Càlcul II

Tema 1: Continuïtat i derivació de funcions de diverses variables (27h)

A partir dels apunts de J. Haro de la web de l'assignatura

Tardor 2016

Tema 1: Continuïtat i derivació de funcions de diverses variables (27h)

1.1: Topologia de $\mathbb{R}^n$ (2h)

1.2: Continuïtat i límit a $\mathbb{R}^n$ (6h)

1.3: Derivades parcials primeres i d'ordre superior (4h)

1.4: Funcions de classe $\mathcal{C}^m$ (2h)

1.5: Regla de la cadena. Derivada de la inversa i derivació implícita (4h)

Notacions I

1. $x = x_1 \in \mathbb{R} \Longrightarrow x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. x_j s'anomena **coordenada** $j-$**èsima** del punt x. Casos particulars:
   - $\mathbb{R}^2$ els punts normalment es denoten per (x, y) i a
   - $\mathbb{R}^3$ per (x, y, z).
2. Diferents productes:
   - $x_1, y_1 \in \mathbb{R}$ **producte (d'escalars)** $x_1 y_1$
   - $x, y \in \mathbb{R}^n$ **producte escalar**

$$\langle x, y \rangle := x.y := \sum_{j=1}^{n} x_j y_j.$$

Notacions II

3. Si $x_1 \in \mathbb{R}$ la norma és

$$||x_1|| := |x_1| = \sqrt{x_1^2}.$$

Si $x \in \mathbb{R}^n$, la **norma** és

$$||x|| := \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2},$$

que és la distància a l'origen (Pitàgores).

4. **Distància entre dos punts:**
   - Si $x_1, y_1 \in \mathbb{R}$ distància de x_1 a y_1, $d(x_1, y_1) := ||x_1 - y_1||$.
   - Si $x, y \in \mathbb{R}^n$, la distància de x a y, $d(x, y) := ||x - y||$.
5. Els intervals oberts es generalitzen a boles:

Notacions III

- A $\mathbb{R}$, **un interval obert** sempre el podem pensar com una bola 1-dimensional d'un cert radi $r > 0$ i centrat en un punt y_1,

$$\mathcal{B}_r^1(y_1) := (y_1 - r, y_1 + r) = \{x_1 \in \mathbb{R} : d(x_1, y_1) < r\}$$

- A $\mathbb{R}^n$, la **bola oberta** n**-dimensional de radi** $r > 0$ **centrada en** y és

$$\mathcal{B}_r^n(y) := \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, y) < r\} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - y\| < r\}.$$

Algunes propietats

- **Producte per escalars:** $\forall \lambda \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n$ es satisfà
$$||\lambda x|| = |\lambda| ||x||.$$
- **Positivitat:** Sempre $||x|| \geq 0$, i, a més,
$$||x|| = 0 \Longleftrightarrow x = 0.$$
- **Simetria:** Donats $x, y \in \mathbb{R}^n$ es satisfà
$$\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle.$$
- **Bilinealitat:** Donats $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ es satisfà
$$\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle.$$

Desigualtats I

Desigualitat de Cauchy-Schwarz

$$|\langle x, y\rangle| \leq ||x||\,||y||, \qquad x, y \in \mathbb{R}^n$$

Demostració: Siguin $t \in \mathbb{R}$, $x, y \in \mathbb{R}^n$ amb $y \neq 0$. La funció g és positiva:

$$g(t) = ||x + ty||^2 = ||x||^2 + 2t\langle x, y\rangle + t^2||y||^2 \geq 0$$

Això es interessant en els punts crítics, que trobem amb $g'(t) = 0$,

$$g'(t) = 2(\langle x, y\rangle + t||y||^2).$$

L'únic punt crític, que ha de ser un mínim (**per què?**) esdevé quan

$$t_0 = -\frac{\langle x, y\rangle}{||y||^2} \text{ i, en aquest punt,}$$

Desigualtats II

$$g(t_0) = ||x||^2 - \frac{\langle x, y\rangle^2}{||y||^2} \geq 0 \Longleftrightarrow \langle x, y\rangle^2 \leq ||x||^2||y||^2.$$

Finalment si $y = 0$ la desigualtat és clara.

Desigualtat triangular (pensar en el nom...)

$$||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$$

o bé

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y).$$

Desigualtats III

Demostració.

$$||x+y||^2 = ||x||^2 + 2\langle x, y\rangle + ||y||^2 \leq$$
$$||x||^2 + 2||x||\,||y|| + ||y||^2 = (||x|| + ||y||)^2.$$

D'altra banda:

$$d(x,y) = ||x-y|| = ||(x-z)+(z-y)|| \leq$$
$$||x-z|| + ||z-y|| = d(x,z) + d(z,y).$$

$\square$

Desigualtats IV

Desigualtat útil

$$\big|||x|| - ||y||\big| \leq ||x - y||$$

Una altra desigualtat

$$|\langle x, y\rangle| \leq \sum_{j=1}^{n} |x_j y_j|$$

Encara una altra conseqüència

$$\forall j \quad |x_j| \leq ||x||$$

Oberts i tancats a $\mathbb{R}^n$ I

Recordatori de conjunts, elements...

- Un **conjunt** està format per elements i s'indica entre claus. Els parells:

$$\text{Parells} = \{2n; n \in \mathbb{N}\} = \{2, 4, 6, \dots\}$$

- Per escriure que **un element pertany a un conjunt** $a \in A$. Per exemple: $2 \in$ Parells o bé $2, 2016 \in$ Parells.
- Un **subconjunt pot estar inclòs dins d'un altre** $A \subset B$. Per exemple: Parells $\subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$. Observeu la diferència del punt anterior amb

$$\{2, 2016\} \subset \text{Parells}$$

Oberts i tancats a $\mathbb{R}^n$ II

Definició (Conjunts oberts i tancats)

Denotem per $\mathcal{B}_\epsilon^n(x)$ la bola a $\mathbb{R}^n$ de radi ϵ en un punt x qualsevol:

$$\mathcal{B}_\epsilon^n(x) = \{y \in \mathbb{R}^n; \|x - y\| = d(x, y) < \epsilon\}.$$

Donat un conjunt $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ direm que és

- **Obert** si per tot $x \in \Omega$ hi ha un $\epsilon > 0$ t.q. $\mathcal{B}_\epsilon^n(x) \subset \Omega$. És a dir, *si en cada punt hi ha una bola (de radi tan petit com vulguem), centrada en aquest punt, totalment inclosa en el conjunt.*
- **Tancat** si el **conjunt complementari** de Ω, $\Omega^c := \mathbb{R}^n \setminus \Omega$ és un conjunt obert. És a dir, *si per qualsevol punt que no estigui en el conjunt, podem trobar una bola centrada en el punt i que no té intersecció amb el conjunt.*

Alguns exemples

- Tot $\mathbb{R}^n$ és un conjunt obert i tancat a la vegada. Junt amb el conjunt buit $\emptyset$ són els únics oberts i tancats de $\mathbb{R}^n$.
- El semipla superior $\Pi = \{y > 0\}$ és obert.

Punts interiors, exteriors, frontera

Definició (Punts interiors, exteriors, frontera)

Donat $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ i $a \in \mathbb{R}^n$ direm que a és un punt de

- **L'interior** de Ω si hi ha un $\epsilon > 0$ t.q. $\mathcal{B}_\epsilon^n(a) \subset \Omega$.
- **L'exterior** de Ω si hi ha un $\epsilon > 0$ t.q. $\mathcal{B}_\epsilon^n(a) \subset \Omega^c$.
- **La frontera** de Ω si per qualsevol $\epsilon > 0$,

$$\mathcal{B}_\epsilon^n(a) \cap \Omega \neq \varnothing \text{ i } \mathcal{B}_\epsilon^n(a) \cap \Omega^c \neq \varnothing.$$

Notació:

- $\mathring{A} = \{x \in \mathbb{R}^n : x \text{ és punt de l'interior de } A\}$.
- $ext\, A = \{x \in \mathbb{R}^n : x \text{ és punt de l'exterior de } A\}$.
- $\partial A = \{x \in \mathbb{R}^n : x \text{ és punt de la frontera de } A\}$.

Tancar i obrir conjunts...

Definició (clausura o adherència)

Si $A \subset \mathbb{R}^n$ la clausura (o adherència) d'A és $\bar{A} = \mathring{A} \cup \partial A$

Relació amb conjunts oberts o tancats

- A obert $\Leftrightarrow A = \mathring{A}$.
- A tancat $\Leftrightarrow A = \bar{A}$.

Definició (Bola tancada)

La clausura de $\mathcal{B}_r^n(a)$, que denotarem per $\bar{\mathcal{B}}_r^n(a)$, s'anomena **bola tancada** de R^n de radi r i centrada en el punt a.

Més propietats de conjunts de $\mathbb{R}^n$

Definició (Conjunt acotat)

Direm que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ és un **conjunt acotat** si hi ha algun $R > 0$ de manera que $\Omega \subset \mathcal{B}_R^n(0)$.

Definició (Conjunt compacte)

Direm que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ és un conjunt compacte si és tancat i acotat.

Operacions amb conjunts I

Recordem les operacions de conjunts $\cup$ (unió)

$$\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \{\text{elements que pertanyen a } \mathcal{A} \textbf{ o } \text{a } \mathcal{B}\}$$

i $\cap$ (intersecció):

$$\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \{\text{elements que pertanyen a } \mathcal{A} \textbf{ i } \text{a } \mathcal{B}\}$$

Exercici: Demostreu/enteneu que $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$. **Indicació:** escriviu-ho en paraules. Algunes propietats importants:

1. La unió d'oberts és sempre un obert.
2. La intersecció finita d'oberts és un obert.
3. La unió finita de tancats és un tancat.
4. La intersecció de tancats és sempre un tancat.

Operacions amb conjunts II

Exemples

1. Com que la unió de conjunts oberts és oberta,

$$\bigcup_{k=2}^{\infty} \mathcal{B}^n_{1-1/k}(0)$$

   és obert. **Pregunta**: Podeu dir quin conjunt és?

2. Usant que $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ i que la unió d'oberts és oberta,

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} \bar{\mathcal{B}}^n_{1/k}(0)$$

   és tancat. **Pregunta**: Quin conjunt és?

