\Omega = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq x^2\}$. Escriviu les dues integrals iterades.

$$\int_0^1 \left(\int_0^{x^2} f(x, y) dy \right) dx = \int_0^1 \int_0^{x^2} f(x, y) dx dy = \dots$$

2. Ω domini limitat per les corbes $y = x^2$ i $x = y^2$. Escriviu les dues integrals iterades.
 - ▶ El domini, suposant $x \geq 0$, es pot escriure com

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 \leq y \leq \sqrt{x}, x \in [0, 1]\}$$

Alguns exemples II

- ▶ Així doncs, la integral doble es pot escriure com

$$\int_0^1 \left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} f(x, y) dy \right) dx$$

3. Calculeu $\int_0^1 \int_y^1 e^{y/x} dx$.

- ▶ Per la forma com està escrit, el domini és $\{y \in [0, 1], y \leq x \leq 1\}$. Així doncs,
- ▶ Una forma de calcular la integral integrant primer respecte la x

$$\int_0^1 \int_y^1 e^{y/x} dx = \int_0^1 \left(\int_y^1 e^{y/x} dx \right) dy$$

- ▶ Hauríem d'integrar $\int_y^1 e^{y/x} dx \dots$

Alguns exemples III

- ▶ També podem canviar el domini:

$$\Omega = \{x \in [0, 1], 0 \leq y \leq x\}$$

- ▶ Així la integral passaria a ser

$$\int_{\Omega} e^{y/x} dx dy = \int_0^1 \left(\int_0^x e^{y/x} dy \right) dx$$

- ▶ $\int_0^x e^{y/x} dy = xe - x$
- ▶ Per tant

$$\int_0^1 \left(\int_0^x e^{y/x} dy \right) dx = \int_0^1 (xe - x) dx = \frac{1}{2}e - \frac{1}{2}$$

4. Calculeu $\int_{\Omega} x^2 \sin(xy)$ on

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1, y \leq x \leq 1\}.$$

Alguns exemples IV

- ▶ Es tracta del mateix domini que abans.
- ▶ Ens interessa més integrar primer respecte la y (més fàcil):

$$\int_{\Omega} x^2 \sin(xy) dx dy = \int_0^1 \left(\int_0^x x^2 \sin(xy) dy \right) dx$$

- ▶ $\int_0^x x^2 \sin(xy) dy = -x^2 \left(\frac{\cos(x^2)}{x} - \frac{1}{x} \right)$
- ▶ Integrant respecte la x :

$$\int_0^1 \left(-x^2 \left(\frac{\cos(x^2)}{x} - \frac{1}{x} \right) \right) dx = \left[\frac{1}{2} x^2 - x \sin(x) - \cos(x) + 1 \right]_0^1$$

Exercicis 8(b), 8(c), 8(e), 11(e), 11(g), 14(a), 14(c) i 15(e).

Exercici 8(b), 8(c), 8(e) I

Per a les regions $A \subset \mathbb{R}^2$ indicades escriuiu la integral doble

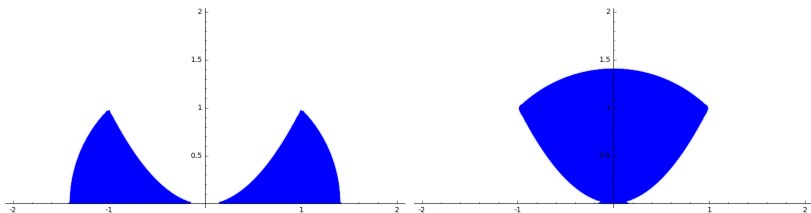
$\iint_A f(x, y) dx dy$ en termes d'integrals iterades preses en diferents

ordres, $\int \left(\int f dx \right) dy$ i $\int \left(\int f dy \right) dx$, donant quins són els extrems d'integració per a x i y en cada cas.

- b) A paral·lelogram limitat per les rectes $y = x$, $y = x - 3$, $y = 2$, $y = 4$.
- c) A regió limitada per les corbes $x^2 + y^2 = 2a^2$, $x^2 = ay$ ($y \geq 0$, $a > 0$).
- d) A regió limitada per les corbes $x^2 + y^2 = ax$, $x^2 + y^2 = 2ax$, $y = 0$ ($y \geq 0$, $a > 0$).

Exercici 8(b), 8(c), 8(e) II

- c) A regió limitada per les corbes $x^2 + y^2 = 2a^2$, $x^2 = ay$ ($y \geq 0$, $a > 0$).



- La corba $x^2 + y^2 = 2a^2$ delimita una circumferència de radi $a\sqrt{2}$.

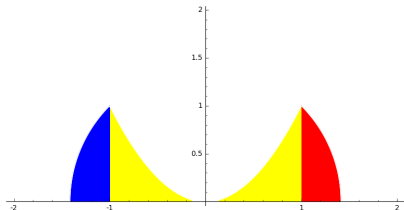
Exercici 8(b), 8(c), 8(e) III

- ▶ Els dos extrems on es toquen les corbes són la solució de

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= 2a^2 \\ x^2 &= ay\end{aligned}$$

i, que dona com a solució $y = a$ i $x = \pm a$.

- ▶ Per al càlcul de $\int dx \int f(x, y) dy$ separem el domini en tres parts:



Exercici 8(b), 8(c), 8(e) IV

$$\Omega_1 = \left\{ x \in [-a\sqrt{2}, -a], 0 \leq y \leq \sqrt{2a^2 - x^2} \right\}$$

$$\Omega_2 = \left\{ x \in [-a\sqrt{2}, -a], 0 \leq y \leq x^2/a \right\}$$

$$\Omega_3 = \left\{ x \in [a, a\sqrt{2}], 0 \leq y \leq \sqrt{2a^2 - x^2} \right\}$$

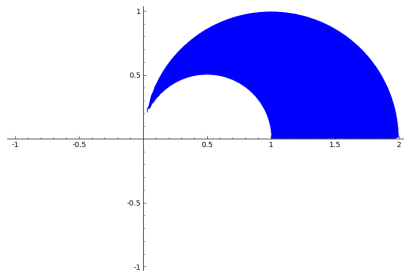
- Per al càlcul de $\int dy \int f(x, y) dx$ separem el domini en dues integrals

$$\Omega_+ = \left\{ y \in [0, 1], \sqrt{ay} \leq x \leq \sqrt{2a^2 - y^2} \right\}$$

$$\Omega_- = \left\{ y \in [0, 1], -\sqrt{2a^2 - y^2} \leq x \leq -\sqrt{ay} \right\}$$

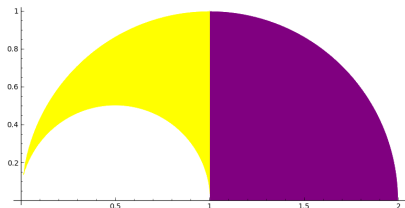
- d) A regió limitada per les corbes $x^2 + y^2 = ax$, $x^2 + y^2 = 2ax$, $y = 0$ ($y \geq 0$, $a > 0$).

Exercici 8(b), 8(c), 8(e) V



- ▶ Geomètricament, és l'àrea del primer quadrant inclosa entre una circumferència de radi $a/2$ i centre $a/2$ i una circumferència de radi a i centre a .
- ▶ Per calcular $\int dx \int f(x, y) dy$, hem de dividir en dos dominis:

Exercici 8(b), 8(c), 8(e) VI



Expressant y en funció de x , les dues corbes són

$$y = \sqrt{ax - x^2}, \quad y = \sqrt{2ax - x^2} \quad (y \geq 0)$$

Per tant, els dos dominis són

$$\Omega_1 = \left\{ x \in [0, a], \sqrt{ax - x^2} \leq y \leq \sqrt{2ax - x^2} \right\}$$

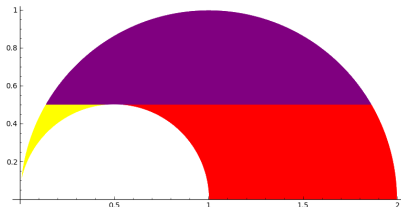
$$\Omega_2 = \left\{ x \in [a, 2a], 0 \leq y \leq \sqrt{2ax - x^2} \right\}$$

Exercici 8(b), 8(c), 8(e) VII

i la integral és

$$\int_0^a dx \int_{\sqrt{ax-x^2}}^{\sqrt{2ax-x^2}} f(x,y) dy + \int_a^{2a} dx \int_0^{\sqrt{2ax-x^2}} f(x,y) dy.$$

- Per calcular $\int dy \int f(x,y) dx$, hem de dividir en tres dominis:



Exercici 8(b), 8(c), 8(e) VIII

Expressant x en funció de y , obtenim

$$y^2 + x^2 = ax \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}a \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4y^2},$$

$$y^2 + x^2 = 2ax \Leftrightarrow y = x = a \pm \sqrt{a^2 - y^2}$$

I ara els tres dominis es poden expressar com

$$\Omega_1 = \left\{ y \in [a/2, a], a - \sqrt{a^2 - y^2} \leq x \leq a + \sqrt{a^2 - y^2} \right\}$$

$$\Omega_2 = \left\{ y \in [0, a/2], a - \sqrt{a^2 - y^2} \leq x \leq \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4y^2} \right\}$$

$$\Omega_2 = \left\{ y \in [0, a/2], \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4y^2} \leq x \leq a + \sqrt{a^2 - y^2} \right\}$$

Exercici 8(b), 8(c), 8(e) IX

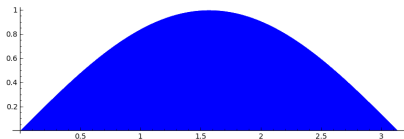
d'on surt l'expressió per a la integral

$$\int_{a/2}^a dy \int_{a-\sqrt{a^2-y^2}}^{a+\sqrt{a^2-y^2}} f(x, y) dx + \int_0^{a/2} dy \int_{a-\sqrt{a^2-y^2}}^{\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}} f(x, y) dx \\ + \int_0^{a/2} dy \int_{\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}\sqrt{a^2-4y^2}}^{a+\sqrt{a^2-y^2}} f(x, y) dx.$$

Exercici 11(e), 11(g) I

Invertiu l'ordre d'integració en les integrals iterades següents.

$$e) \int_0^\pi \left(\int_0^{\sin x} f(x, y) dy \right) dx.$$



El domini d'integració és

$$\Omega = \{x \in [0, \pi], 0 \leq y \leq \sin x\}$$

Equivalentment, passant l'arcsinus

$$\Omega = \{y \in [0, 1], \arcsin y \leq x \leq \pi - \arcsin y\}$$

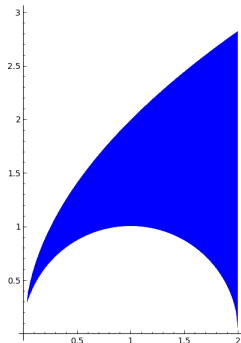
Exercici 11(e), 11(g) II

Per tant, la integral és equivalent a

$$\int_0^1 \left(\int_{\arcsin y}^{\pi - \arcsin y} f(x, y) dx \right) dy.$$

$$g) \int_0^{2a} \left(\int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{4ax}} f(x, y) dy \right) dx, \quad a > 0.$$

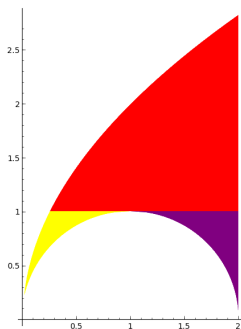
Exercici 11(e), 11(g) III



El domini és

$$\Omega = \{x \in [0, 2a], \sqrt{2ax - x^2} \leq y \leq \sqrt{4ax}\}$$

Exercici 11(e), 11(g) IV



- ▶ L'extrem superior del domini per a la y és $\sqrt{4a^2} = 2\sqrt{2a}$.
- ▶ El límit inferior del domini és una circumferència centrada en $x = a$ de radi a i l'eix $y = 0$.
- ▶ Donada la forma del domini, haurem de distingir $y \in [1, 2\sqrt{2a}]$ (1 domini) i $y \in [0, 1]$ (2 dominis).