Operacions amb conjunts III

3. A vegades hem de veure quins conjunts són exactament. Per exemple, encara que sigui una unió de tancats, el conjunt

$$\bigcup_{k=2}^{\infty} \bar{\mathcal{B}}^n_{1-1/k}(0)$$

és obert ja que **la unió és infinita** i no s'aplica la propietat 3. **Pregunta:** Quin és aquest conjunt?

4. Igualment, tampoc la propietat 2 s'aplica a

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} \mathcal{B}^n_{1/k}(0),$$

que és tancat. **Pregunta**: Quin conjunt és?

Operacions amb conjunts IV

5. La frontera de $\mathcal{B}_r^n(0)$ són els punts de $\mathbb{R}^n$ que satisfan $||x|| = r$. **Escriviu** la definició de $\mathcal{B}_r^n(0)$.
6. $\mathbb{R}^n$ és obert i tancat a la vegada. (Tot punt de $\mathbb{R}^n$ és interior i no té frontera).

Escalfament per a l'exercici 1

Dibuixeu els següents conjunts de $\mathbb{R}^2$ i digueu quins són oberts, tancats o compactes:

1. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$
2. $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 1\}$
3. $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 \leq 2\}$.
4. $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 1, \dfrac{x^2 + y^2}{x} < 2\}$.

Exercici 1 I

Exercici 1

Digueu quins dels següents conjunts son oberts, tancats o compactes.

1. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq x,\ \mathrm{e}^{xy} - \sin x \leq y^4 + \mathrm{e}^x\}$.
2. $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\ \mathrm{e}^{xy} + \mathrm{e}^{yz} + \mathrm{e}^{zx} \geq x + y + z\}$.
3. $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 \leq 0, y \leq 2x\}$.
4. $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x^2 - y^2 + z^2 < 1,\ xyz > 0\}$.
5. $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + \sin y > 0,\ x \neq 0,\ y \neq 0\}$.
6. $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 \leq 2\}$.
7. $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 1,\ \dfrac{x^2 + y^2}{x} < 2\}$.

Exercici 1 II

Observació

Veurem quan estudiem continuïtat, que "en general" els conjunts definits per

- desigualtats del tipus $\lessgtr$ són oberts i
- desigualtats del tipus $\stackrel{\leq}{\stackrel{=}{\geq}}$ són tancats.

Només quan la funció "no té problemes". Exemples

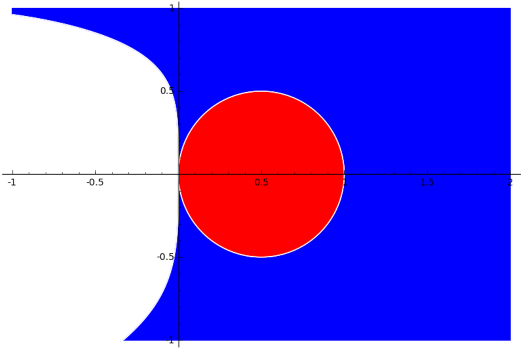
$$\{x^2 - 2x + 1 > 0, x \in \mathbb{R}\} = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \text{ és obert.}$$

Contraexemple

$$\{1/x \geq 0, x \in \mathbb{R}\} = (0, +\infty) \text{ és obert}$$

1. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq x,\ \mathrm{e}^{xy} - \sin x \leq y^4 + \mathrm{e}^x\}$.

Exercici 1 III



Exercici 1 IV

És **compacte** ja que és la intersecció entre

$$\bar{\mathcal{B}}^2_{1/2}(1/2, 0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - x - 1/4 + y^2 + \leq 1/4\},$$

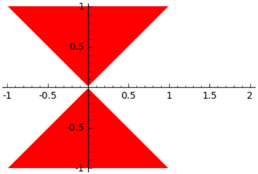
que és una bola tancada i acotada (compacte), i

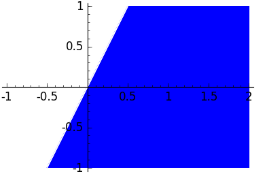
$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \mathrm{e}^{xy} - \sin x \leq y^4 + \mathrm{e}^x\}$$

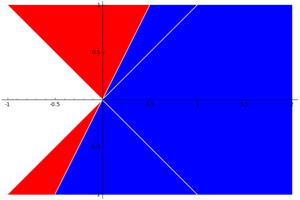
que és un conjunt definit per una desigualtat no estricta.

2. $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, \mathrm{e}^{xy} + \mathrm{e}^{yz} + \mathrm{e}^{zx} \geq x + y + z\}$. Com abans, intersecció de la bola tancada unitat centrada a l'origen i un tancat, per tant, **compacte**.
3. $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 \leq 0, y \leq 2x\}$.

Exercici 1 V



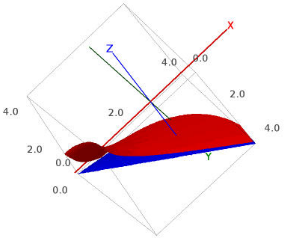




- És **tancat** ja que és la intersecció de dos tancats.
- **No és compacte** ja que no està acotat, ja que els punts de la forma $(x, x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$ pertanyen a C.

Exercici 1 VI

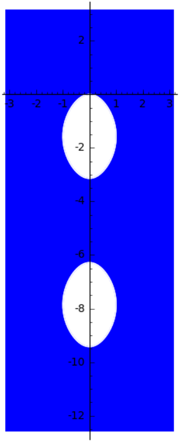
4. $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x^2 - y^2 + z^2 < 1, \, xyz > 0\}$.



És la intersecció de dos oberts, per tant, **obert**.

5. $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + \sin y > 0, \, x \neq 0, \, y \neq 0\}$.

Exercici 1 VII



És oberta, ja que és la intersecció de tres oberts (**Quins?**).

Exercici 1 VIII

6. $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 \leq 2\}$. **Ni obert ni tancat:**
   - $\bar{F} = \bar{\mathcal{B}}^2_{\sqrt{2}}(0, 0) \setminus \mathcal{B}^2_1(0, 0) \supset F$ per tant no és tancat.
   - L'interior de F és $\mathcal{B}^2_{\sqrt{2}}(0, 0) \setminus \bar{\mathcal{B}}^2_1(0, 0) \subset F$ per tant no és obert.

   Per cert, què passa si fem $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < x^2 + y^2 \leq 2\}$?

7. $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 1, \dfrac{x^2 + y^2}{x} < 2\}$. És la intersecció d'oberts, per tant, és **obert**. La funció té problemes en $x = 0$ però no quan $x > 1$.

Funcions vectorials de diverses variables

Definició: (*funció vectorial de diverses variables*) Una **funció de diverses variables** és una aplicació

$$f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \quad f = (f_1, \dots, f_m),$$

on Ω obert i cadascuna de les **funcions components** f_j són *funcions escalars*, i.e., $f_j : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\forall j = 1, \dots, m$.

Exemple ($\Omega = \mathbb{R}^3$)

1. $f(x_1, x_2, x_3) = (\sin(x_1 x_2), x_3^2 + x_1 + 3x_2)$.
2. $f_1(x_1, x_2, x_3) = \sin(x_1 x_2)$ i
3. $f_2(x_1, x_2, x_3) = x_3^2 + x_1 + 3x_2$.

Domini i Imatge I

- Com en funcions escalars, el **domini d'una funció de diverses variables** és el conjunt de valors pels quals podem definir una funció:

$$\mathcal{D}(f) = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \in \mathbb{R}^m\}$$

(quan no ens donen directament l'obert Ω).

- Per una funció $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, la seva **imatge (o rang)** és el subconjunt de $\mathbb{R}^m$:

$$\mathcal{R}(f) = \{y \in \mathbb{R}^m : \exists x \in \Omega; y = f(x)\}.$$

i, si no s'especifica Ω,

$$\mathcal{R}(f) = \{y \in \mathbb{R}^m : \exists x \in \mathcal{D}(f) \ni y = f(x)\}.$$

Domini i Imatge II

Exemple

Donada la funció de *n* variables

$$f(x) = (\ln(||x||), \ln(1 - ||x||))$$

la seva imatge i el seu domini són

1. $\mathcal{D}(f) = \mathcal{B}_1^n(0) \setminus \{0\}$.
2. $\mathcal{R}(f) = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : y_1 \in (-\infty, 0), \quad y_2 = \ln(1 - e^{y_1})\}$.

Problema 2 I

Doneu el domini de defintió de les següents funcions.

1. $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{9-x^2-y^2}}{x^2+y^2-4}$.
2. $f(x,y) = \sqrt{16-4x^2-y^2}$.
3. $f(x,y) = (\ln(xy), \sqrt{4-x^2-y^2})$.
4. $f(x,y) = \arcsin\left(\dfrac{y}{x}\right)$.
5. $f(x,y) = \arctan\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)$.
6. $f(x,y) = \sqrt{y-xy-1}$.
7. $f(x,y,z) = \dfrac{x}{\sqrt{9-x^2-y^2-z^2}}$.

Indicacions:

Problema 2 II

1. Intersecció del domini del numerador i punts on no s'anul·la el denominador.
2. Dibuixeu $16 - 4x^2 - y^2 \geq 0$.
3. Intersecció dels dominis de les dues funcions components.
4. $\arcsin : [-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2]$.
5. $\arctan : (-\infty, \infty) \to [-\pi/2, \pi/2]$
6. Determineu el conjunt $y - xy - 1 = 0$.
7. No us espantin les tres variables.

Solució Problema 2 I

Doneu el domini de defineció de les següents funcions.

1. $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{9-x^2-y^2}}{x^2+y^2-4}$. Intersecció de condicions:
   - Cal que $9-x^2-y^2 \geq 0$ (bola tancada).
   - Cal que $x^2+y^2-4 \neq 0$ ($\mathbb{R}^2$ menys circumferència).