Exercici 11(e), 11(g) V

- ▶ En $y \in [1, 2\sqrt{2a}]$, usarem que

$$y = \sqrt{4ax} \Leftrightarrow x = \frac{y^2}{4a}$$

i, així,

$$\Omega_1 = \{y \in [1, 2\sqrt{2a}], y^2/4a \leq x \leq 2\}$$

- ▶ En $y \in [0, 1]$ hi ha dos dominis que tenen per frontera $y = \sqrt{2ax - x^2}$ i $x \in [0, 2a]$. L'equació

$$y = \sqrt{2ax - x^2} \Leftrightarrow y^2 - 2ax + x^2 = 0 \Leftrightarrow x = a \pm \sqrt{a^2 - y^2}$$

ens dona els dos extrems dels dos dominis:

$$\Omega_2 = \{y \in [0, 1], a + \sqrt{a^2 - y^2} \leq x \leq 2\}$$

i

$$\Omega_3 = \{y \in [0, 1], y^2/4a \leq x \leq a - \sqrt{a^2 - y^2}\}$$

Exercici 14(a), 14(c) I

Per a les regions de \mathbb{R}^3 indicades escriviu la integral triple

$\iiint_A f(x, y, z) dx dy dz$ en termes d'integrals iterades preses en diferents ordres.

- a) A tetraedre limitat pels plans $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$,
 $2x + 3y + 4z = 12$. El tetràedre talla els eixos en el triangle definit pels punts

$$(6, 0, 0), \quad (0, 4, 0), \quad (0, 0, 3)$$

i ve expressat per les relacions

$$A = \{x \in [0, 6], y \in [0, 4], z \in [0, 3], 2x + 3y + 4z \leq 12\}$$

Anem a expressar el domini començant per x :

Exercici 14(a), 14(c) II

- ▶ x es pot moure en l'interval $[0, 6]$,
- ▶ y queda limitada per $y \in [0, 4]$, $3y \leq 12 - 2x - 4z$ i $z \in [0, 3]$
per tant,

$$y \in \left[0, 4 - \frac{2}{3}x\right]$$

- ▶ Finalment, z queda limitada per $z \in [0, 3]$ i $4z \leq 12 - 2x - 3y$:

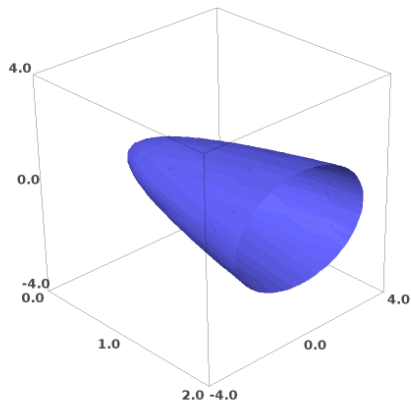
$$z \in \left[0, 3 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}y\right]$$

d'on

$$\iiint_A f(x, y, z) dx dy dz = \int_0^6 dx \int_0^{4 - \frac{2}{3}x} dy \int_0^{3 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}y} f(x, y, z) dz$$

- c) A cos limitat per les superfícies $y^2 + 2z^2 = 4x$, $x = 2$.

Exercici 14(a), 14(c) III



Exercici 14(a), 14(c) IV

- ▶ Certament, l'ordre més senzill és començar per x

$$\int dx \int dy \int dz \text{ o bé } \int dx \int dz \int dy$$

Exerici 15(e) I

Calculeu les integrals triples següents en les regions de \mathbb{R}^3 que s'indiquen.

e) $\iiint_A x dx dy dz$, A tetraedre limitat pels plans $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ ($a, b, c > 0$). (Solució: $\frac{a^2bc}{24}$.)

Com hem fet en el problema anterior, recordem que aquest domini és equivalent a

$$A = \left\{ x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \leq 1 \right\}$$

que és el tetràedre de vèrtexos

$$(0, 0, 0), (a, 0, 0), (0, b, 0), (0, 0, c)$$

Exerici 15(e) II

Volem deixar la integració respecte x per al final, per tant, podem intentar l'ordre

$$\int dx \int dy \int x dz$$

en la parametrització adequada del domini

$$A = \left\{ x \in [0, a], 0 \leq y \leq b - \frac{bx}{a}, 0 \leq z \leq c - \frac{cx}{a} - \frac{cy}{b} \right\}$$

Així doncs, la integral s'expressa com

$$\int_0^a dx \int_0^{b - \frac{bx}{a}} dy \int_0^{c - \frac{cx}{a} - \frac{cy}{b}} x dz$$

Exerici 15(e) III

i anem a fer-les totes. En primer lloc integrem respecte z

$$\int_0^{c - \frac{cx}{a} - \frac{cy}{b}} x dz = x \left(c - \frac{cx}{a} - \frac{cy}{b} \right)$$

Exercici 15(e) IV

ara respecte y el que acabem d'obtenir

$$\begin{aligned}
 \int_0^{b-\frac{bx}{a}} x \left(c - \frac{cx}{a} - \frac{cy}{b} \right) dy &= x \left(c - \frac{cx}{a} \right) \left(b - \frac{bx}{a} \right) \\
 - \frac{cx}{b} \underbrace{\int_0^{b-\frac{bx}{a}} y dy}_{\frac{1}{2} \left(b - \frac{bx}{a} \right)^2} &= x \left(c - \frac{cx}{a} \right) \left(b - \frac{bx}{a} \right) - \frac{cx}{2b} \left(b - \frac{bx}{a} \right)^2 = \\
 \left(b - \frac{bx}{a} \right) \left(x \left(c - \frac{cx}{a} \right) - \frac{cx}{2b} \left(b - \frac{bx}{a} \right) \right) &= \\
 \left(b - \frac{bx}{a} \right) \left(x \left(c - \frac{cx}{a} \right) - \frac{x}{2} \left(c - \frac{cx}{a} \right) \right) &= \\
 \left(b - \frac{bx}{a} \right) \left(c - \frac{cx}{a} \right) \left(x - \frac{x}{2} \right) &= bc \left(1 - \frac{x}{a} \right)^2 \frac{x}{2}
 \end{aligned}$$

Exerici 15(e) V

Finalment, fem la integració respecte x :

$$\int_0^a bc \left(1 - \frac{x}{a}\right)^2 \frac{x}{2} dx = \int_0^a \left(\frac{1}{2} bcx - \frac{bcx^2}{a} + \frac{bcx^3}{2a^2}\right) dx =$$
$$\left[\frac{(6a^2x^2 - 8ax^3 + 3x^4)bc}{24a^2} \right]_0^a = \frac{1}{24} a^2 bc$$

Canvis de variables a \mathbb{R} (Repàs Càlcul I) I

Recordem canvi de variable de \mathbb{R} per a integrals indefinides

$$\int \frac{\log^2 x}{x} dx = \left(\begin{array}{l} u = \log x \\ x = e^u \\ dx = e^u du = x du \end{array} \right) = \int \frac{u^2}{e^u} e^u du =$$

$$\int u^2 du = \frac{u^3}{3} + C = \frac{\log^3 x}{3} + C$$

i per a integrals definides, cal considerar com canvien els extrems:

$$\int_1^e \frac{\log^2 x}{x} dx = \left(\begin{array}{lll} u = \log x & x = e^u & dx = e^u du \\ x = e & \rightarrow & u = 1 \\ x = 1 & \rightarrow & u = 0 \end{array} \right) =$$

$$\int_0^1 \frac{u^2}{e^u} e^u du = \int_0^1 u^2 du = \left[\frac{u^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

Canvis de variables a \mathbb{R} (Repàs Càlcul I) II

- ▶ Un canvi de variables és una transformació C^1 , $T : \Omega^* \rightarrow \Omega$

$$x = T(u), \quad T \text{ bijectiva de manera que } u = T^{-1}(x).$$

x és la variable antiga i u , la nova. En l'exemple anterior

$$T(u) = e^u, \quad T^{-1}(x) = \log x, \quad \Omega^* = [0, 1], \quad \Omega = [1, e].$$

- ▶ El teorema del canvi de variables ens diu que

$$\int_{\Omega} f(x) dx = \int_{\Omega^*} f(T(u)) \underbrace{T'(u) du}_{dx}, \text{ en el nostre cas}$$

$$\int_1^e \frac{\log^2 x}{x} dx = \int_0^1 u^2 du.$$

Canvi de variables a \mathbb{R}^n

A \mathbb{R}^n funciona tot igual, però recordant el teorema de la funció inversa entre dominis $T : \Omega^* \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^n$:

Teorema (Canvi de variables a \mathbb{R}^n)

Siguin $\Omega, \Omega^ \subset \mathbb{R}^n$ i*

$$T : \Omega^* \rightarrow \Omega$$

$$u = (u_1, \dots, u_n) \mapsto x = (x_1, \dots, x_n) = T(u)$$

una aplicació bijectiva i de classe C^1 . Aleshores

$$\int_{\Omega} f(x) dx_1 \dots dx_n = \int_{\Omega^*} f(T(u)) \underbrace{\det DT(u)}_{JT(u)} du_1 \dots du_n$$

Es multiplica per la jacobiana $dx = (\text{jacobiana } T) du$.

Canvis de variables a \mathbb{R}^2

Siguin Ω i Ω^* dues regions del pla i $T : \Omega^* \rightarrow \Omega$, (x, y) variables “velles” i (u, v) variables “noves” segons una transformació

$$T(u, v) = (x(u, v), y(u, v)),$$

que sigui de classe C^1 i bijectiva. Aleshores el canvi de variables és

$$\int_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_{\Omega^*} f(x(u, v), y(u, v)) \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{array} \right| du dv$$

Per exemple, si T és una transformació lineal donada per una matriu A

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},$$

aleshores el jacobià és el determinant de la matriu A .

Exemple: Canvi d'unitats

Un canvi d'unitats, per exemple de metres a peus *feet* és una transformació lineal: $x = \kappa u$, per exemple u metres són $\kappa \cdot u$ peus amb $\kappa = 3.2808399$.

$$T(u_1, \dots, u_n) = \kappa(u_1, \dots, u_n) = (\kappa u_1, \dots, \kappa u_n)$$

i, per tant, el seu jacobinà és κ^n . Així, per tant $\Omega^* = \kappa\Omega$

$$\int_{\Omega} f(x) dx_1 \dots dx_n = \kappa^n \int_{\Omega^*} f(\kappa u) du_1 \dots du_n.$$

En particular, per a dominis al pla,

$$\text{Àrea}(\Omega) \text{ft}^2 = \kappa^2 \text{Àrea}(\Omega) \text{m}^2 = \frac{729}{64} \text{Àrea}(\Omega) \text{m}^2 \approx 10.764 \text{Àrea}(\Omega) \text{m}^2$$

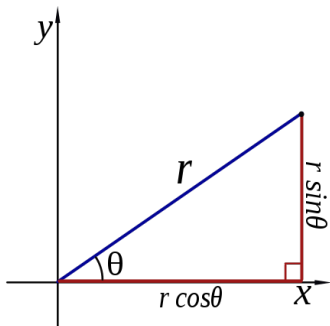
Exemple a \mathbb{R}^2 : coordenades polars

Per a dominis tipus circular, pot ser útil el canvi a polars:

$$T(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$$

de manera que la jacobiana del canvi és el radi:

$$JT(r, \theta) = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -r \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r \cos(\theta) \end{vmatrix} = r$$



Exemple: àrea del cercle

Sigui $\Omega = \{x^2 + y^2 \leq c^2\}$, calculem la seva àrea en polars

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} dx dy &= \left(\begin{array}{l} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ \Omega^* = \{r \in [0, c], \theta \in [0, 2\pi]\} \end{array} \right) = \int_0^r \int_0^{2\pi} r dr d\theta \\ &= \int_0^r r \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) dr = \underbrace{\left(\int_0^r r dr \right)}_{r^2/2} \underbrace{\left(\int_0^{2\pi} d\theta \right)}_{2\pi} = \pi r^2\end{aligned}$$

Trobareu més exemples i gràfiques entenedores a la Wikipedia.