   Solució: $\mathcal{D}(f) = \bar{\mathcal{B}}_3^2(0,0) \setminus \partial\mathcal{B}_2^2(0,0)$.
2. $f(x,y) = \sqrt{16-4x^2-y^2}$. $\mathcal{D}(f)$ és la clausura de l'el.lipse $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} \leq 1$.
3. $f(x,y) = (\ln(xy), \sqrt{4-x^2-y^2}) = (f_1(x,y), f_2(x,y))$.
   - Per a f_1 cal que $xy > 0$ (1er i 3er quadrants).
   - Per a f_2 cal que $4-x^2-y^2 \geq 0$ (bola tancada)

Solució Problema 2 II

Solució

$$\mathcal{D}(f) = \bar{\mathcal{B}}_2^2(0,0) \cap \left(\{(x,y) : x > 0, y > 0\} \cup \{(x,y) : x < 0, y < 0\}\right)$$

4. $f(x,y) = \arcsin\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

$$\mathcal{D}(f) = \{(x,y) : -1 \leq \frac{y}{x} \leq 1\} = \{(x,y) : |y| \leq |x|, x \neq 0\}$$

5. $f(x,y) = \arctan\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)$. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
6. $f(x,y) = \sqrt{y - xy - 1}$.
   - El conjunt definit per $y - xy - 1 = 0$ s'expressa per $y(1-x) = 1$.

Solució Problema 2 III

- El pla $\mathbb{R}^2$ queda dividit en quatre regions segons si $x < 1$ o $x > 1$ i si $y - xy - 1 \geq 0$ o $y - xy - 1 \leq 0$.

Solució:

$$\mathcal{D}(f) = \{(x, y) : x < 1, y \geq \frac{1}{1-x}\} \cup \{(x, y) : x > 1, y \leq \frac{1}{1-x}\}$$

7. $f(x, y, z) = \dfrac{x}{\sqrt{9 - x^2 - y^2 - z^2}}$ Solució: $\mathcal{D}(f) = \mathcal{B}_3^3(0, 0, 0)$.

Gràfiques de funcions de *n* variables

- Recordem que per a funcions escalars f, la gràfica és el subconjunt de $\mathbb{R}^2$ de punts de la forma $(x, f(x))$.
- Per a funcions de n variables, $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, el conjunt de punts de la forma $(x, f(x))$, la gràfica, "viu" a

  $$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m = \{(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m), x \in \mathbb{R}^n y \in \mathbb{R}^m\} \approx R^{n+m}$$

  i és el conjunt $\mathcal{G}(f) = \{(x, f(x)) : x \in \mathcal{D}(f)\} \subset \mathbb{R}^{n+m}$.

Exemple

1. La gràfica de $f : \mathcal{B}_1^2(0) \to \mathbb{R} : (x_1, x_2) \to a^2x_1^2 + b^2x_2^2$ amb $a \neq b$ és un paraboloïde el·líptic.
2. La gràfica de $f : \mathcal{B}_1^2(0) \to \mathbb{R} : (x_1, x_2) \to a^2x_1^2 - b^2x_2^2$ és com una "sella de muntar".

Com es fa en Matlab/Octave ?

Cal definir una malla:

```
x=1:2;  y=-2:-1;
[X,Y]=meshgrid(x,y)
```

que dona per resultat els punts corresponents:

```
X =
    1    2
    1    2
Y =
   -2   -2
   -1   -1
```

Així doncs, per dibuixar una funció (p.e. una sella de muntar):

```
[X,Y]=meshgrid(-1:0.01:1,-2:0.01:2);
surf(X,Y,X.^2-Y.^2)
```

Conjunts i corbes de nivell I

En els plànols (representació 2d d'una gràfica a $\mathbb{R}^3$) s'hi representen les corbes de nivell per poder "reconstruir" la gràfica.

Definició (Conjunts de nivell)

Donada una funció $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, i un valor $c \in \mathcal{R}(f)$ a la imatge de f, el conjunt de nivell associat a c és el subconjut de Ω:

$$L_c(f) = \{x \in \Omega : f(x) = c\}.$$

Notació

- Quan $n = 2$ i $m = 1$ s'anomenen *corbes de nivell*,
- quan $n = 3$ i $m = 1$ s'anomenen *superfícies de nivell* i,
- en general, quan $m = 1$ s'anomenen *hipersuperfícies de nivell*.

Conjunts i corbes de nivell II

Conjunts i corbes de nivell III

Exemples:

1. Les corbes de nivell del paraboloïde el·líptic definit per $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2$ són el·lipses.

```
[X,Y]=meshgrid(-1:.1:1); % x=y
Z=X.^2+2*Y.^2;
contour(X,Y,Z); axis square % Fa el contour plot
```

2. Les corbes de nivell de $f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$ són hipèrboles.

```
[X,Y]=meshgrid(-1:.1:1); Z=X.^2-Y.^2;
contour(X,Y,Z)
```

3. Les superfícies de nivell de $f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2$ són el·lipsoïdes.

Problema 3 I

Trobeu les corbes de nivell de les següents funcions i digueu quina és la seva imatge.

1. $f(x, y) = x^2 + y^2$. Les corbes de nivell són circumferències i $\mathcal{R}(f) = [0, \infty)$.
2. $f(x, y) = 4x^2 + y^2$. Les corbes de nivell són el.lipses i $\mathcal{R}(f) = [0, \infty)$.
3. $f(x, y) = x^2 - y$.
4. $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$, definida per a $(x, y) \neq (0, 0)$.
5. $f(x, y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$, definida per a $(x, y) \neq (0, 0)$.
6. $f(x, y) = (x^2 + y^2)\mathrm{e}^{-x^2-y^2}$.

Problema 3 - Solució I

Trobeu les corbes de nivell de les següents funcions i digueu quina és la seva imatge.

1. $f(x, y) = x^2 + y^2$. Les corbes de nivell són circumferències i $\mathcal{R}(f) = [0, \infty)$.
2. $f(x, y) = 4x^2 + y^2$. Les corbes de nivell són el.lipses i $\mathcal{R}(f) = [0, \infty)$.
3. $f(x, y) = x^2 - y$.
   - Les corbes de nivell venen donades per $x^2 - y = C$, amb $C \in \mathbb{R}$.
   - Es tracta, doncs, de paràboles.
   - $\mathcal{R}(f) = \mathbb{R}$
4. $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$, definida per a $(x, y) \neq (0, 0)$.

Problema 3 - Solució II

- Les corbes de nivell venen donades per $\dfrac{xy}{x^2+y^2} = C$, és a dir

$$xy = Cx^2 + Cy^2 \Leftrightarrow Cx^2 - xy + Cy^2 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{x \pm \sqrt{x^2 - 4C^2x^2}}{2C}$$

- Les corbes de nivell són rectes per l'origen.
- Per veure la imatge, fixem-nos que és inclosa a $[-1/2, 1/2]$ ja que

$$(x-y)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \geq 2xy \Leftrightarrow f(x,y) \leq 1/2$$

- i, per altra banda, $(x+y)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \geq -2xy \Leftrightarrow f(x,y) \geq -1/2$ per tant $\mathcal{R}(f) \subset [-1/2, 1/2]$.
- Per veure la igualtat, substituïm y per mx i f és constant (vist abans) i val $m/(1+m^2)$ que pren tots els valors entre $-1/2$ i $1/2$ variant m.

Problema 3 - Solució III

5. $f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$, definida per a $(x,y) \neq (0,0)$. (Indicació: Feu com (5).)
   - Les corbes de nivell són les rectes $y = \pm\sqrt{\frac{1-k}{1+k}}x$.
   - Per tant, $\mathcal{R}(f) = [-1,1]$.
6. $f(x,y) = (x^2 + y^2)\mathrm{e}^{-x^2-y^2}$.
   - Podem relacionar els valors de f amb els de la funció $h(z) = z\mathrm{e}^{-z}$.
   - Com que $f(x,y) = h(\|(x,y)\|)$, les corbes de nivell són circumferències.
   - $\mathcal{R}(f) = (-\infty, e^{-1}]$ ja que h té un únic màxim absolut $z = 1$.

Límits de funcions vectorials I

En primer lloc, recordem la definició de límit a $\mathbb{R}$: Donada una funció definida en un interval obert $I \subset \mathbb{R}$, i per a $a \in I$,

$$f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

dèiem que la funció f té límit (finit) L en a, escrit com,

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

si, i només si, per qualsevol $\epsilon > 0$ hi ha un $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ de manera que per qualsevol $0 < |x - a| < \delta$ es té que

$$|f(x) - L| < \epsilon$$

Intuïtivament: El valor de $f(x)$ és tan proper a L com vulguem, sempre que fem x suficientment proper a a ($x \neq a$).

Límits de funcions vectorials II

Exemple ($\lim_{x\to 1} x^2 = 1.$)

Fixem $\epsilon > 0$, llavors per $|x-1| < \delta$ (i, suposant $\delta < 1$) tenim

$$|x^2 - 1| = |x-1||x+1| < \delta|x+1| < 3\delta = \epsilon,$$

prenent $\delta < \min(\epsilon/3, 1)$, ja que aleshores $|x+1| < 3$.

La definició a $\mathbb{R}^n$ és la mateixa substituïnt $|\cdot|$ per $\|\cdot\|$:

Límits de funcions vectorials III

Definició (Límit d'una funció vectorial)

Sigui $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una funció vectorial, $f = (f_1, \ldots, f_m)$, Ω un obert i $a \in \Omega$. Direm que f **té límit** L **en** a, escrit com

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

si, per qualsevol $\epsilon > 0$, hi ha un $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ de manera que

$$0 < \|x - a\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - L\| < \epsilon.$$

Observacions:

- El valor de $f(a)$ *no* juga cap paper en la definició.

Límits de funcions vectorials IV

- La definició la podem escriure també en el llenguatge de les boles:
$$x \in \mathcal{B}_\delta^n(a) \setminus \{a\} \Rightarrow f(x) \in \mathcal{B}_\epsilon^m(L).$$
- A la definició hem considerat que $a \in \Omega$, però de fet només cal que $a \in \overline{\Omega}$, l'adherència del conjunt obert. Per simplicitat, en el que segueix, considerarem que $a \in \Omega$.

Alguns exemples senzills I

- El límit bàsic:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \|(x,y)\| = 0$$

En efecte, per a qualsevol $\epsilon > 0$, sigui $\delta = \epsilon$.

- Un exemple a $\mathbb{R}^n$:

$$\lim_{(x_1,\ldots,x_n)\to(0,\ldots,0)} \|x\|^k = 0$$

N'hi ha prou amb prendre $\delta = \epsilon^{1/k}$ per qualsevol $\epsilon > 0$.