Exemple: àrea de l'el·lipse i polars adaptades

També podem modificar les polars si tenim domins el·lipsoïdals:

$$\Omega = \left\{ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}$$

prenent (r, θ) com a noves variables definides per

$$\begin{cases} x = ar \cos \theta \\ y = br \sin \theta \end{cases}$$

de manera que el nou jacobià és

$$\det JT(a) = \begin{pmatrix} a \cos(\theta) & -ar \sin(\theta) \\ b \sin(\theta) & br \cos(\theta) \end{pmatrix} = abr$$

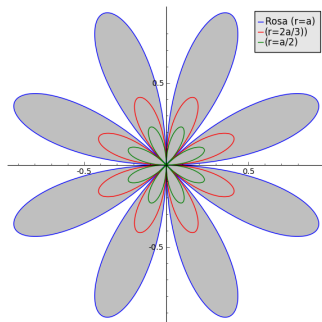
Exercici: Comproveu que l'àrea de l'el·lipse és πab

Exemple: àrea de la rosa de 4 pètals I

Es tracta de l'equació en polars definida per

$$r = a^2 \sin(4\theta)$$

que de fet té vuit pètals...



Exemple: àrea de la rosa de 4 pètals II

El que ens demanen de fet, és l'àrea de la regió en polars

$$\Omega^* = \{\theta \in [0, 2\pi], 0 < r < a^2 \sin 4\theta\}$$

Com que ja ens la donen en polars hem d'integrar la funció 1 sobre el domini definit en polars i usant el terme del jacobià

$$\begin{aligned} \text{Àrea} &= \int_{\Omega^*} r dr d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \underbrace{\int_0^{a^2 \sin 4\theta} r dr}_{\frac{1}{2} a^4 \sin^2(4\theta)} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} a^4 \sin^2(4\theta) d\theta = \\ &= \left[\frac{1}{32} a^4 (8\theta - \sin(8\theta)) \right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2} \pi a^4 \end{aligned}$$

on hem usat $\sin^2 \varphi = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\varphi)$

Exemple corona circular

Exercici

Calculeu $\int_{\Omega} xy$, Ω intersecció amb el primer quadrant de la corona circular de centre $(0,0)$ i radi interior 1 i radi exterior 2. (Sol: $\frac{15}{8}$.)

- ▶ Aquest domini en polars ve donat per

$$\Omega^* = \{r \in [1, 2] \mid \theta \in [0, \pi/2]\}$$

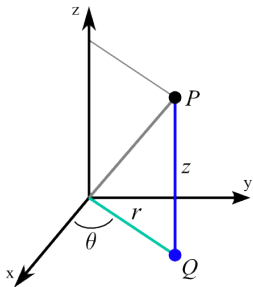
- ▶ Apliquem el canvi de variables de cartesianes a polars

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} xy dx dy &= \int_{\Omega^*} \underbrace{r \cos \theta}_x \underbrace{r \sin \theta}_y \underbrace{r dr d\theta}_{\text{canvi var.}} = \\ &= \int_0^{\pi/2} \underbrace{\cos \theta \sin \theta}_{\frac{1}{2} \sin 2\theta} d\theta \int_1^2 r^3 dr = \underbrace{\left[\frac{-1}{4} \cos 2\theta \right]_0^{\pi/2}}_{1/2} \underbrace{\left[\frac{r^4}{4} \right]_1^2}_{4-1/4} = \frac{15}{8} \end{aligned}$$

Canvis a \mathbb{R}^3 : Coordenades cilíndriques

$$T(r, \theta, z) = (r \cos \theta, r \sin \theta, z) \implies JT(r, \theta) = r$$

$$\int_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_{\Omega^*} f(x(r, \theta, z), y(r, \theta, z), z) r dr d\theta dz$$

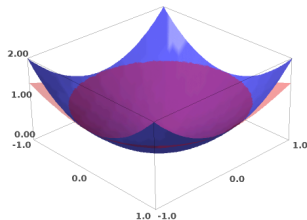


- ▶ $r > 0$ radi.
- ▶ $r = \text{ct.}$ són cilindres infinits.
- ▶ $\theta \in [0, 2\pi)$ angle.
- ▶ z és l'altura.
- ▶ És senzillament aplicar polars al pla (x, y) i deixar la z "intacta".

Exemple de cilíndriques I

Exercici

Calculeu el volum comprès entre el con $z^2 = x^2 + y^2$ i el paraboloides $z = x^2 + y^2$, per $z > 0$.



Exemple de cilíndriques II

- ▶ Es tracta d'un bon exemple on aplicar cilíndriques, perquè el cos té una simetria axial.
- ▶ Els dominis d'integració en cartesianes i cilíndriques, respectivament,

$$\Omega = \{x^2 + y^2 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}\}$$

$$\Omega^* = \{r^2 \leq z \leq r\} = \{r \in [0, 1], \theta \in [0, 2\pi], r^2 \leq z \leq r\}$$

ja que $r^2 \leq r \Leftrightarrow r \in [0, 1]$.

Exemple de cilíndriques III

- ▶ Així podem aplicar directament en cilíndriques per calcular el volum:

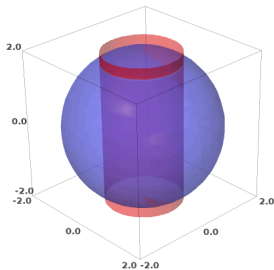
$$\begin{aligned}\text{Vol}(\Omega) &= \int_{\Omega^*} r dr d\theta dz = \int_0^{2\pi} d\theta \left(\int_0^1 \int_0^r r dz \right) = \\ &= 2\pi \int_0^1 r^2 dr = 2\pi \frac{1}{3}\end{aligned}$$

- ▶ En el càlcul de volums on els cossos tinguin simetria axial respecte l'eix $x = y = 0$, l'expressió en cilíndriques no dependrà de θ i podem passar la integral $\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi$ multiplicant al davant.

Exemple: Casquet d'esfera I

Exercici

Part de l'esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ que és exterior al cilindre $x^2 + y^2 = b^2$ ($a > b > 0$).



Exemple: Casquet d'esfera II

- ▶ De nou, és un bon exemple on aplicar cilíndriques, perquè el cos té una simetria axial.
- ▶ Calcularem el volum de $z \geq 0$ i multiplicarem per 2.
- ▶ Els domini d'integració en cartesianes i polars és, respectivament,

$$\Omega = \{z \leq \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, b^2 \leq x^2 + y^2 \leq a^2\}$$

$$\Omega^* = \{z \leq \sqrt{a^2 - r^2}, r \in [b, a], \theta \in [0, 2\pi]\}$$

Exemple: Casquet d'esfera III

- Podem aplicar directament en cilíndriques per calcular el volum:

$$\begin{aligned}\text{Vol}(\Omega) &= \int_{\Omega^*} r dr d\theta dz = \int_0^{2\pi} d\theta \left(\int_b^a \int_0^{\sqrt{a^2-r^2}} r dz \right) = \\ &= 2\pi \int_b^a r (a^2 - r^2)^{\frac{1}{2}} dr = 2\pi \left[\frac{-1}{3} (a^2 - r^2)^{\frac{3}{2}} \right]_b^a = \\ &= 2\pi \frac{-1}{3} \left(0 - (a^2 - b^2)^{3/2} \right) = \frac{2\pi}{3} (a^2 - b^2)^{3/2}\end{aligned}$$

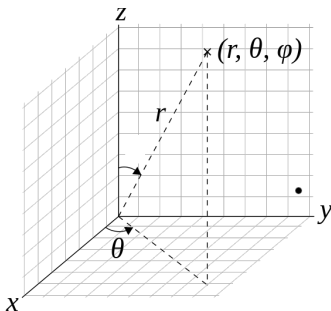
- Per tant, el volum del cos és

$$\frac{4\pi}{3} (a^2 - b^2)^{3/2}.$$

Coordenades Esfèriques

$$T(r, \theta, \varphi) = (r \cos \theta \cos \varphi, r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \varphi), JT(r, \theta, \varphi) = r^2 \cos \varphi.$$

que compleix que $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$.



- ▶ $r > 0$ radi. $r = \text{ct.}$, esferes.
- ▶ $\theta \in [0, 2\pi]$ longitud.
- ▶ Meridians $\theta = \text{const.}$
- ▶ $\varphi \in [-\pi/2, \pi/2]$ latitud.
- ▶ Paral·lels $\varphi = \text{const.}$
- ▶ Equador $\varphi = 0$.
- ▶ Pol "nord" $\varphi = \pi/2$
- ▶ Pol "sud" $\varphi = -\pi/2$.

Exemple d'esfèriques I

Exercici

Calculeu el volum de $\mathcal{B}_R^3(0)$, l'interior de l'esfera de radi R a \mathbb{R}^3 .

- ▶ Es tracta d'un bon (el millor) exemple on aplicar esfèriques, perquè el cos té una simetria puntual respecte l'origen.
- ▶ Els dominis d'integració en cartesianes i esfèriques, respectivament,

$$\Omega = \{x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$$

$$\Omega^* = \{r \in [0, R], \theta \in [0, 2\pi], \varphi \in [-\pi/2, \pi/2]\}$$

ja que $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

Exemple d'esfèriques II

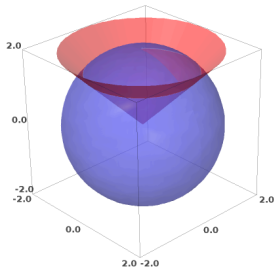
- Podem plantejar directament la integral en esfèriques per calcular el volum:

$$\begin{aligned}\text{Vol}(\Omega) &= \int_{\Omega^*} \underbrace{r^2 \cos \varphi}_{\text{jacobià}} dr d\theta d\varphi = \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \varphi d\varphi \int_0^R r^2 dr = 2\pi \cdot 2 \cdot \frac{R^3}{3} = \frac{4}{3}\pi R^3\end{aligned}$$

Exemple d'aplicació d'esfèriques I

Exercici

Calculeu el volum del domini Ω tallat sobre la bola $r \leq a$ pel con $\alpha \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ ($a > 0$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$). (Sol.: $\frac{2\pi a^3}{3}(1 - \sin \alpha)$.)



Exemple d'aplicació d'esfèriques II

En esfèriques, el domini Ω ve donat per

$$\Omega^* = \left\{ r \in [0, a], \varphi \in \left[\alpha, \frac{\pi}{2} \right], \theta \in [0, 2\pi] \right\}$$

i, per tant, podem calcular directament el seu volum en cilíndriques

$$\begin{aligned} \text{Vol}(\Omega) &= \int_{\Omega^*} \underbrace{r^2 \cos \varphi}_{\text{jacobiana}} dr d\theta d\varphi = \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r^2 dr \int_{\alpha}^{\pi/2} \cos \varphi d\varphi = 2\pi \cdot \frac{a^3}{3} \left(\sin \frac{\pi}{2} - \sin \alpha \right) = \\ &= \frac{2\pi a^3}{3} (1 - \sin \alpha) \end{aligned}$$

Problema 16 (c), (d) i (g) I

Useu coordenades polars per calcular les següents integrals dobles.