Alguns exemples senzills II

- Sovint caldrà usar desigualtats com que $|x_k| \leq \|x\|$

$$\lim_{(x_1,\dots,x_n)\to(0,\dots,0)} x_1 \cdots x_n = 0$$

  ja que

$$|x_1 \cdots x_n| \leq \|x\|^n \text{ i } \|x\| \longrightarrow 0.$$

- En aquesta darrera desigualtat hem usat la versió de $\mathbb{R}^n$ del "teorema de l'entrepà"(en anglès "squeeze theorem"): Si tenim tres funcions definides en un obert

$$f, g, h : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

  i suposem que

$$g(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}) \leq h(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

Alguns exemples senzills III

i a més

$$\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L$$

per a un cert $a \in \mathbb{R}^n$ i $L \in \mathbb{R}$, aleshores també

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

- Els límits no sempre són zero:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} 1 + x + y = 1$$

ja que

$$|(1 + x + y) - 1| = |x + y| \leq |x| + |y| \leq 2\|(x, y)\|$$

Alguns exemples senzills IV

- Tampoc són sempre en el zero de $\mathbb{R}^n$:

$$\lim_{(x,y,z)\to(1,2,3)} x + 2y + z^2 = 14$$

cal veure que el valor absolut següent és menor que ϵ

$$|f(x,y,z) - 14| = \left|x + 2y + z^2 - 14\right| = \left|(x-1) + (2y-4) + (z^2-9)\right| = (*)$$

per a un $\delta > 0$ adequat i sempre que

$$d\left((x,y,z),(1,2,3)\right) = \|(x-1, y-2, z-3)\| = \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2} < \delta.$$

Alguns exemples senzills V

Notem que

$$(*) \leq |x-1|+2|y-2|+\underbrace{\left|z^2-9\right|}_{|z-3||z+3|} \leq \delta+2\delta+\delta\underbrace{|z+3|}_{\leq 7} \leq 10\delta \leq \epsilon$$

suposant que $\delta = min(\epsilon/10, 1)$ i, per tant, $|z-3| < 1$.

- Per als quocients, cal acotar inferiorment:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4}{x^2+y^4} = 0$$

Acotem inferiorment $x^2 + y^4 \geq x^2$ i, així,

$$\frac{x^4}{x^2+y^4} \leq \frac{x^4}{x^2} = x^2 \to 0 \text{ si } (x,y) \to (0,0)$$

Exemple I

Anem a veure que

$$\lim_{(x_1,x_2)\to(0,0)} \frac{\sin(x_1^2 x_2^2)}{x_1^2 + x_2^4} = 0.$$

```
[X,Y]=meshgrid(-1:0.011:1);
Z=sin(X.^2.*Y.^2)./(X.^2+Y.^4);
surf(X,Y,Z) % clar
```

Efectivament, fixem $\epsilon > 0$ i volem determinar $\delta > 0$ de manera que, si $(x_1, x_2) \in \mathcal{B}_\delta((0,0))$ es compleixi:

$$d\left(\frac{\sin(x_1^2 x_2^2)}{x_1^2 + x_2^4}, 0\right) < \epsilon$$

Exemple II

La banda esquerra es desenvolupa i val

$$d\left(\frac{\sin(x_1^2x_2^2)}{x_1^2+x_2^4},0\right)=\left|\frac{\sin(x_1^2x_2^2)}{x_1^2+x_2^4}\right|\underbrace{\leq}_{|\sin x|\leq|x|}\frac{x_1^2x_2^2}{x_1^2+x_2^2}\leq$$

$$\underbrace{\leq}_{x_1^2+x_2^4\geq x_1^2}\frac{x_1^2x_2^2}{x_1^2}\leq\|x\|^2\leq\delta<\epsilon,\ \text{suposant que triem } \delta=\sqrt{\epsilon}$$

- Per al numerador: cal acotar superiorment.
- Per al denominador: cal acotar inferiorment.
- Veieu l'exemple 8 de la secció 13.2 de Zill.

Exercici 9

Veieu, usant la definició, que la funció

$$f(x_1, x_2) = \frac{x_1^2 \cos(x_2) + x_1 x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$$

tendeix a zero a l'origen. Indicacions:

- Quin és el problema a $(0,0)$?
- Si voleu, penseu en què passa quan una de les dues variables val zero. Què passa quan l'altra variable tendeix a zero?
- Juga algun paper $\cos x_2$ quan $x_2 \approx 0$?
- Podeu separar-ho en dues sumes i usar

$$\left| \frac{x_1^2 + x_1 x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \right| \leq \frac{x_1^2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} + \frac{x_1 x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \leq 2\|x\|$$

ja que $|x_k| \leq \|x\|$.

No existència de límits

Com veiem que un límit no existeix?

- A $\mathbb{R}$, la majoria de límits que vèiem que no existien era perquè el límit per la dreta i el límit per l'esquerra no coïncidien:

  $\exists \lim_{x \to a} f(x) \Leftrightarrow \lim_{x_1 \to a^+} f(x_1)$ i $\lim_{x_1 \to a^-} f(x_1)$ existeixen i coincideixen.

- A $\mathbb{R}^n$ hi ha infinites maneres d'arribar a un punt (rectes, paràboles, corbes. . .) i no és possible donar un criteri així.
- En canvi, el que sí que es pot dir, és que **si el límit segons dues corbes és diferent, aleshores el límit no existeix** .

Exemple

Comprovem-ho en el següent límit,

$$\lim_{(x_1,x_2)\to(0,0)} \frac{\sin(x_1^2 x_2^2)}{x_1^2 + x_2^4} = 0,$$

i veiem que aquest també val zero sobre diferents rectes i corbes:

$x_1 = 0$ $f(0, x_2) = 0 \to 0$ quan $x \to 0$ (i, per tant, $x_2 \to 0$).

$x_2 = 0$ $f(x_1, 0) = 0 \to 0$ quan $x \to 0$ (i, per tant, $x_1 \to 0$).

$x_1 = x_2^2$ $f(x_2^2, x^2) = \sin(x_2^6)/(2x_2^4) \to 0$ quan $x_2 \to 0$ (i, per tant, $x_1 \to 0$).

Atenció: Això no demostra que el límit sigui zero!

Un exemple de no existència

Considerem la funció

$$f(x_1,x_2)=\begin{cases}\frac{x_1^2x_2^2}{x_1^2+x_2} & x_1^2+x_2^2\neq 0,\\ 0 & x_1^2+x_2^2=0\end{cases}$$

Observem que el valor en $(0,0)$ és irrelevant per al càlcul del límit.

- Triem $x_1=x_2$ i fem $x_1\to 0$. Aleshores, quan $x_1\neq 0$

$$f(x_1,x_1)=\frac{x_1^2x_1^2}{x_1^2+x_1}\to 0,\ x_1\to 0$$

- Triem $x_2=-x_1^2+x_1^6$, aleshores

$$f(x_1,-x_1^2+x_1^6)=\frac{x_1^2(-x_1^2+x_1^6)^2}{x_1^2-x_1^2+x_1^6}=\frac{x_1^6(-1^2+x_1^4)^2}{x_1^6}\to 1,\ x_1\to 0$$

Els límits segons dues corbes no coïncideixen, el límit no existeix.

Límits de funcions racionals I

En indeterminacions del tipus $0/0$ de funcions racionals a $\mathbb{R}$

- Si el grau del numerador és superior al denominador, el límit val zero.
- Si el grau del numerador és inferior al denominador, el límit no és acotat (∞) i no existeix.
- Si els dos graus són iguals, el límit val el quocient dels termes de grau superior de numerador i denominador

Problema a $\mathbb{R}^n$: grau$(xy) = 2$, grau$(x^2 + y^2)$=2 però

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2} \text{ no existeix ja que}$$

ja que si $x = 0$ el límit val zero però si $x = y$ el límit val $1/2$.

Límits de funcions racionals II

Proposició

Sigui

$$p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}; x \to p(x)$$

un monomi (producte de components) de grau m i coeficient 1. *Llavors si* $n > 1$

$$\lim_{x\to 0} \frac{p(x)}{||x||^k} = \begin{cases} 0 & si \quad m > k \\ \nexists & si \quad m \leq k \end{cases}$$

Demostració: En primer lloc, observem que, com que $|x_j| \leq ||x||, \forall j$

$$\frac{|p(x)|}{||x||^k} \leq ||x||^{m-k}$$

Així

Límits de funcions racionals III

- Si $m > k$, $||x||^{m-k} \to 0$ quan $x \to 0$.
- Si $m \leq k$, prenem el límit segons $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$. El numerador és un polinomi en x_1 de grau m i $\|x\|^k = |x_1|^k$, que és un polinomi de grau k en $|x|$. Així, el límit només podria existir quan $m = k$. En aquest cas, però,
  - Cal que k sigui parell, ja que altrament tindríem un problema com $x/|x|$.
  - Si $k = m$ és parell, el límit segons aquesta recta és $(1/n)^{\frac{k}{2}}$. Tanmateix, si fem el límit segons la recta $x_2 = 0, \ldots, x_n = 0$, aquest val
$$\lim_{x_1 \to 0} \frac{p(x_1, 0, \ldots, 0)}{\|(x_1, 0, \ldots, 0)\|^k} = 0$$
i, per tant, el límit no existeix.

Problema 8 de la llista I

Per a les següents funcions, trobeu valors per a $\delta(\epsilon)$ ("òptims") tals que si $\sqrt{x^2+y^2} \leq \delta(\epsilon)$ llavors $|f(x,y)-f(0,0)| \leq \epsilon$. (Indicació: Recordeu que $|x|, |y| \leq \sqrt{x^2+y^2}$)

1. $f(x,y) = \sqrt[3]{xy}$. $\delta(\epsilon) = \epsilon^{3/2}$.
2. $f(x,y) = \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ i $f(0,0) = 0$. $\delta(\epsilon) = \epsilon$.
3. $f(x,y) = \dfrac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}$. $\delta(\epsilon) = \sqrt{\epsilon/2}$.

Problema 11 de la llista I

Calculeu (si existeixen) els següents límits.

1. $\lim_{(x,y)\to(0,1)} \dfrac{\arccos(x/y)}{1+xy}$. (**continuïtat**)
2. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$.
3. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$.
4. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.
5. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y^2}{x^4+y^4}$.
6. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(xy)}{x^2+y^2}$.