(c) $\iint_A \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2+2} dx dy$, $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

En polars, el domini és $A^* = \{\theta \in [0, 2\pi], r \in (0, 1]\}$. Així

$$\begin{aligned} \iint_A \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2+2} dx dy &= \iint_{A^*} \frac{r^2(\cos \theta + \sin \theta)^2}{r^2+2} r dr d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} (\cos \theta + \sin \theta)^2 d\theta \int_0^1 \frac{r^3}{r^2+2} dr \end{aligned}$$

Problema 16 (c), (d) i (g) II

Fem cadascuna de les integrals

$$\int_0^{2\pi} (\cos \theta + \sin \theta)^2 d\theta = \int_0^{2\pi} \underbrace{(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)}_1 + \underbrace{2 \sin \theta \cos \theta}_{\sin 2\theta} d\theta =$$

$$\int_0^{2\pi} d\theta + \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin 2\theta d\theta}_0 = 2\pi$$

i, per altra banda,

$$\int_0^1 \frac{r^3}{r^2 + 2} dr = \int_0^1 \left(r - \frac{2r}{r^2 + 2} \right) dr = \left[\frac{1}{2} r^2 - \log(r^2 + 2) \right]_0^1 =$$

$$\frac{1}{2} - \log 3 + \log 2 = \frac{1}{2} + \log \frac{2}{3}$$

Problema 16 (c), (d) i (g) III

$$(d) \iint_A \frac{dx dy}{(1+x^2+y^2)^2 \sqrt{x^2+y^2}},$$

$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq R^2\}$. En polars, el domini és

$$A^* = \{\theta \in [0, 2\pi], r \in (0, R]\}.$$

Així

$$\iint_A \frac{dx dy}{(1+x^2+y^2)^2 \sqrt{x^2+y^2}} = \iint_{A^*} \frac{r}{(1+r^2)^2 r} dr d\theta =$$

$$(\text{no hi ha } \theta) = 2\pi \int_0^R \frac{1}{(1+r^2)^2} dr =$$

$$2\pi \left[\frac{r}{2(r^2+1)} + \frac{1}{2} \arctan(r) \right]_0^R = \frac{\pi R}{(R^2+1)} + \pi \arctan(R)$$

Problema 16 (c), (d) i (g) IV

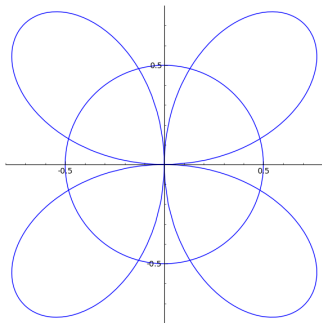
- (g) $\iint_A x(x^2 + y^2) dx dy$, A sector circular de centre $(0, 0)$ i radi R formant angles entre $\frac{\pi}{3}$ i $\frac{\pi}{6}$ amb l'eix x positiu.
En polars, el domini és $A^* = \{\theta \in [\pi/6, \pi/3], r \in (0, R]\}$. Així

$$\begin{aligned} \iint_A x(x^2 + y^2) dx dy &= \\ \iint_{A^*} r \cos \theta r^2 r dr d\theta &= \int_{\pi/6}^{\pi/3} \cos \theta d\theta \int_0^R r^4 dr [\sin \theta]_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{R^5}{5} = \\ &= \left(\frac{1}{2} \sqrt{3} - \frac{1}{2} \right) \frac{R^5}{5} = \frac{\sqrt{3} - 1}{10} R^5 \end{aligned}$$

Problema 17 (c) I

Calculeu les àrees dels dominis $A \subset \mathbb{R}^2$ definits en coordenades polars, $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, que s'indiquen tot seguit.

- (c) A regió definida per $\frac{1}{2} \leq r \leq |\sin(2\theta)|$. (Indicació: Cal $|\sin(2\theta)| \geq \frac{1}{2}$ perquè tingui sentit.) (Sol: $\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4}$.)



Problema 17 (c) II

- ▶ El domini té una simetria respecte els eixos X i Y i, per tant, podem calcular l'àrea al primer quadrant $\theta \in [0, \pi/2]$ on, a més, el $\sin 2\theta$ és positiu
- ▶ Caldrà que trobem els valors de $\theta \in [0, \pi/2]$ per als quals

$$\sin 2\theta = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2\theta = \frac{\pi}{6}, \pi - \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}$$

- ▶ Domini en polars que descriu la part al 1er quadrant és, doncs,

$$\Omega^* = \left\{ \theta \in \left[\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12} \right], \frac{1}{2} \leq r \leq |\sin(2\theta)| \right\}$$

Problema 17 (c) III

- ▶ Per tant, l'àrea d'una quarta part de la figura serà

$$\begin{aligned}\int_{\Omega^*} r dr d\theta &= \int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{5\pi}{12}} d\theta \int_{1/2}^{\sin 2\theta} r dr = \int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{5\pi}{12}} \frac{1}{2} \left(\sin^2 2\theta - \frac{1}{4} \right) d\theta = \\ &= \left[\frac{1}{8} \theta - \frac{1}{16} \sin(4\theta) \right]_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{5\pi}{12}} = \frac{1}{24} \pi + \frac{1}{48} (3\sqrt{3})\end{aligned}$$

- ▶ El resultat final serà multiplicar per quatre : $Volum = \frac{\pi}{6} + \frac{1}{4} \sqrt{3}$.

Problema 19(b) i 19(e) I

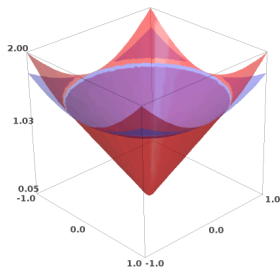
Useu coordenades cilíndriques per calcular les següents integrals triples.

$$(b) \iiint_B z e^{-(x^2+y^2)} dx dy dz,$$

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 - 1 \leq x^2 + y^2 \leq \frac{z^2}{2}, z \geq 0\}.$$

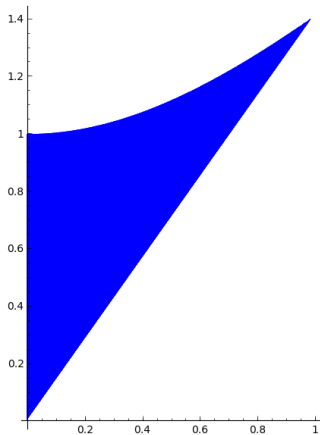
$$(\text{Solució: } \frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{2e} - \frac{\pi}{\sqrt{e}}.)$$

Problema 19(b) i 19(e) II



- ▶ El domini es adequat per a cilíndriques perquè és de revolució.
- ▶ Geomètricament, és el domini entre un con i un paraboloides, que, en el pla (r, z) ve donat per

Problema 19(b) i 19(e) III



Problema 19(b) i 19(e) IV

- ▶ En cilíndriques el domini s'expressa com

$$B^* = \left\{ z^2 - 1 \leq r^2 \leq \frac{z^2}{2}, z \geq 0, \theta \in [0, 2\pi] \right\}$$

- ▶ Per poder calcular la integral cal que l'expressem com a producte d'intervals cal que determinem per a quins valors de $z \geq 0$ tenim que

$$z^2 - 1 \leq \frac{z^2}{2} \Leftrightarrow 0 \leq 1 - \frac{z^2}{2} \Leftrightarrow z \in [0, \sqrt{2}]$$

- ▶ Per altra banda, els valors de r , les desigualtats anteriors també les podem expressar com

$$B^* = \left\{ \theta \in [0, 2\pi], r \in [0, 1], z \in [\sqrt{2}r, \sqrt{r^2 + 1}] \right\}$$

Problema 19(b) i 19(e) V

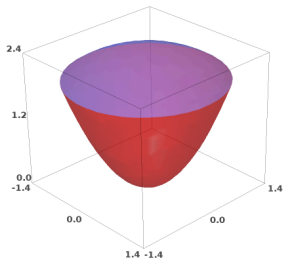
- La integral en coordenades cilíndriques s'escriu com

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 e^{-r^2} r dr \int_{\sqrt{2}r}^{\sqrt{r^2+1}} z dr &= \\ 2\pi \int_0^1 e^{-r^2} r \left(-\frac{1}{2} r^2 + \frac{1}{2} \right) dr &= \\ 2\pi \int_0^1 \left(-\frac{1}{2} r^3 e^{-r^2} + \frac{1}{2} r e^{-r^2} \right) dr &= \\ &= 2\pi \left[\frac{1}{4} r^2 e^{-r^2} \right]_0^1 = 2\pi \frac{1}{4} e^{-1} \end{aligned}$$

(e) $\iiint_B z dx dy dz,$
 $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 6, x^2 + y^2 \leq z, z \geq 0\}.$

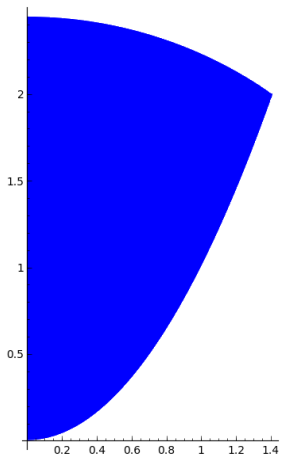
Problema 19(b) i 19(e) VI

- ▶ Aquest domini és limitat entre una esfera de radi $\sqrt{6}$, per sota, el paraboloides el·líptic $z = x^2 + y^2$.



- ▶ Es tracta d'un volum de revolució que, en el pla (r, z) ve donat per

Problema 19(b) i 19(e) VII



Problema 19(b) i 19(e) VIII

- ▶ La seva intersecció és donada a

$$z + z^2 = 6, \Leftrightarrow z = -3, 2$$

- ▶ Com que estem considerant $z \geq 0$, el domini per a la z serà $z \in [0, 2]$, per una part, i per $z \in [2, \sqrt{6}]$, per l'altra.
- ▶ En cilíndriques el domini s'expressa com

$$B^* = B_1^* \cup B_2^* = \{ \theta \in [0, 2\pi], z \in [0, 2], r \in (0, \sqrt{z}) \} \cup \\ \{ \theta \in [0, 2\pi], z \in [2, \sqrt{6}], r \in (0, \sqrt{6 - z^2}) \}$$

- ▶ Alternativament, també podem parametritzar el domini com

$$B^* = \{ \theta \in [0, 2\pi], r \in (0, \sqrt{2}], r^2 \leq z \leq \sqrt{6 - r^2} \}$$

Problema 19(b) i 19(e) IX

- Aplicar Fubini ens porta a una sola integral:

$$\begin{aligned} I &= \int_{B^*} z r dr d\theta dz = 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} r dr \int_{r^2}^{\sqrt{6-r^2}} z dz = \\ &2\pi \int_0^{\sqrt{2}} r \frac{1}{2} (6 - r^2 - r^4) dr = \pi \int_0^{\sqrt{2}} (6r - r^3 - r^5) dr = \\ &\pi \left(3(\sqrt{2})^2 - \frac{1}{4}(\sqrt{2})^4 - -\frac{1}{6}(\sqrt{2})^6 \right) = \pi \left(6 - \frac{4}{4} - \frac{8}{6} \right) = \frac{11\pi}{3} \end{aligned}$$

Problema 20(c) I

Useu coordenades esfèriques per calcular les següents integrals triples.

$$(c) \iiint_B \frac{dx dy dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}},$$

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq b^2\}.$$

- ▶ Geomètricament es tracta del volum comprès entre dues esferes de radi a i radi b .
- ▶ Tant l'integrand com el domini són molt adequats per a esfèriques.

Problema 20(c) II

- Podem escriure la integral en polars usant que el domini s'expressa com

$$B^* = \{r \in [a, b], \theta \in [0, 2\pi], \varphi \in [-\pi/2, \pi/2]\}$$

i que, $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, $dx dy dz = r^2 \cos \varphi dr d\theta d\varphi$.

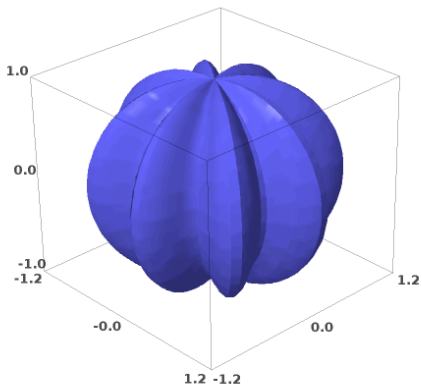
$$\begin{aligned} \iiint_B \frac{dx dy dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} dx dy dz &= \int_{B^*} \frac{r^2 \cos \varphi}{r^3} dr d\theta d\varphi = \\ \int_{B^*} \cos \varphi r^{-1} dr d\theta d\varphi &= 2\pi \int_a^b r^{-1} dr \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \varphi d\varphi = \\ &= 2\pi \log \frac{b}{a} \cdot 2 = 4\pi \log \frac{b}{a} \end{aligned}$$

Problema 21 (b) i (c) I

Calculeu els volums dels dominis $B \subset \mathbb{R}^3$ definits en coordenades esfèriques, $x = r \cos \varphi \cos \theta$, $y = r \cos \varphi \sin \theta$, $z = r \sin \varphi$ ($0 < \theta < 2\pi$, $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$), que s'indiquen tot seguit.

- (b) B volum tancat per l'esfera deformada definida per $r = 1 + 0.2 \sin(8\theta) \sin(\varphi)$. (Solució: 1.36π .)

Problema 21 (b) i (c) II



Problema 21 (b) i (c) III

$$\begin{aligned}
 \text{Vol}(B) &= \int_{B^*} r^2 \cos \varphi dr d\theta d\varphi = \\
 &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \varphi d\varphi \int_0^{1+0.2 \sin(8\theta) \sin(\varphi)} r^2 dr = \\
 &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \varphi \left(\frac{1}{375} \sin(\varphi)^3 \sin(8\theta)^3 + \right. \\
 &\quad \left. \frac{1}{25} \sin(\varphi)^2 \sin(8\theta)^2 + \frac{1}{5} \sin(\varphi) \sin(8\theta) + \frac{1}{3} \right) d\varphi = \\
 &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{2}{75} \sin(8\theta)^2 + \frac{2}{3} \right) d\theta = \frac{34}{25} \pi = 1.36\pi
 \end{aligned}$$

Problema 21 (b) i (c) IV

(c) Anàlogament, calculeu la integral triple

$$\iiint_B \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dx dy dz, \text{ on } B \text{ és la regió de } \mathbb{R}^3 \text{ acotada}$$

pels cons $\varphi = \frac{\pi}{4}$ i $\varphi = \arctan(2) \approx 1.12$ i l'esfera $r = \sqrt{6}$.

(Recordeu: $\sin(\arctan(a)) = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$.) (Solució: $6\pi(\frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{\sqrt{2}}{2})$.)

El domini en esfèriques s'expressa com

$$B^* = \left\{ \theta \in [0, 2\pi], r \in (0, \sqrt{6}), \varphi \in [\pi/4, \arctan 2] \right\}$$

Problema 21 (b) i (c) V

$$\begin{aligned}
 \iiint_B \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dx dy dz &= \int_{B^*} \frac{1}{r} r^2 \cos \varphi dr d\theta d\varphi = \\
 &\int_0^{2\pi} d\theta \int_{\pi/4}^{\arctan 2} \cos \varphi d\varphi \int_0^{\sqrt{6}} r dr = \\
 &2\pi \cdot \left(\underbrace{\sin(\arctan 2)}_{\frac{2}{5}\sqrt{5}} - \underbrace{\sin \frac{\pi}{4}}_{\frac{\sqrt{2}}{2}} \right) \cdot 3 = 6\pi \left(\frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right)
 \end{aligned}$$

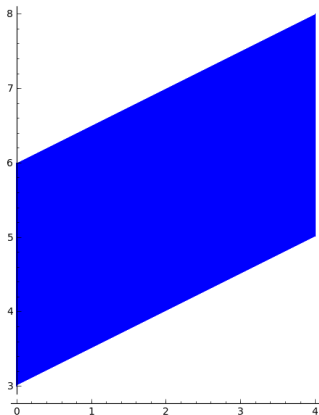
Altres canvis: Problema 18(a), (d) i 18(f) i (g) I

Calculeu les integrals dobles següents mitjançant el canvi de variables que s'indica en cada cas.

(a) $\iint_D xy dx dy,$

$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 6 \leq 2y - x \leq 12, 0 \leq x \leq 4\}$, fent
 $x = 4u$ i $y = 2u + 3v$. (Solució: 624.)

Altres canvis: Problema 18(a), (d) i 18(f) i (g) II



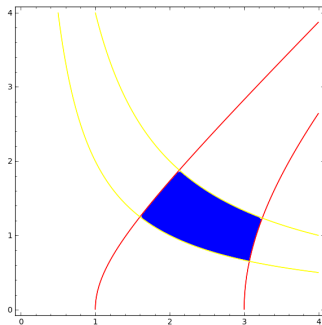
Altres canvis: Problema 18(a), (d) i 18(f) i (g) III

$$(d) \iint_D \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^{3/2} dx dy,$$

$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$, fent $x = ar \cos \theta$ i $y = br \sin \theta$. (Solució: $\frac{2}{5}\pi ab$.) Es tracta d'una el·lipse i podem fer les polars adaptades.

$$(f) \iint_D (x^2 + y^2) dx dy, D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 - y^2 \leq 9, 2 \leq xy \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}, \text{ fent } u = x^2 - y^2 \text{ i } v = 2xy.$$

Altres canvis: Problema 18(a), (d) i 18(f) i (g) IV



- Fem el canvi de variables que s'indica:

$$u = x^2 - y^2, \quad v = 2xy$$

Altres canvis: Problema 18(a), (d) i 18(f) i (g) V

- ▶ En aquestes coordenades, el domini és un rectangle

$$D^* = \{u \in [1, 9], v \in [4, 8]\}$$

- ▶ En aquest canvi de variables, les variables “noves” estan expressades en funció de les “antigues”, però no ens cal conèixer el canvi invers, sinó només el jacobià:

$$T^{-1}(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$$

que té per jacobiana

$$JT^{-1}(x, y) = 4x^2 + 4y^2 = 4(x^2 + y^2) \Rightarrow JT(x, y) = \frac{1}{4x^2 + 4y^2}$$

i per tant, el canvi de variables comporta que

$$dxdy = \frac{1}{4(x^2 + y^2)} dudv.$$

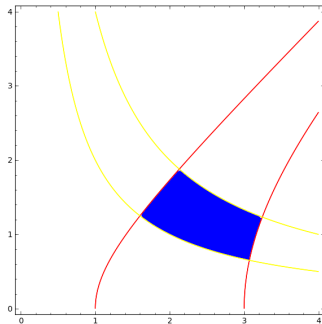
Altres canvis: Problema 18(a), (d) i 18(f) i (g) VI

- ▶ Encara que és complicat expressar-ho en les variables (u, v) com toca, veurem que això no és problemàtic. En efecte, fent el canvi:

$$\begin{aligned}\iint_D (x^2 + y^2) dx dy &= \iint_{D^*} (x^2 + y^2) \frac{1}{4(x^2 + y^2)} du dv = \\ &= \iint_{D^*} \frac{1}{4} du dv = \frac{8 \cdot 4}{4} = 2.\end{aligned}$$

(g) $\iint_D \frac{x + 2xy}{x^2 + y^2} dx dy$, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y \leq x^2 + 1, 1 \leq x^2 + y^2 \leq e^2, x \geq 0\}$, fent $u = x^2 + y^2$ i $v = y - x^2$.

Altres canvis: Problema 18(a), (d) i 18(f) i (g) VII



Altres canvis: Problema 18(a), (d) i 18(f) i (g) VIII

- ▶ És un problema similar a l'anterior. La matriu jacobiana de la inversa T^{-1} en (x, y) és

$$\begin{pmatrix} 2x & 2y \\ -2x & 1 \end{pmatrix}$$

que té per determinant

$$4xy + 2x = 2(2xy + x)$$

que apareix al numerador de l'integrand. En les variables "antigues" el canvi de variables s'expressa com

$$dxdy = \frac{1}{2(2xy + x)} dudv$$

Altres canvis: Problema 18(a), (d) i 18(f) i (g) IX

- ▶ A les noves coordenades, el domini s'expressa com

$$D^* = \{u \in [1, e^2], v \in [0, 1]\}$$

ja que $x^2 \leq y \leq 1 + x^2$ comporta que $0 \leq y - x^2 \leq 1$.

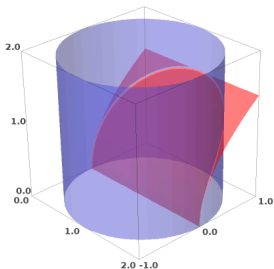
- ▶ El canvi de la integral és

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{x + 2xy}{x^2 + y^2} dx dy &= \iint_{D^*} \frac{x + 2xy}{u} \frac{1}{2(2xy + x)} dudv = \\ &= \int_0^1 dv \int_1^{e^2} \frac{1}{2u} du = 1 \cdot \frac{1}{2} \log(e^2) = 1. \end{aligned}$$

Desplaçament canvis de variables: Problema 15 I

Calculeu les integrals triples següents en les regions de \mathbb{R}^3 que s'indiquen.

- (a) $\int_A xz dx dy dz$, A limitat pel cilindre de base circular $x^2 + y^2 - 2x = 0$ i la superfície $z^2 = 2y$ ($y, z \geq 0$). (Sol: $\frac{2}{3}$.)



Desplaçament canvis de variables: Problema 15 II

- ▶ Es tracta d'un cilindre de base en (x, y) i centre en $(1, 0, 0)$ amb radi 1. Sembla adequat fer el canvi de coordenades a cilíndriques desplaçades:

$$x = 1 + r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

que té el mateix Jacobià que les cilíndriques, és a dir r .

- ▶ En aquestes coordenades el domini A és

$$A = \{r \in [0, 1], \theta \in [0, 2\pi], 0 \leq z^2 \leq 2r \sin \theta\} =$$

$$\{r \in [0, 1], \theta \in [0, \pi], 0 \leq z \leq \sqrt{2r \sin \theta}\}.$$

ja que $y \geq 0$.

Desplaçament canvis de variables: Problema 15 III

- El canvi de variables:

$$\begin{aligned}\int_A xz dx dy dz &= \int_{A^*} (1 + r \cos \theta) z r dr d\theta dz = \\ &= \int_0^1 dr \int_0^\pi d\theta (1 + r \cos \theta) r \int_0^{\sqrt{2r \sin \theta}} z dz = \\ &= \int_0^1 dr \int_0^\pi 2r \sin \theta (1 + r \cos \theta) r d\theta = \frac{2}{3}\end{aligned}$$

Problema 23 (a), (e), (f), (j) i (l) I

Useu coordenades cartesianes, cilíndriques o esfèriques (o bé el principi de Cavalieri) per calcular el volum dels dominis de \mathbb{R}^3 limitats per les superfícies que s'indiquen.

1. $x^2 + z^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 1$. (Solució: $\frac{16}{3}$.)
2. $z = x^2 - 4x + 1$, $1 - z = x^2 + y^2$. (Solució: $\pi\sqrt{2}$.)
3. $x^2 = z$, $y^2 = x$, $z^2 = y$, $x^2 = az$, $y^2 = ax$, $z^2 = ay$ ($a > 1$).
(Solució: $\frac{(a-1)^3}{7}$.)
4. $x^2 + y^2 + z^2 = 2a^2$, $z = \frac{x^2 + y^2}{a}$ ($z \geq 0$, $a > 0$). (Solució:
 $2\pi a^3(\frac{2^{3/2}}{3} - \frac{7}{12})$.)
5. Con de gelat definit per $x^2 + y^2 \leq \frac{1}{5}z^2$,
 $0 \leq z \leq 5 + \sqrt{5 - x^2 - y^2}$.

Aplicacions de la integral

Ja hem vist que la integral ens permet calcular l'àrea d'un placa D i volum d'un cos W usant les fórmules:

$$A(D) = \int_D 1, \quad V(W) = \int_W 1.$$

Veurem com s'usa la integral per definir altres mesures d'interès:

- ▶ La mitjana d'una funció sobre un domini (per exemple, la temperatura mitjana d'un cos).
- ▶ La massa d'un cos en funció de la densitat.
- ▶ El centre geomètric d'un cos, com ara el baricentre d'un triangle.
- ▶ El centre de masses d'un cos.
- ▶ Els moments d'inèrcia de cossos.

Mitjana d'una funció I

La mitjana d'una funció escalar sobre un domini és la integral de la funció dividida per la mesura:

- ▶ Per una funció $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, la seva mitjana $v_m(f)$ és:

$$v_m(f) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x).$$

- ▶ Per una funció $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, la seva mitjana $v_m(f)$ és:

$$v_m(f) = \frac{1}{A(D)} \int_D f(x, y).$$

- ▶ Per una funció $f : W \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, la seva mitjana $v_m(f)$ és:

$$v_m(f) = \frac{1}{V(W)} \int_W f(x, y, z).$$

Mitjana d'una funció II

Exercici

Sigui $f(x, y, z)$ la distància al quadrat del punt (x, y, z) al punt $(0, 0, c)$. Calculeu la mitjana de f sobre la bola de radi R centrada a l'origen de coordenades. Sol.: $v_m(f) = \frac{3}{5}R^2 + c^2$.