Problema 11 de la llista II

7. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$
8. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy\ln(x^2+y^2)$.
9. $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{xyz}{x^2+y^2+z^2}$.
10. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$, definida si $x, y > 0$ i $x \neq y$.
11. $\lim_{(x,y)\to(1,1)} \tan\left(\dfrac{\pi}{x^2+y^2}\right)$.

Problema 11 de la llista. Indicacions I

Calculeu (si existeixen) els següents límits.

1. $\lim_{(x,y)\to(0,1)} \dfrac{\arccos(x/y)}{1+xy}$.
   - Numerador i denominador sense problemes a $(0,1)$.
   - El denominador no s'anul·la en $(0,1)$.
   - Podem calcular el límit per substitució

   Solució: $\pi/2$.
2. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$.
   - Si $x=0$, el límit val 0.
   - Si $x=y$, el límit val $1/2$

   Solució: No existeix.
3. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$.

Problema 11 de la llista. Indicacions II

- Usem que $x^2 + y^2 \geq x^2$.

Solució 0.

4. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$.
   - Per $x = 0$, el límit val 1.
   - Per $x = y$, el límit val 0.

   Solució: No existeix.
5. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 y^2}{x^4 + y^4}$.
   - Per $x = 0$, el límit val 0.
   - Per $x = y$, el límit val $1/2$.

   Solució: No existeix.
6. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(xy)}{x^2 + y^2}$.
   - Per $x = 0$, el límit val 0.

Problema 11 de la llista. Indicacions III

- Per $x = y$, ens queda

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

Solució: No existeix.

7. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$.
   - Usem que $|xy| \leq (x^2+y^2)|$.
   - $|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}| \leq \sqrt{x^2+y^2}$.

   Solució: 0.
8. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy\ln(x^2+y^2)$.
   - En primer lloc

$$\left|xy\ln(x^2+y^2)\right| \leq \left|(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)\right| = h(\|(x,y)\|)$$

Problema 11 de la llista. Indicacions IV

- $h : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ és la funció d'una variable definida per

$$h(t) = t^2 \ln(t^2), \text{ que compleix } \lim_{t\to 0} h(t) = 0$$

- **Propietat**: Si $h : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ és una funció escalar que compleix que

$$\lim_{t\to 0^+} h(t) = L$$

aleshores també, per qualsevol n

$$\lim_{(x_1,\ldots,x_n)\to(0,\ldots,0)} h(\|(x_1, \ldots, x_n)\|) = L$$

Solució: 0.

9. $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2}$. Solució 0.
10. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x - y}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$, definida si $x, y > 0$ i $x \neq y$.

Problema 11 de la llista. Indicacions V

- En primer lloc, observem que la funció no està definida en cap bola centrada en zero (excloent el centre, és clar).
- En aquest cas, s'entén que calcularem el límit segons el conjunt $\{x \neq y\}$.
- Podem multiplicar i dividr pel conjugat

$$\left|\frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}\right| = \left\|\frac{(x-y)(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}\right| = \left|\frac{(x-y)(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{x-y}\right|$$
$$= \left|\sqrt{x}+\sqrt{y}\right| \leq \left|\sqrt{x}\right| + \left|\sqrt{y}\right| \leq \sqrt{|x|} + \sqrt{|y|} \leq 2\sqrt{\|(x,y)\|}$$

Solució: 0.

11. $\lim_{(x,y)\to(1,1)} \tan\left(\frac{\pi}{x^2+y^2}\right)$.
    - Si fem $x = 1$, el límit no existeix.

Solució: No existeix.

Continuïtat de funcions vectorials I

Definició (Continuïtat en un punt)

Sigui $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una funció vectorial, $f = (f_1, \dots, f_m)$, Ω un obert i $a \in \Omega$. Direm que f **és contínua en** a si

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Definició (Continuïtat en un obert)

Sigui $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una funció vectorial, $f = (f_1, \dots, f_m)$ i Ω un obert. Direm que f **és contínua en** Ω si f és contínua en tots els punts de Ω.

Continuïtat de funcions vectorials II

Proposició (Construcció de funcions contínues)

La suma, producte i composició de funcions contínues en els seus dominis oberts és contínua. El quocient és també continu llevat dels punts on s'anul·la el denominador.

Exemples de funcions contínues:

- Els polinomis a $\mathbb{R}^n$ són funcions contínues a $\mathbb{R}^n$.
- Les funcions racionals (quocients de polinomis) són contínues a $\mathbb{R}^n$ llevat dels punts on s'anul·la el denominador.
- La funció "norma" $x \in \mathbb{R}^n \mapsto \|x\| \in \mathbb{R}$ és contínua a tot $\mathbb{R}^n$.

Propietats de funcions contínues I

Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ és contínua podem dir coses sobre **antiimatges de conjunts** $U \subset \mathbb{R}^m$:

$$f^{-1}(U) = \{x \in \mathbb{R}^n ; f(x) \in U\}, \text{ e.g.} \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; x^{2016} + \sin(y) > 0\}$$
$$= f^{-1}((0,+\infty) \text{ on } f(x,y) = x^{2016} + \sin(y)$$

i sobre **imatges de conjunts** $V \subset \mathbb{R}^n$:

$$f(V) = \{y \in \mathbb{R}^m ; y = f(x) \text{ amb } x \in V\}$$

Propietats de funcions contínues II

Proposició (Propietats de les funcions contínues)

1. *Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ és contínua a tot $\mathbb{R}^n$, llavors l'anti-imatge d'un obert de $\mathbb{R}^m$ és un obert de $\mathbb{R}^n$ i l'anti-imatge d'un tancat de $\mathbb{R}^m$ és un tancat de $\mathbb{R}^n$.*
2. *Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ és contínua a tot $\mathbb{R}^n$, llavors la imatge d'un compacte de $\mathbb{R}^n$ és un compacte de $\mathbb{R}^m$.*

Exemples:

1. El conjunt $A = \{x \in \mathbb{R}^n : 1 < ||x||^3 < 2\}$ és obert. Si considerem la funció $f(x) = ||x||^3$ llavors A és l'anti-imatge de $(1, 2)$ que és un obert de $\mathbb{R}$.
2. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(x) = E(x)$ funció part entera d'x. Llavors si triem $\Omega = \{1\}$ resulta que $f^{-1}(\Omega) = [1, 2)$ NO és tancat (f no és contínua a $\mathbb{R}$).

Propietats de funcions contínues III

3. Definim la següent funció

$$f(x) = \begin{cases} x, & x < 1 \\ 2, & x \geq 1, \end{cases} \tag{1}$$

Llavors $f([0,2]) = [0,1) \cup \{2\}$ NO és tancat, i per tant tampoc compacte.

Problema 13 de la llista

Sigui $f(x,y) = \dfrac{\cos(xy)-1}{x^2y^2}$ si $xy \neq 0$ i $f(x,y) = a$ si $xy = 0$.

1. Per a quin valor de $a \in \mathbb{R}$ és f contínua en $(0,0)$? $a = -1/2$. Per Taylor en una variable.
2. Per aquest valor de a discutiu la continuïtat de f en $\mathbb{R}^2$.
   - Per generació, f és contínua fora de $xy = 0$
   - Podeu usar que, si t és prou petit:

$$\cos t - 1 + \frac{1}{2}t^2 = \frac{1}{4!}t^4 + O(t^6)$$

   - Per veure la continuïtat quan $xy = 0$:

$$\left|\frac{\cos(xy)-1}{x^2y^2} + \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{\cos(xy)-1+\frac{1}{2}x^2y^2}{x^2y^2}\right| \underbrace{=}_{t=xy}$$

$$\left|\frac{1}{4!}(xy)^4 + O((xy)^6)\right| \to 0, \text{ quan } (x,y) \to (0,0).$$

Problema 14 de la llista

Per a les següents funcions definides a trossos discutiu la seva continuïtat en $\mathbb{R}^2$.

1. $f(x,y) = \dfrac{\sin(xy)}{xy}$ si $xy \neq 0$ i $f(x,y) = 1$ si $xy = 0$.
2. $f(x,y) = \max\{x,y\}$ si $x > 0$ i $f(x,y) = 0$ si $x \leq 0$.
3. $f(x,y) = x$ si $|x| \leq |y|$ i $f(x,y) = y$ si $|x| > |y|$.
4. $f(x,y) = x$ si $x^2 + y^2 \leq 1$ i $f(x,y) = y$ si $x^2 + y^2 > 1$.

Límits segons conjunts

A vegades, el punt on calculem el límit no és a l'interior del conjunt, sinó a la frontera, com per exemple

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x+y} = 0$$

on només podem considerar el límit en $x+y \geq 0$. Si tenim un conjunt $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ i $a \in \bar{\Omega}$, **el límit segons el conjunt val** L

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\in\Omega}} f(x) = L$$

si per qualsevol $\epsilon > 0$ existeix un $\delta > 0$ de manera que

$$\underbrace{x \in (\mathcal{B}^n_\delta(a) \setminus \{a\}) \cap \Omega}_{0<\|x-a\|<\delta \text{ i } x\in\Omega} \Rightarrow f(x) \in \mathcal{B}^m_\epsilon(L)$$

Funcions definides a trossos

Sigui $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, definida a trossos

$$f(x) = f(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} g(x) & x \in A \\ h(x) & y \in B \end{cases}$$

- Els conjunts A i B són disjunts: $A \cap B = \emptyset$.
- A i B recobreixen Ω: $\Omega = A \cup B$.
- $g : A \to \mathbb{R}^m$ i $h : B \to \mathbb{R}^m$ contínues en $\mathring{A}$ i $\mathring{B}$ respectivament.

(clarament f és contínua en $\mathring{A} \cup \mathring{B}$). Als punts de Ω que pertanyen al conjunt $\overline{A} \cap \overline{B}$ (quan té sentit calcular el límint segons els dos conjunts), la funció és contínua si, i només si, coïncideixen els límits segons els conjunts i són iguals a la funció

$$f(a) = \lim_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) = \lim_{\substack{x \to a \\ x \in B}} f(x)$$

Problema 14 de la llista. Indicacions I

Per a les següents funcions definides a trossos discutiu la seva continuïtat en $\mathbb{R}^2$.