La funció distància al quadrat al punt $(0, 0, c)$ ve donada per

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + (z - c)^2$$

i, per tant, la mitjana de f sobre el cos W és

$$v_m(f) = \frac{1}{V(W)} \int_W f(x, y, z) = \frac{3}{4\pi R^3} \int_W (x^2 + y^2 + (z - c)^2) dx dy dz$$

Mitjana d'una funció III

Fent el canvi a esfèriques, $W^* = r < R$:

$$\begin{aligned}
 v_m(f) &= \frac{3}{4\pi R^3} \int_{W^*} (r^2 \cos \varphi + (r \sin \varphi - c)^2) r^2 \cos \varphi \, dr d\theta d\varphi = \\
 &= \frac{3}{4\pi R^3} \int_{W^*} (r^2 + c^2 - 2cr \sin \varphi) r^2 \cos \varphi \, dr d\theta d\varphi = \\
 &= \frac{3}{4\pi R^3} \int_{W^*} (r^4 \cos \varphi + c^2 r^2 \cos \varphi - 2cr^3 \sin \varphi \cos \varphi) \, dr d\theta d\varphi = \\
 &= \frac{3}{2R^3} \underbrace{\int_0^R r^4 \, dr}_{R^5/5} \underbrace{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \varphi \, d\varphi}_2 + \frac{3}{2R^3} c^2 \underbrace{\int_0^R r^2 \, dr}_{R^3/3} \underbrace{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \varphi \, d\varphi}_2 \\
 &\quad - \frac{3}{2R^3} 2c \underbrace{\int_0^R r^4 \, dr}_{R^5/5} \underbrace{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin \varphi \cos \varphi \, d\varphi}_0 = \frac{3}{5} R^2 + c^2.
 \end{aligned}$$

Mitjana de la distància al centre I

Exercici “extra”

Calculeu el promig de la funció “distància al centre” definida sobre una bola de radi R i comproveu que no és igual a $R/2$. *Solució:* $3R/4$.

Si B_R és aquesta bola (suposant-la centrada a l'origen), la funció distància al centre és

$$f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

i la mitjana sobre la bola de radi R és

$$v_m(f) := \frac{1}{\text{Vol}(B_R)} \int_{B_R} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz$$

Mitjana de la distància al centre II

Podem fer el canvi a coordenades esfèriques:

$$x = r \cos \phi \sin \theta$$

$$y = r \sin \phi \sin \theta$$

$$z = r \cos \theta$$

Per tant, i com que el volum de B_R és $4\pi R^3/3$,

$$v_m(f) = \frac{3}{4\pi R^3} \int_{B_R^*} r r^2 \cos \phi dr d\theta d\phi$$

on $B_R^* = \{r \leq R, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \phi \leq 2\pi\}$. Ara

$$\int_{B_R^*} r^3 |\sin \theta| dr d\theta d\phi = \underbrace{\int_0^R r^3 dr}_{R^4/4} \cdot \underbrace{\int_0^{2\pi} d\theta}_{2\pi} \cdot \underbrace{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \phi d\phi}_2 = \pi R^4$$

Mitjana de la distància al centre III

per tant el promig és

$$v_m(f) = \frac{3}{4\pi R^3} \pi R^4 = \frac{3R}{4}$$

Exercici 24

Sigui B la bola de centre $(0, 0, 0)$ i radi R . Denotem per $T(x, y, z)$ la temperatura en el punt (x, y, z) i suposem que és proporcional a la distància del punt a l'origen. En quins punts de B la temperatura coincideix amb la temperatura mitjana de la bola? (Solució: $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{9}{16} R^2$.)

- El problema es pot resoldre a partir de l'anterior.

Mitjana de la distància al centre IV

- ▶ Si la temperatura és proporcional a la distància, i la mitjana de la distància és $3R/4$, aleshores la mitjana de la temperatura és $3kR/4$, essent k la constant de proporcionalitat.
- ▶ Per tant, els punts que tenen temperatura igual a la mitjana són aquells que estan a distància $3Rk/4$ del centre, és a dir:

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{9}{16}R^2$$

Massa d'un cos I

Donats $D \subset \mathbb{R}^2$ i $W \subset \mathbb{R}^3$ conjunts del pla i de l'espai, amb densitats $\rho(x, y)$ i $\rho(x, y, z)$ respectivament. Llavors, la massa de D i W es defineix com

$$m(D) = \int_D \rho(x, y), \quad m(W) = \int_W \rho(x, y, z).$$

Exercici

Calculeu la massa d'una placa quadrada de costat a , on la seva densitat en cada punt és igual al quadrat de la seva distància a un vèrtex. Solució: $m = \frac{2}{3}a^4$.

Massa d'un cos II

- ▶ Podem suposar que el quadrat té vèrtexos $(0, 0)$, $(a, 0)$, $(0, a)$ i (a, a) i que el vèrtex respecte el qual mesurem la distància és l'origen.
- ▶ Així la placa és

$$D = [0, a] \times [0, a]$$

mentre que la densitat és

$$\rho(x, y) = x^2 + y^2$$

Massa d'un cos III

- ▶ Apliquem la fórmula de la massa:

$$\begin{aligned} m(D) &= \int_D \rho(x, y) dx dy = \int_D (x^2 + y^2) dx dy = \\ & \int_0^a dy \int_0^a x^2 dx + \int_0^a y^2 dy \int_0^a dx = \\ & a \frac{a^3}{3} + a \frac{a^3}{3} = \frac{2}{3} a^4. \end{aligned}$$

Centre de masses I

Donades n masses puntuals m_1, m_2, \dots, m_n situades en els punt x_1, x_2, \dots, x_n de la recta real. El seu *centre de masses* (CM) es troba en el punt

$$\bar{x} = \frac{m_1 x_1 + \dots + m_n x_n}{m_1 + \dots + m_n}.$$

Aquesta definició es pot estendre a dominis a \mathbb{R} definint per a un interval I de densitat $\rho(x)$ el seu centre de masses (CM) com

$$\bar{x} = \frac{\int_I x \rho(x)}{m(I)}.$$

Per una placa $D \subset \mathbb{R}^2$ de densitat $\rho(x, y)$ el seu CM és

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{\int_D (x, y) \rho(x, y)}{m(D)} = \left(\frac{\int_D x \rho(x, y) dx dy}{m(D)}, \frac{\int_D y \rho(x, y) dx dy}{m(D)} \right).$$

Centre de masses II

Per un cos $W \subset \mathbb{R}^3$ de densitat $\rho(x, y, z)$ el seu CM és

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \frac{\int_W (x, y, z) \rho(x, y, z)}{m(W)}.$$

Centre geomètric I

Quan la densitat és uniforme, és a dir, no depèn del punt, llavors el centre de masses s'anomena *centre geomètric* CG, i tindrem:

- ▶ Per una placa $D \subset \mathbb{R}^2$ el seu CG és

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{\int_I(x, y)}{A(D)}.$$

- ▶ Per un cos $W \subset \mathbb{R}^3$ el seu CG és

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \frac{\int_I(x, y, z)}{V(W)}.$$

Propietats del CM i CG I

1. Si dividim un cos en dues o més parts, el seu CM és el mateix que el que s'obtindria si les masses fossin puntuals i estiguessin concentrades en els CM corresponents. Així, per exemple, si tenim $W = W_1 \cup W_2$, on $(\bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_1)$ i $(\bar{x}_2, \bar{y}_2, \bar{z}_2)$ són respectivament els CM de W_1 i W_2 , llavors:

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \frac{(\bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_1)m(W_1) + (\bar{x}_2, \bar{y}_2, \bar{z}_2)m(W_2)}{m(W)}.$$

2. Si un cos té una simetria (pla, recta, punt,...) respecte la densitat, llavors el CM pertany a l'element de simetria (eix de simetria, revolució, pla...). En particular, si un cos té una simetria, llavors el CG li pertany.

Propietats del CM i CG II

Aplicació

Calculeu el CM d'un cilindre d'alçada h i base circular de radi R , si la seva densitat en cada punt és proporcional a la seva distància a la base. Solució: $(0, 0, \frac{2h}{3})$. Feu el mateix amb el con de les mateixes dimensions.

- ▶ Farem el cas del con, el del cilindre és més senzill.
- ▶ El con (i la densitat que ens proposen) té una simetria de revolució respecte el seu eix, per tant, el CM serà a l'eix de revolució.
- ▶ Així doncs, només cal que calculem la posició del centre de masses en aquest eix.

Propietats del CM i CG III

- ▶ Molts cops, com ara per exemple, és millor expressar el con W a través de les equacions:

$$\frac{x^2 + y^2}{R^2} \leq \frac{z^2}{h^2}, \quad z \leq h$$

la qual cosa comporta que l'eix de revolució és l'eix Z i que la base es troba en el pla $z = h$ (con invertit).

- ▶ En aquestes coordenades, la densitat, proporcional a la distància a la base és

$$\rho(x, y, z) = k|z - h|$$

on k és una constant de proporcionalitat,

Propietats del CM i CG IV

- ▶ Així,

$$\bar{z} = \frac{1}{\text{massa}(W)} \int_W z \underbrace{k(h-z)}_{\rho(x,y,z)} dx dy dz.$$

- ▶ Passarem a coordenades cilíndriques de manera que

$$W^* = \left\{ 0 \leq z \leq h, 0 \leq r \leq \frac{Rz}{h}, 0 \leq \theta \leq 2\pi \right\}$$

Propietats del CM i CG V

i que la integral que ens interessa es converteix en

$$\begin{aligned} \int_W zk(h-z)dx dy dz &= k \int_{W^*} (hz - z^2)rdr d\theta dz = \\ &= k \underbrace{\left(\int_0^{2\pi} d\theta \right)}_{2\pi} \int_0^h (hz - z^2) dz \underbrace{\left(\int_0^{Rz/h} r dr \right)}_{R^2 z^2 / 2h^2} = \\ 2\pi k \int_0^h \frac{R^2}{2h^2} (hz^3 - z^4) dz &= \pi k \frac{R^2}{h^2} \left(h \frac{h^4}{4} - h \frac{h^5}{5} \right) = \pi k R^2 \frac{h^3}{20}. \end{aligned}$$

Propietats del CM i CG VI

- ▶ Finalment, també hem de calcular la massa del con:

$$\begin{aligned} \text{massa}(W) &= \int_W k(h-z) dx dy dz = k \int_{W^*} (h-z) r dr d\theta dz = \\ &= 2\pi \int_0^h (h-z) dz \underbrace{\left(\int_0^{Rz/h} r dr \right)}_{R^2 z^2 / 2h^2} = \end{aligned}$$

$$2\pi k \int_0^h \frac{R^2}{2h^2} (hz^2 - z^3) dz = \pi k \frac{R^2}{h^2} \left(h \frac{h^3}{3} - h \frac{h^4}{4} \right) = \pi k R^2 \frac{h^2}{12}.$$

- ▶ Finalment, la component en z del centre de masses és

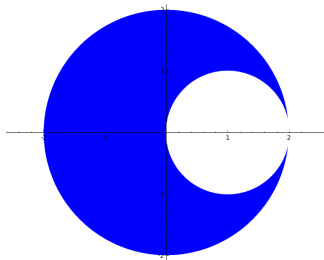
$$\bar{z} = \frac{\pi k R^2 \frac{h^3}{20}}{\pi k R^2 \frac{h^2}{12}} = \frac{3}{5} h$$

Càlcul del CG en figures compostes I

- Suposem que volem calcular el CG d'una regió del tipus

$$\Omega = \{x^2 + y^2 < 4a^2, (x - a)^2 + y^2 > a^2\}$$

que és l'interior d'un cercle centrat a l'origen de radi $2a$ d'on hem tret un cercle centrat a $(a, 0)$ de radi a .



Càlcul del CG en figures compostes II

- A nivell de conjunts:

$$\Omega = \Omega_1 \setminus \Omega_2$$

on els dos cercles són (llevat de la frontera, que no compta)

$$\Omega_1 = \{x^2 + y^2 < 4a^2\}, \quad \Omega_2 = \{(x - a)^2 + y^2 < a^2\}$$

Per simetria, el CG de Ω es troba a l'eix X i

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{\text{Àrea}(\Omega)} \int_{\Omega} x dx dy = \frac{1}{\text{Àrea}(\Omega)} \int_{\Omega_1} x dx dy - \frac{1}{\text{Àrea}(\Omega)} \int_{\Omega_2} x dx dy \\ &= \frac{\text{Àrea}(\Omega_1)}{\text{Àrea}(\Omega)} \text{CG}_x(\Omega_1) - \frac{\text{Àrea}(\Omega_2)}{\text{Àrea}(\Omega)} \text{CG}_x(\Omega_2) \end{aligned}$$

Càlcul del CG en figures compostes III

ja que els centres geomètrics de Ω_1 i Ω_2 són

$$CG_x(\Omega_1) = \frac{1}{\text{Àrea}(\Omega_1)} \int_{\Omega_1} x dx dy$$

$$CG_x(\Omega_2) = \frac{1}{\text{Àrea}(\Omega_2)} \int_{\Omega_2} x dx dy.$$

- Com que els CG de Ω_1 i Ω_2 són els centres corresponents dels cercles, tenim que

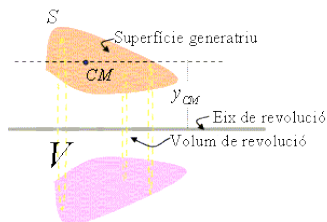
$$\bar{x} = \frac{\text{Àrea}(\Omega_1)}{\text{Àrea}(\Omega)} CG_x(\Omega_1) - \frac{\text{Àrea}(\Omega_2)}{\text{Àrea}(\Omega)} CG_x(\Omega_2) =$$

$$\frac{\text{Àrea}(\Omega_1)CG_x(\Omega_1) - \text{Àrea}(\Omega_2)CG_x(\Omega_2)}{\text{Àrea}(\Omega)} - \frac{\pi a^2}{\pi(4a^2 - a^2)} a = -\frac{a}{3}$$

Segon Teorema de Pappus-Guldin: I

Teorema (Segon de Pappus-Guldin o del centroide)

El volum de revolució d'un cos generat per una placa plana uniforme que gira al voltant d'un eix contingut en el pla que conté la placa i que no la talla, és igual al producte de l'àrea de la placa per la longitud de la circumferència descrit pel seu CG.



Segon Teorema de Pappus-Guldin: II

És a dir, si diem r a l'eix de revolució, $d(r, CG)$ a la distància del CG a l'eix r , W al cos de revolució i D a la placa plana, tindrem

$$V(W) = 2\pi d(r, CG)A(D).$$

Exercici (Volum d'un tor)

En el pla (x, y) consideren una circumferència de radi r centrada en el punt $(R, 0)$, $R > r$, al fer-la girar al voltant de l'eix OY obtenim un tor de revolució. Calculeu el seu volum. Sol: $2\pi^2 r^2 R$.

- ▶ El centre geomètric d'un cercle de radi r és el seu centre.
- ▶ El segon teorema de Pappus-Guldin diu doncs, que el volum del tor és

$$\text{Vol}(W) = 2\pi R \pi r^2 = 2\pi^2 R r^2$$

Segon Teorema de Pappus-Guldin: III

Exercici (ús indirecte per calcular CGs)

Calculeu el centre geomètric d'un quart de disc de radi R centrat a l'origen. Sol: $(\frac{4R}{3\pi}, \frac{4R}{3\pi})$.

- ▶ De la manera com està escrita la solució, s'entén que el domini D és

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > 0, y > 0, x^2 + y^2 \leq R^2\}$$

- ▶ En ser simètric respecte la diagonal del primer quadrant, hi té el centre geomètric al damunt.

Segon Teorema de Pappus-Guldin: IV

- ▶ Si fem girar D respecte l'eix X obtindrem mitja esfera de radi R , de la qual coneixem el volum. Com que també coneixem l'àrea de D aleshores la relació de Pappus-Guldin dóna

$$V(W) = 2\pi d(r, CG)A(D) \Leftrightarrow \frac{2\pi}{3}R^3 = 2\pi d(OX, CG)\frac{1}{4}\pi R^2$$

d'on obtenim que

$$d(OX, CG) = \frac{4R}{3\pi}$$

- ▶ Per tant, el CG és, en aquestes coordenades, $(\frac{4R}{3\pi}, \frac{4R}{3\pi})$.

Problema 25 (a) i (b) I

Trobeu el centre de masses de les regions planes següents amb les densitats que s'indiquen.

- (a) Sector pla definit per una corona de radi interior a i radi exterior A , un angle d'obertura 2α i que és simètrica respecte de l'eix x positiu, suposant densitat constant $\rho(x, y) = 1$.

(Solució: $(\frac{2}{3} \frac{\sin \alpha}{\alpha} \frac{A^3 - a^3}{A^2 - a^2}, 0)$.)

- ▶ El domini W és simètric respecte l'eix x i, per tant, el CM (o CG) es troba a l'eix x i, $\bar{y} = 0$.
- ▶ L'àrea del domini és clara i val

$$\text{àrea}(W) = \alpha (A^2 - a^2).$$

- ▶ En polars el domini s'expressa com $\theta \in (-\alpha, \alpha)$ i $r \in [a, A]$.

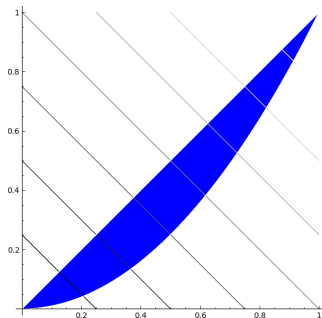
Problema 25 (a) i (b) II

- La component x del CG és

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{1}{\text{àrea}(W)} \int_W x dx dy = \frac{1}{\alpha(A^2 - a^2)} \int_{W^*} r \cos \theta r dr d\theta = \\ &= \frac{1}{\alpha(A^2 - a^2)} \int_a^A r^2 dr \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos \theta d\theta = \frac{A^3 - a^3}{3\alpha(A^2 - a^2)} 2 \sin \alpha = \\ &= \frac{2 \sin \alpha}{3} \frac{A^3 - a^3}{A^2 - a^2}\end{aligned}$$

- (b) Regió entre $y = x^2$ i $y = x$ amb $\rho(x, y) = x + y$.

Problema 25 (a) i (b) III



- ▶ La peça no té simetries, així que hem de calcular tant \bar{x} com \bar{y} .
- ▶ El domini és

$$W = \{x, y \in \mathbb{R}, x \in [0, 1], x^2 \leq y \leq x\}$$

Problema 25 (a) i (b) IV

- Comencem calculant la massa

$$\begin{aligned} \text{massa}(W) &= \int_W (x + y) dx dy = \int_W x dx dy + \int_W y dx dy = \\ &= \int_0^1 x dx \int_{x^2}^x dy + \int_0^1 dx \int_{x^2}^x y dy = \\ &= \int_0^1 (x^2 - x^3) dx + \int_0^1 \frac{1}{2} (x^2 - x^4) dx = \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) = \frac{1}{12} + \frac{1}{15} = \frac{9}{60} = \frac{3}{20} \end{aligned}$$

Problema 25 (a) i (b) V

- Calculem \bar{x} :

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{20}{3} \int_W x(x+y) dx dy = \frac{20}{3} \int_W x^2 dx dy + \frac{20}{3} \int_W y x dx dy = \\ &\quad \frac{20}{3} \int_0^1 x^2 dx \int_{x^2}^x dy + \frac{20}{3} \int_0^1 x dx \int_{x^2}^x y dy = \\ &\quad \frac{20}{3} \int_0^1 (x^3 - x^4) dx + \frac{20}{3} \int_0^1 \frac{1}{2} (x^3 - x^5) dx = \\ &\quad \frac{20}{3} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6} \right) \right) = \frac{20}{3} \left(\frac{1}{20} + \frac{1}{24} \right) = \frac{20}{3} \frac{11}{120} = \frac{11}{18}\end{aligned}$$

Problema 25 (a) i (b) VI

- Calculem \bar{y} :

$$\bar{y} = \frac{20}{3} \int_W y(x+y) dx dy = \frac{20}{3} \int_W y^2 dx dy + \underbrace{\frac{20}{3} \int_W yx dx dy}_{\frac{1}{24}} =$$

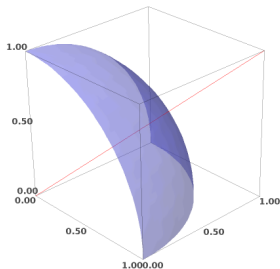
$$\frac{20}{3} \int_0^1 x^2 dx \int_{x^2}^x y^2 dy + \frac{1}{24} = \frac{20}{3} \int_0^1 \frac{1}{3} (x^4 - x^6) dx + \frac{1}{24}$$

$$\frac{20}{3} \left(\frac{1}{3} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) + \frac{1}{24} \right) = \frac{20}{3} \left(\frac{1}{3} \frac{2}{35} + \frac{1}{24} \right) = \dots$$

Problema 26 (a) i (c) I

En cadascun dels casos següents, trobeu el centre de masses dels sòlid A suposant distribució de masses homogènia.

- (a) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$.
(Solució: $(\frac{3R}{8}, \frac{3R}{8}, \frac{3R}{8})$.)



Problema 26 (a) i (c) II

- ▶ Clarament es troba a la recta $x = y = z$.
- ▶ Passarem a coordenades esfèriques

$$W = \{\theta \in [0, \pi/2], \varphi \in [0, \pi/2], r \in [0, R]\}$$

- ▶ El volum n'és $\pi R^3/6$ ja que és un octant d'esfera.
- ▶ Calculem la posició de \bar{z} , per exemple,

$$\begin{aligned} \int_W z dx dy dz &= \int_{W^*} r \sin \varphi r^2 \cos \varphi dr d\theta d\varphi = \\ &= \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^R r^3 dr \int_0^{\pi/2} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi = \\ &= \frac{\pi}{2} \frac{R^4}{4} \frac{1}{2} = \frac{\pi R^4}{16}. \end{aligned}$$

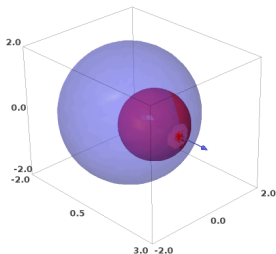
Problema 26 (a) i (c) III

- Per tant, el centre de masses és a

$$\bar{x} = \bar{y} = \bar{z} = \frac{\frac{\pi R^4}{16}}{\frac{\pi R^3}{6}} = \frac{3R}{8}$$

- (c) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4a^2, (x - a)^2 + y^2 + z^2 \geq a^2\}$. (Solució: $(-\frac{a}{7}, 0, 0)$.)

Problema 26 (a) i (c) IV



- ▶ Es tracta de calcular el CG d'una esfera de radi $2a$ centrada a l'origen menys una esfera de radi a centrada en $(a, 0, 0)$.