1. $f(x,y) = \dfrac{\sin(xy)}{xy}$ si $xy \neq 0$ i $f(x,y) = 1$ si $xy = 0$.
   - Veieu que f es pot escriure com a composició de funcions contínues a $\mathbb{R}^2$,
   $$f = h \circ g \text{ on } g(x,y) = xy$$
   - $h(t) = \frac{\sin t}{t}$ si $t \neq 0$ i $h(0) = 1$.
   - Solució: Contínua a tot $\mathbb{R}^2$.
2. $f(x,y) = \max\{x,y\}$ si $x > 0$ i $f(x,y) = 0$ si $x \leq 0$.

Problema 14 de la llista. Indicacions II

- La funció $\max : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ és contínua a $\mathbb{R}^n$ (comproveu-ho). Per exemple, a $\mathbb{R}^2$, la funció màxim ve definida a trossos

$$\max\{x, y\} = \begin{cases} x & x \geq y \\ y & y < x \end{cases}$$

i, llevat de $x = y$ és una funció polinomial (val x o y). Veiem que és contínua en qualsevol punt (a, a), amb $a \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{(x,y)\to(a,a)} \max\{x, y\} = a. \text{ En efecte}$$

$$|\max\{x, y\} - a| \leq \max\{|x - a|, |y - a|\} \leq \|(x - a, y - a)\|$$

Problema 14 de la llista. Indicacions III

- Tornant a $f(x,y) = \max\{x,y\}$ si $x > 0$ i $f(x,y) = 0$ si $x \leq 0$

$$f(x,y) = \begin{cases} \max\{x,y\} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} y, & y \geq x > 0 \\ x, & x > 0, y < x \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

  L'únic problema pot succeir a $x = 0$.
- Feu el dibuix de les diferents regions de $\mathbb{R}^2$.
- Solució: Contínua a $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,y) : y > 0\}$

3. $f(x,y) = x$ si $|x| \leq |y|$ i $f(x,y) = y$ si $|x| > |y|$.
   - De nou, es tracta d'una funció definida a trossos:

$$f(x,y) = \begin{cases} x, & |x| \leq |y| \\ y, & |x| > |y| \end{cases}$$

     i, per tant, és contínua llevat de les diagonals dels dos quadrants per generació.

Problema 14 de la llista. Indicacions IV

- A la diagonal (a, a), la funció val a i és contínua

$$|f(x, y) - a| = \begin{cases} |x - a|, & |x| \leq |y| \\ |y - a|, & |x| > |y| \end{cases} \leq \|(x - a, y - a)\|$$

  que tendeix a zero si $(x, y) \to (a, a)$.
- En canvi a la diagonal $(a, -a)$, $a \neq 0$, la funció no és contínua. Per exemple, suposem $a > 0$

$$f(x, -a) = \begin{cases} x, & |x| \leq a \\ -a, & |x| > a \end{cases}$$

$$\lim_{x \to a^+} f(x, a) = -a \neq \lim_{x \to a^-} f(x, a) = a$$

- Solució: Contínua a $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, -x) : x \in \mathbb{R}, x \neq 0\}$.

4. $f(x, y) = x$ si $x^2 + y^2 \leq 1$ i $f(x, y) = y$ si $x^2 + y^2 > 1$.

Problema 14 de la llista. Indicacions V

- Llevat de la circumferència unitat centrada en zero, $\partial\mathcal{B}_1^2(0,0)$ la funció és contínua.
- Prenem un punt (a,b) d'aquesta circumferència. Aleshores, és clar que

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(a,b),\\ x^2+y^2<1}} f(x,y) = a$$

  mentre que

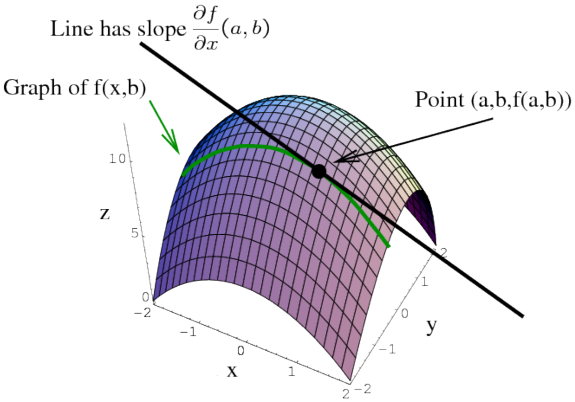
$$\lim_{\substack{(x,y)\to(a,b),\\ x^2+y^2>1}} f(x,y) = b$$

  Aquests dos límits només coïncideixen quan $a=b$ i $a^2+b^2=1$, cosa que dóna

$$(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}), (-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$$

- Solució: És discontínua a $\partial\mathcal{B}_1^2(0,0)\setminus\{(1/\sqrt{2},1/\sqrt{2}),(-1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2})\}$.

Derivades parcials. Motivació I



Derivades parcials. Motivació II

Sigui $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, escalar, $a \in \Omega$. Per a cada x_k l'aplicació

$$f_a^k : x_k \mapsto f_a^k(x_k) = f(a_1, \ldots, x_k, \ldots, a_n)$$

és una funció escalar en un interval obert que conté a_k. Hem vist

- Si $\lim_{x \to a} f(x) = L$, també $\lim_{x_k \to a_k} f_a^k(x_k) = L$
- Si f és contínua en a, també f_a^k és contínua en a_k

I per a les derivades? Per ex., si $f(x, y) = \cos(x + y^2)$ en $(0, 0)$

- Fent $y = 0$, $x \mapsto \cos(x)$ té derivada $-\sin 0 = 0$ en $x = 0$.
- Fent $x = 0$, $x \mapsto \cos(y^2)$ té derivada $-2 \cdot 0 \sin 0 = 0$ en $x = 0$.

Derivades parcials. Motivació III

Això són les derivades parcials resp. x **i** y **de** f **en** $(0,0)$**.**
Sigui $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, funció escalar, $a \in \Omega$ i, per a cada $k = 1, \ldots, n$, siguin f^k les funcions escalars

$$f_a^k : x_k \mapsto f_a^k(x_k) = f(a_1, \ldots, x_k, \ldots, a_n)$$

Derivades parcials. Motivació IV

Definició (Derivada parcial)

Anomenarem **derivada parcial de** f **respecte** x_k **en** a a la derivada de f_a^k en a_k sempre que aquesta existeixi i ho escriurem

- Newton-Lagrange (1671): $f_{x_j}(a)$
- Leibniz (1684): $\frac{\partial}{\partial x_j} f(a) \equiv \partial_{x_j} f(a) \equiv \partial_j f(a)$
- Arbogast (1800): $D_{x_j} f(a) \equiv D_j f(a)$. Equivalentment

$$\partial_j f(a) := \lim_{t \to 0} \frac{f(a_1, \ldots, a_j + t, \ldots, a_n) - f(a)}{t}.$$

Per exemple, considerem la funció

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_2 - \sin(x_2)}{x_1^2 + x_2^2}, & (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & (x, y) = (0,0) \end{cases}$$

Derivades parcials. Motivació V

Per calcular les derivades parcials usem la definició

$$\partial_1 f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t^3} = 0.$$

$$\partial_2 f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t - \sin t}{t^3} = \lim_{t\to 0} \frac{t^3/6}{t^3} = 1/6.$$

No coïncideixen perquè reflecteixen variacions diferents (gràfica).

```
[X,Y]=meshgrid(-1:.11:1); % x=y
Z=(Y-sin(Y))./(X.^2+2*Y.^2);
surf(X,Y,Z)
```

Funció derivada parcial

Quan coneguem una expressió per a la funció derivada d'una de les funcions escalars

$$f_a^k : x_k \mapsto f_a^k(x_k) = f(a_1, \ldots, x_k, \ldots, a_n)$$

podem avaluar-la directament en el punt. Per exemple, calculeu les derivades parcials de

$$f(x_1, x_2) = x_1 e^{x_2 \sin x_1}$$

en el punt $(\frac{\pi}{2}, 0)$. Demostreu que

$$\partial_1 f(\pi/2, 0) = 1 \text{ i } \partial_2 f(\pi/2, 0) = \pi/2.$$

Derivades parcials de funcions vectorials ($m \geq 2$)

- Fins ara, només hem vist el cas de funcions $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$.
- Si $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, funció vectorial, $f = (f_1, \dots, f_m)$, Ω obert i $a \in \Omega$, aleshores la parcial respecte x_j en el punt a és el vector columna format per la derivada parcial de les f_j:

$$\partial_j f(a) := (\partial_j f_1(a), \dots \partial_j f_m(a))^T = \begin{pmatrix} \partial_j f_1(a) \\ \vdots \\ \partial_j f_m(a) \end{pmatrix}$$

- Un exemple important són les corbes a $\mathbb{R}^m$, com trajectòries,

$$\begin{aligned} \sigma : (a, b) &\to \mathbb{R}^n \\ t &\mapsto \sigma(t) = (\sigma_1(t), \dots, \sigma_n(t)) \end{aligned}$$

que tenen com a derivada (parcial) les velocitats

$$\sigma'(t) = (\sigma_1'(t), \dots, \sigma_n'(t))^T$$

Gradients de funcions escalars I

A l'altre extrem hi ha les funcions escalars $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ amb Ω obert i $a \in \Omega$. Si existeixen totes les seves derivades parcials en a, aleshores el vector derivada o **gradient** en a és el vector fila

$$\underbrace{\nabla_x f(a) \equiv \nabla f(a) \equiv D_x f(a) \equiv Df(a)}_{\text{notacions equivalents}} := (\partial_1 f(a), \ldots, \partial_n f(a)),$$

Veurem que el gradient és perpendicular a les corbes de nivell i indica la direcció de màxima variació de la funció. Els punts on s'anul·la el gradient són especials i mereixen una definició:

Definició (Punt crític)

Direm que a és un punt crític de f si $\nabla f(a) = 0$.

Gradients de funcions escalars II

Derivada d'una funció vectorial I

Sigui $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, funció vectorial, $f = (f_1, \ldots, f_m)$, Ω obert i $a \in \Omega$. Si existeixen totes les derivades parcials, aleshores la matriu *mxn* de derivades parcials:

$$J_x f(a) \equiv Jf(a) \equiv D_x f(a) = Df(a) := \begin{pmatrix} \nabla f_1(a) \\ \vdots \\ \nabla f_m(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(a) & \ldots & \partial_n f_1(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 f_m(a) & \ldots & \partial_n f_m(a) \end{pmatrix}$$

s'anomena la **matriu jacobiana** o **de derivades** de f en el punt a

Exercici: Calculeu la matriu jacobiana de

$$f(x_1, x_2) = (e^{x_1+x_2} + x_2, x_1 x_2^2, \cos(x_1 x_2^2)).$$

Derivada d'una funció vectorial II

Solució:

$$Jf(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} e^{x_1+x_2} & e^{x_1+x_2} + 1 \\ x_2^2 & 2x_1x_2 \\ -\sin(x_1x_2^2) & -2x_2\sin(x_1x_2^2) \end{pmatrix}$$

Exercici 20. Enunciat

Calculeu les derivades parcials de les següents funcions.

1. $f(x,y) = x^{y^x}$.
2. $f(x,y) = x^{xy}$.
3. $f(x,y) = (x^2+y^2)^x$.
4. $f(x,y) = xy\ln(x^2+y^2)$.
5. $f(x,y) = \ln(\sqrt{x^2+y^2})$
6. $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$.
7. $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$.
8. $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$.
9. $f(x,y) = \dfrac{\cos x + e^{xy}}{x^2+y^2}$.
10. $f(x,y,z) = e^x \tan(y^2 z)$.
11. $f(x,y,z) = x\sinh\left(\dfrac{y}{z}\right)$.

Podem usar la regla de la cadena. Si $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ i $g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$:

$$\partial_k(f\circ g)(x) = f'(g(x))\cdot\partial_k g(x)$$

Exercici 20. Indicacions I

Calculeu per derivació directa les derivades parcials primeres de les següents funcions.

1. $f(x,y) = x^{y^x}$. **Mètode 1:** Observem que

$$\log\left(\log(x^{y^x})\right) = \log\left(y^x \log(x)\right) = \log\left(y^x\right) + \log\left(\log(x)\right) = x\log\left(y\right) + \log\left(\log(x)\right)$$

que

$$\partial_x\left(\log\log f\right) = \frac{\partial_x f}{f\log f} \Rightarrow \partial_x f = \partial_x\left(\log\log f\right) f\log f$$

Exercici 20. Indicacions II

i la seva parcial respecte x val i respecte y val

$$\partial_x \left(\log\left(\log(x^{y^x})\right)\right) = \log(y) + \frac{1}{x\log(x)} \Rightarrow$$

$$\partial_x f = \left(\log(y) + \frac{1}{x\log(x)}\right) x^{y^x} y^x \log x = x^{y^x} y^x \left(\ln(x)\ln(y) + \frac{1}{x}\right)$$

$$\partial_y \left(\log\left(\log(x^{y^x})\right)\right) = \frac{x}{y} \Rightarrow \partial_y f = \frac{x}{y} x^{y^x} y^x \log x = x^{y^x} x y^{x-1} \log x$$

Mètode 2: En comptes d'aplicar dos cops el logaritme, podem escriure directament

$$x^{(y^x)} = \exp\left(y^x \log x\right) = \exp\left(x \log y \log x\right)$$

i derivar directament per obtenir el mateix resultat.

Exercici 20. Indicacions III

2. $f(x,y) = x^{xy}$. De la mateixa manera que abans.
   $\partial_x f(x,y) = x^{yx}\left(y\ln(x) + y\right)$, $\partial_y f(x,y) = x^{yx} x \ln(x)$.
3. $f(x,y) = (x^2+y^2)^x$.De nou, considerem abans:

$$\partial_x \underbrace{\log\left((x^2+y^2)^x\right)}_{x\log((x^2+y^2))} = \frac{\partial_x f}{x\log\left((x^2+y^2)\right)}$$

   $\partial_x f(x,y) = (x^2+y^2)^x\left(\ln(x^2+y^2) + \frac{2x^2}{x^2+y^2}\right)$,
   $\partial_y f(x,y) = 2xy(x^2+y^2)^{x-1}$.
4. $f(x,y) = xy\ln(x^2+y^2)$.
   $\partial_x f(x,y) = y\ln(x^2+y^2) + \frac{2x^2y}{x^2+y^2}$,
   $\partial_y f(x,y) = x\ln(x^2+y^2) + \frac{2y^2x}{x^2+y^2}$.

Exercici 20. Indicacions IV

5. $f(x,y) = \ln(\sqrt{x^2+y^2})$
   $\partial_x f(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$, $\partial_x f(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}$.
6. $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$.
   $\partial_x f(x,y) = -\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}$, $\partial_y f(x,y) = -\frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}}$.
7. $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$.
   $\partial_x f(x,y) = \dfrac{y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$, $\partial_y f(x,y) = \dfrac{x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$.
8. $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$.
   $\partial_x f(x,y) = \dfrac{-4xy^2}{(x^2-y^2)^2}$, $\partial_x f(x,y) = \dfrac{4yx^2}{(x^2-y^2)^2}$

Exercici 20. Indicacions V

9. $f(x,y) = \dfrac{\cos x + \mathrm{e}^{xy}}{x^2+y^2}$.

$$\partial_x f(x,y) = \frac{ye^{xy} - \sin(x)}{x^2+y^2} - \frac{2x(\cos(x) + e^{xy})}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\partial_y f(x,y) = \frac{xe^{xy}}{x^2+y^2} - \frac{2y(\cos(x) + e^{xy})}{(x^2+y^2)^2}$$

10. $f(x,y,z) = \mathrm{e}^x \tan(y^2 z)$.

$$\begin{aligned} \partial_x f &= e^x \tan\left(y^2 z\right) \\ \partial_y f &= 2\left(\tan\left(y^2 z\right)^2 + 1\right) yze^x \\ \partial_z f &= \left(\tan\left(y^2 z\right)^2 + 1\right) y^2 e^x \end{aligned}$$

Exercici 20. Indicacions VI

11. $f(x, y, z) = x \sinh\left(\frac{y}{z}\right)$.

$$\begin{aligned} \partial_x f &= \sinh\left(\frac{y}{z}\right) \\ \partial_y f &= \frac{x \cosh\left(\frac{y}{z}\right)}{z} \\ \partial_z f &= -\frac{xy \cosh\left(\frac{y}{z}\right)}{z^2} \end{aligned}$$

Derivabilitat i continuïtat

Aquí cal ser curosos en la distinció de $\mathbb{R}$ i $\mathbb{R}^n$

- Per a funcions reals, $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (aka. Càlcul I), sabem que si f és derivable en a, aleshores també és contínua en a.
- Per a funcions vectorials, això no és cert. L'existència de totes les derivades parcials en un punt no implica la continuïtat.

Prenem la funció $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ següent com a exemple:

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2} & \text{si}(x_1, x_2) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si}(x_1, x_2) = (0,0) \end{cases}$$

que vam veure que no tenia límit en $(0,0)$ (rectes). En canvi

$$f(x_1, 0) = 0, \quad x_1 \in \mathbb{R} \Rightarrow \partial_1 f(0,0) = 0$$

$$f(0, x_2) = 0, \quad x_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow \partial_2 f(0,0) = 0$$

Ús d'operadors ∇ i divergència

A vegades és convenien usar el gradient com un operador sobre funcions de (derivables) de $\mathbb{R}^n$:

$$\nabla = (\partial_1, \dots, \partial_n)$$

de manera que, per a una funcio escalar $f\Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$\nabla f = (\partial_1 f, \dots, \partial_n f),$$

ens dóna en cada punt el gradient de f. Per altra banda, per a funcions vectorials, $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, podem definir l'**operador divergència** com

$$f \mapsto \langle \nabla, f \rangle = \sum_{j=1}^{n} \partial_j f_j(x),$$

que és la traça de la matriu jacobiana.

Exercici 16. Enunciat

Aplicant la definició calculeu (si existeixen) les derivades parcials primeres de les següents funcions en el $(0,0)$:

1. $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ i $f(0,0) = 0$.
2. $f(x,y) = x\ln(x^2+y^2)$ si $(x,y) \neq (0,0)$ i $f(0,0) = 0$.
3. $f(x,y) = (x^2+y^2)^x$ si $(x,y) \neq (0,0)$ i $f(0,0) = 1$.

Exercici 16. Indicacions

Aplicant la definició calculeu (si existeixen) les derivades parcials primeres de les següents funcions en el $(0,0)$.

1. $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ i $f(0,0) = 0$.
   $\partial_x f(0,0) = \partial_y f(0,0) = 0$.
2. $f(x,y) = x\ln(x^2+y^2)$ si $(x,y) \neq (0,0)$ i $f(0,0) = 0$.
   - Com que $f(x,0) = x\log x^2$, no existeix $\partial_x f(0,0)$,
   - Com que $f(0,y) = 0$, $\partial_y f(0,0) = 0$.
3. $f(x,y) = (x^2+y^2)^x$ si $(x,y) \neq (0,0)$ i $f(0,0) = 1$.
   - Com que $f(x,0) = x^{2x} = e^{2x\log x}$, no existeix $\partial_x f(0,0)$,
   - Com que $f(0,y) = 1$, $\partial_y f(0,0) = 0$.

Exercici 21. Enunciat

Calculeu les derivades parcials primeres de les següents funcions i doneu la seva matriu jacobiana.

1. $f(x, y) = (e^{xy} + y, y^2 x)$.
2. $f(x, y) = (\cos(x + 2y), y e^{x+y}, \cosh(xy^2))$.
3. $f(x, y, z) = (z \tan(x^2 + y^2), xy \ln(z))$.