Problema 26 (a) i (c) V

- ▶ A nivell de conjunts:

$$\Omega = \Omega_1 \setminus \Omega_2$$

on les dues esferes són (llevat de la frontera, que no compta)

$$\Omega_1 = \{x^2 + y^2 + z^2 < 4a^2\}, \quad \Omega_2 = \{(x - a)^2 + y^2 + z^2 < a^2\}$$

Per simetria, el CG de Ω es troba a l'eix X i

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{\text{Vol}(\Omega)} \int_{\Omega} x dx dy dz = \\ &= \frac{1}{\text{Vol}(\Omega)} \int_{\Omega_1} x - \frac{1}{\text{Vol}(\Omega)} \int_{\Omega_2} x = \\ &= \frac{\text{Vol}(\Omega_1)}{\text{Vol}(\Omega)} \text{CG}_x(\Omega_1) - \frac{\text{Vol}(\Omega_2)}{\text{Vol}(\Omega)} \text{CG}_x(\Omega_2) \end{aligned}$$

Problema 26 (a) i (c) VI

ja que els centres geomètrics de Ω_1 i Ω_2 són

$$CG_x(\Omega_1) = \frac{1}{\text{Vol}(\Omega_1)} \int_{\Omega_1} x dx dy dz$$

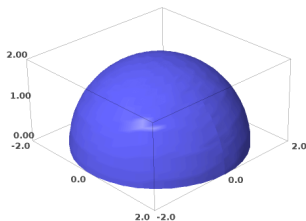
$$CG_x(\Omega_2) = \frac{1}{\text{Vol}(\Omega_2)} \int_{\Omega_2} x dx dy dz.$$

- Com que els CG de Ω_1 i Ω_2 són els centres corresponents de les esferes, tenim que

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{\text{Vol}(\Omega_1)}{\text{Vol}(\Omega)} CG_x(\Omega_1) - \frac{\text{Vol}(\Omega_2)}{\text{Vol}(\Omega)} CG_x(\Omega_2) = \\ &= \frac{\text{Vol}(\Omega_1) CG_x(\Omega_1) - \text{Vol}(\Omega_2) CG_x(\Omega_2)}{\text{Vol}(\Omega)} = \frac{\frac{4}{3}\pi a^3}{\frac{4}{3}\pi((2a)^3 - a^3)} a = -\frac{a}{7} \end{aligned}$$

Problema 28 I

Trobeu el centre de masses de la semiesfera definida per $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ i $z \geq 0$, si la densitat en cada punt és proporcional a la distància d'aquest punt al centre. (Solució: $(0, 0, \frac{2R}{5})$.)



Moments d'inèrcia I

(Per a més informació veieu la pàgina de la Wikipedia).

Donat un eix r i n masses puntuals m_1, m_2, \dots, m_n situades a distància d_1, d_2, \dots, d_n de l'eix r , el seu moment d'inèrcia respecte l'eix r es defineix com

$$I_r = m_1 d_1^2 + \dots + m_n d_n^2.$$

Passant al límit continu podem generalitzar-ho a \mathbb{R}^2 i \mathbb{R}^3

- ▶ Per una placa $D \subset \mathbb{R}^2$ de densitat $\rho(x, y)$ el seu moment d'inèrcia respecte l'eix r de \mathbb{R}^2 és

$$I_r = \int_D d^2((x, y), r) \rho(x, y).$$

on $d((x, y), r)$ és la distància del punt (x, y) a l'eix r

Moments d'inèrcia II

- ▶ Per un cos $W \subset \mathbb{R}^3$ de densitat $\rho(x, y, z)$ el seu moment d'inèrcia respecte l'eix r és

$$I_r = \int_W d^2((x, y, z), r) \rho(x, y, z),$$

on $d((x, y, z), r)$ és la distància del punt (x, y, z) a l'eix r .

En particular, pels eixos de coordenades tenim

- ▶ Per a plaques a D a \mathbb{R}^2 :

$$I_x = \int_D y^2 \rho(x, y), \quad I_y = \int_D x^2 \rho(x, y).$$

Moments d'inèrcia III

- Per a volums W a \mathbb{R}^3 :

$$I_x = \int_W (y^2 + z^2)\rho(x, y, z),$$

$$I_y = \int_W (x^2 + z^2)\rho(x, y, z),$$

$$I_z = \int_W (x^2 + y^2)\rho(x, y, z).$$

Exercici

Calculeu el moment d'inèrcia de la bola unitat de \mathbb{R}^3 centrada a l'origen respecte d'un diàmetre, si la densitat en un punt és igual la seva distància al centre de la bola. Solució: $I = \frac{4\pi}{9}$.

Moments d'inèrcia IV

- ▶ Certament, el moment d'inèrcia respecte qualsevol eix serà el mateix. Suposarem que l'origen de coordenades és el centre de la bola
- ▶ La densitat en un punt és igual la seva distància al centre de la bola, és a dir

$$\rho(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

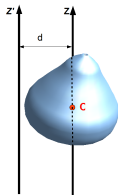
- ▶ Calculem, per exemple, I_z , passant a esfèriques

$$\begin{aligned} I_z &= \int_W (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) = \int_{W^*} r^2 \cos^2 \varphi r r^2 \cos \varphi dr d\theta d\varphi = \\ &= 2\pi \int_0^1 r^5 dr \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3 \varphi d\varphi = 2\pi \frac{1}{6} \frac{4}{3} = \frac{4}{9} \pi \end{aligned}$$

Teorema de Steiner I

Teorema (Steiner)

El moment d'inèrcia d'un cos respecte un eix és la suma del moment d'inèrcia respecte de l'eix paral·lel que passa pel CM del cos i del moment que el cos tindria si tota la seva massa estigués concentrada en el centre de masses.



Teorema de Steiner II

Dient W al cos, i s és l'eix paral·lel a r que passa pel seu CM,

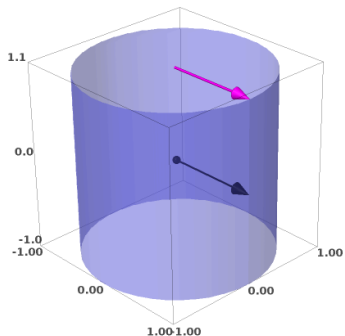
$$I_r = I_s + m(W)d^2(CM, r).$$

Aplicació

Considerem el cilindre

$W = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq R^2, -h/2 \leq z \leq h/2\}$, amb densitat igual a 1, i sigui r un eix situat en el pla $z = h/2$ que passa pel punt $(0, 0, h/2)$. Calculeu I_r Solució: $I_r = V(W) \left(\frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{3} \right)$.

Teorema de Steiner III



- El centre de masses del cos W , en les coordenades indicades, és l'origen.

Teorema de Steiner IV

- ▶ Com que el cos és de revolució respecte l'eix OZ , el moment d'inèrcia respecte qualsevol eix que talli perpendicularment aquest eix en un punt P és el mateix que qualsevol altre eix que el talla perpendicularment en el punt P .
- ▶ Així, calcularem I_r , on r és la recta que passa per $(0, 0, h/2)$ i té per vector director $(1, 0, 0)$.
- ▶ Podem aplicar el teorema de Steiner, d'on

$$I_r = I_x + m(W)d^2(0, r) = I_x + \text{Vol}(W)\frac{h^2}{4}.$$

Teorema de Steiner V

- Per altra banda, calcular I_x és més senzill usant cilíndriques

$$\begin{aligned}
 I_x &= \int_W (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dx dy dz = \int_{W^*} (r^2 \sin^2 \theta + z^2) r dr d\theta dz = \\
 &\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r dr \int_{-h/2}^{h/2} (r^2 \cos^2 \theta + z^2) dz = \\
 &\int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta \int_0^R r^3 dr \int_{-h/2}^{h/2} dz + \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r dr \int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz = \\
 &\pi \frac{R^4}{4} h + 2\pi \frac{R^2}{2} \frac{1}{3} 2 \frac{h^3}{8} = \frac{\pi}{4} R^4 h + \pi R^2 \frac{h^3}{12} = \text{Vol}(W) \left(\frac{1}{4} R^2 + \frac{h^2}{12} \right)
 \end{aligned}$$

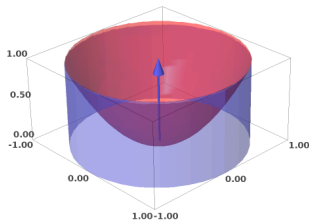
- Per tant,

$$I_r = \text{Vol}(W) \left(\frac{h^2}{4} + \frac{1}{4} R^2 + \frac{h^2}{12} \right) = \text{Vol}(W) \left(\frac{1}{4} R^2 + \frac{h^2}{3} \right)$$

Problema 34 (c) i (d) I

Pels sòldis següents, calculeu els moments d'inèrcia que es demanen en cada cas tot suposant densitat homogènia igual a u .

- (c) Calculeu I_z pel sòlid limitat pel paraboloid $z = x^2 + y^2$ i el cilindre $x^2 + y^2 = a^2$ ($z \geq 0$). (Solució: $I_z = \frac{\pi a^6}{3}$.)



Problema 34 (c) i (d) II

- ▶ Per simetria, el centre de masses és l'origen i l'eix de I_z ja passa precisament per aquest punt.
- ▶ El domini en cilíndriques s'expressa com

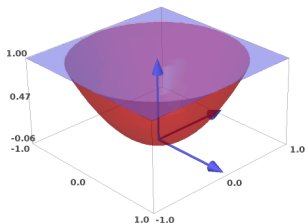
$$W^* = \{z \in [0, 1], \theta \in [0, 2\pi], \sqrt{z} \leq r \leq a^2\} = \\ \{r \in [0, a], \theta \in [0, 2\pi], 0 \leq z \leq r^2\}$$

- ▶ Calculem la integral de I_z passant a cilíndriques

$$I_z = \int_W (x^2 + y^2)\rho(x, y, z) dx dy dz = \int_{W^*} r^2 r dr d\theta dz = \\ 2\pi \int_0^a r^3 dr \int_0^{r^2} dz = 2\pi \int_0^a r^5 dr = \pi \frac{a^6}{3}.$$

Problema 34 (c) i (d) III

- (d) Calculeu I_x , I_y i I_z pel sòlid tancat pel paraboloides $z = x^2 + y^2$ i el pla $z = a$ ($a > 0$). (Solució: $I_x = I_y = \frac{\pi}{12}a^3(1 + 3a)$, $I_z = \frac{\pi}{6}a^3$.)



- ▶ Com que W té simetria de revolució respecte l'eix Z i els eixos X i Y hi són perpendiculars, el valor de I_x coincideix amb I_y .

Problema 34 (c) i (d) IV

- ▶ En cilíndriques el domini s'expressa com

$$W^* = \{r \in [0, \sqrt{a}], \theta \in [0, 2\pi], r^2 \leq z \leq a\}$$

- ▶ Calculem primer I_z ,

$$\begin{aligned} I_z &= \int_W (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) dx dy dz = \int_{W^*} r^2 r dr d\theta dz = \\ &2\pi \int_0^{\sqrt{a}} r^3 dr \int_{r^2}^a dz = 2\pi \int_0^{\sqrt{a}} r^3 (a - r^2) dr = 2\pi \int_0^{\sqrt{a}} (ar^3 - r^5) dr = \\ &2\pi \left(a \frac{1}{4} a^{\frac{4}{2}} - \frac{1}{6} a^{\frac{6}{2}} \right) = \frac{\pi}{6} a^3 \end{aligned}$$

Problema 34 (c) i (d) V

- Passem ara a calcular I_y ,

$$\begin{aligned}
 I_y &= \int_W (x^2 + z^2) \rho(x, y, z) dx dy dz = \int_{W^*} (r^2 \cos^2 \theta + z^2) r dr d\theta dz = \\
 &\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{a}} r dr \int_{r^2}^a (r^2 \cos^2 \theta + z^2) dz = \\
 &\int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta \int_0^{\sqrt{a}} r^3 dr \int_{r^2}^a dz + \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{a}} r dr \int_{r^2}^a z^2 dz = \\
 &\pi \int_0^{\sqrt{a}} r^3 (a - r^2) dr + 2\pi \int_0^{\sqrt{a}} r \frac{1}{3} (a^3 - r^5) dr = \\
 &\pi \int_0^{\sqrt{a}} (ar^3 - r^5) dr + \frac{2\pi}{3} \int_0^{\sqrt{a}} (a^3 r - r^7) dr = \\
 &\pi \left(\frac{1}{4} a^3 - \frac{1}{6} a^3 \right) + \frac{2\pi}{3} \left(\frac{1}{2} a^4 - \frac{1}{8} a^4 \right) = \frac{\pi}{12} a^3 + \frac{\pi}{4} a^4 = \frac{\pi}{12} a^3 (1 + 3a)
 \end{aligned}$$

Suplement al problema 16d

Per fer la integral

$$\int \frac{1}{(1+r^2)^2} dr = \frac{r}{2(r^2+1)} + \frac{1}{2} \arctan(r) + C$$

cal que fem el canvi de variable $r = \tan u$ de manera que la integral es converteix en

$$\int \cos^2 u du = \frac{1}{2} u + \frac{1}{4} \sin(2u) + C$$