Exercici 21. Resultat

Calculeu les matrius jacobianes

1. $f(x,y) = (\mathrm{e}^{xy} + y, y^2 x)$.

$$Jf(x,y) = \begin{pmatrix} ye^{xy} & xe^{xy}+1 \\ y^2 & 2xy \end{pmatrix}$$

2. $f(x,y) = (\cos(x+2y), y\mathrm{e}^{x+y}, \cosh(xy^2))$.

$$Jf(x,y) = \begin{pmatrix} -\sin(x+2y) & -2\sin(x+2y) \\ ye^{x+y} & (y+1)e^{x+y} \\ y^2\sinh(xy^2) & 2xy\sinh(xy^2) \end{pmatrix}$$

3. $f(x,y,z) = (z\tan(x^2+y^2), xy\ln(z))$.

$$Jf = \begin{pmatrix} 2xz\sec(x^2+y^2) & 2yz\sec(x^2+y^2) & \tan(x^2+y^2) \\ y\ln(z) & x\ln(z) & \frac{xy}{z} \end{pmatrix}$$

Exercici 23

D'acord amb la llei dels gasos perfectes tenim la relació $PV = kT$, on P és la pressió, V el volum, T la temperatura i k una constant. Demostreu que

$$\frac{\partial T}{\partial P}\frac{\partial P}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial T} = -1.$$

Aïllant cada magnitud i fent-la variable de les altres

- $T = PV/k$, per tant, $\partial_P T = V/k$.
- $P = kT/V$, per tant, $\partial_V P = -kT/V^2$
- $V = kT/P$, per tant, $\partial_T V = k/P$

Així doncs,

$$\frac{\partial T}{\partial P}\frac{\partial P}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial T} = \left(\frac{V}{k}\right)\cdot\left(-\frac{kT}{V^2}\right)\cdot\left(\frac{k}{P}\right) = -\frac{KT}{VP} = -1$$

Derivades parcials d'ordre superior I

- Suposem que $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ és una funció per a la qual podem calcular les derivades parcials en cada punt i que a, més, aquestes també tenen derivades parcials.
- Així, si f té n derivades parcials (de primer ordre), les derivades parcials de les derivades parcials (n^2 si existeixen totes) s'anomenen les derivades parcials de segon ordre.
- Veiem-ho amb un exemple. Prenem la funció $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x_1, x_2) = x_1^3 + x_1 x_2 + x_2 \sin(x_1).$$

- Aquesta funció és composició de polinomis i sin i, per tant, té derivades parcials en tots els punts (x_1, x_2) de $\mathbb{R}^2$, que són

$$\partial_x f = 3x_1^2 + x_2 + x_2 \cos(x_1), \quad \partial_y f = x_1 + \sin(x_1)$$

Derivades parcials d'ordre superior II

- De nou, podem calcular les derivades de les derivades parcials

$$\begin{aligned}
\partial_{x_1}(\partial_{x_1} f) &= 6x_1 - x_2\sin(x_1),\\
\partial_{x_2}(\partial_{x_1} f) &= 1 + \cos(x_1),\\
\partial_{x_1}(\partial_{x_2} f) &= 1 + \cos(x_1),\\
\partial_{x_2}(\partial_{x_2} f) &= 0.
\end{aligned}$$

que escriurem mitjançant la notació $\partial^{\mathbf{2}}_{\mathbf{x_i x_j}}$:

$$\begin{aligned}
\partial^{\mathbf{2}}_{\mathbf{x_1x_1}}\mathbf{f} &= \partial_{x_1}(\partial_{x_1} f) = 6x_1 - x_2\sin(x_1),\\
\partial^{\mathbf{2}}_{\mathbf{x_2x_1}}\mathbf{f} &= \partial_{x_2}(\partial_{x_1} f) = 1 + \cos(x_1),\\
\partial^{\mathbf{2}}_{\mathbf{x_1x_2}}\mathbf{f} &= \partial_{x_1}(\partial_{x_2} f) = 1 + \cos(x_1),\\
\partial^{\mathbf{2}}_{\mathbf{x_2x_2}}\mathbf{f} &= \partial_{x_2}(\partial_{x_2} f) = 0.
\end{aligned}$$

- Es comença derivant per la variable més propera a f.

Exercici a classe. Enunciat

Exercici

Calculeu totes derivades parcials d'ordre 3 de

$$f(x_1, x_2) = x_1^3 + x_1 x_2 + x_2 \sin(x_1).$$

que siguin de la forma $\partial^3_{x_j x_k x_1}$, és a dir

$$\partial^3_{x_1 x_1 x_1}, \partial^3_{x_1 x_2 x_1}, \partial^3_{x_2 x_1 x_1}, \partial^3_{x_2 x_2 x_1}$$

Recordatori

$$\begin{aligned}
\partial^2_{\mathbf{x_1 x_1}} \mathbf{f} &= \partial_{x_1} \left(\partial_{x_1} f\right) = 6x_1 - x_2 \sin(x_1), \\
\partial^2_{\mathbf{x_2 x_1}} \mathbf{f} &= \partial_{x_2} \left(\partial_{x_1} f\right) = 1 + \cos(x_1), \\
\partial^2_{\mathbf{x_1 x_2}} \mathbf{f} &= \partial_{x_1} \left(\partial_{x_2} f\right) = 1 + \cos(x_1), \\
\partial^2_{\mathbf{x_2 x_2}} \mathbf{f} &= \partial_{x_2} \left(\partial_{x_2} f\right) = 0.
\end{aligned}$$

Exercici a classe. Solució

Exercici

Calculeu totes derivades parcials d'ordre 3 de

$$f(x_1, x_2) = x_1^3 + x_1x_2 + x_2 \sin(x_1).$$

que siguin de la forma $\partial^3_{x_j x_k x_1}$

$$\begin{aligned}
\partial^3_{x_1x_1x_1} f &= \partial_{x_1}\left(\partial^2_{x_1x_1} f\right) = -x_2\cos\left(x_1\right) + 6,\\
\partial^3_{x_1x_2x_1} f &= \partial_{x_1}\left(\partial^2_{x_2x_1} f\right) = -\sin\left(x_1\right),\\
\partial^3_{x_2x_1x_1} f &= \partial_{x_2}\left(\partial^2_{x_1x_1} f\right) = -\sin\left(x_1\right),\\
\partial^3_{x_2x_2x_1} f &= \partial_{x_2}\left(\partial^2_{x_2x_1} f\right) = 0
\end{aligned}$$

Igualtat de derivades creuades I

- Hem vist la igualtat d'algunes derivades d'ordre dos, com ara

$$\partial^2_{x_1x_2} f = \partial^2_{x_2x_1} f = 1 + \cos(x_1)$$

- Per a les derivades de tercer ordre que hem calculat, hem vist que algunes també eren iguals:

$$\partial^3_{x_1x_2x_1} f = \partial^3_{x_2x_1x_1} f = -\sin(x_1)$$

- També surt el mateix resultat si fem

$$\partial^3_{x_1x_1x_2} f = \partial_{x_1}\left(\partial^2_{x_1x_2} f\right) = -\sin(x_1)$$

- Què tenen en comú tots aquests casos?

Igualtat de derivades creuades II

- Les derivades creuades no sempre dónen el mateix.
- Per exemple, considerem la funció (exercici 27):

$$\begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

- Les seves funcions derivades parcials són

$$\partial_x f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4 y + 4\,x^2 y^3 - y^5}{(x^2+y^2)^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

$$\partial_y f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^5 - 4\,x^3 y^2 - xy^4}{(x^2+y^2)^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Igualtat de derivades creuades III

- Fora del $(0,0)$, les derivades creuades coïncideixen

$$\partial^2_{x,y} f(x,y) = \partial^2_{y,x} f(x,y) = \frac{x^6 + 9\,x^4 y^2 - 9\,x^2 y^4 - y^6}{(x^2+y^2)^4}$$

- Per calcular $\partial^2_{y,x}(0,0)$ cal que usem la definició:

$$\partial^2_{y,x}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{\partial_x f(0,y) - 0}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{1}{y}\frac{-y^5}{y^4} = -1$$

mentre que la la derivada segona $\partial^2_{x,y}(0,0)$

$$\partial^2_{x,y}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{\partial_y f(x,0) - 0}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\frac{x^5}{x^4} = 1$$

i així les derivades creuades no coïncideixen...

Funcions de classe $\mathcal{C}^k$

Definició (Funció de classe $\mathcal{C}^k$)

Direm que una funció $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ és de **classe $\mathcal{C}^k$, escrit** $f \in \mathcal{C}^k(\Omega)$ si existeixen totes les derivades parcials fins a ordre k i les n^k derivades parcials d'ordre k són contínues. Si $f = (f_1, \dots, f_m)$, direm que és $\mathcal{C}^k$ si totes les f_j són $\mathcal{C}^k$.

- $\mathcal{C}^k(\Omega) \subset \mathcal{C}^{k-1}(\Omega) \subset \dots$ En particular, no $\mathcal{C}^1$ implica no $\mathcal{C}^2$.
- Per convenció, les funcions de classe $\mathcal{C}^0(\Omega)$ són les funcions contínues. També, no $\mathcal{C}^0$ implica no $\mathcal{C}^1$. Així la funció $f(x_1, x_2) = \frac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2}$ si $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$, i $f(0, 0) = 0$ no és $\mathcal{C}^1$ a l'origen.

Funcions de classe $\mathcal{C}^\infty$

- Les funcions polinòmiques, en diverses variables, tenen derivades parcials polinòmiques. Com que les funcions polinòmiques són sempre contínues, les funcions polinòmiques són de classe $\mathcal{C}^k(\mathbb{R}^2)$ per qualsevol $k \in \mathbb{N}$.
- Quan una funció és de classe $\mathcal{C}^k(\Omega)$ per qualsevol k direm que és de classe $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$.
- Les funcions racionals són contínues llevat dels punts que anul·len el denominador (pols). Les seves derivades parcials tenen els mateixos pols i són també funcions racionals. Per tant, les funcions racionals són $\mathcal{C}^\infty$ a $\mathbb{R}^n$ excepte als pols.
- A $\mathbb{R}$: $\sin, \cos, \sinh, \cosh \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, $\sqrt{\cdot}, \log \in \mathcal{C}^\infty((0, +\infty))$.
- Podem composar aquestes funcions i generar-ne més $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$.

El teorema de Schwarz

Teorema (Schwarz)

Si $f \in \mathcal{C}^k(\Omega)$, podem permutar l'ordre de les derivades parcials fins a ordre k i dóna el mateix resultat. Així, per exemple, en el case de $\Omega \subset \mathbb{R}^2$:

- *Per $k = 2$,*
$$\partial^2_{xy} f(x, y) = \partial^2_{yx} f(x, y)$$
- *Per $k = 3$, a més de l'anterior igualtat tenim*
$$\partial^3_{xyy} f(x, y) = \partial^3_{yxy} f(x, y) = \partial^3_{yyx} f(x, y)$$
$$\partial^3_{yxx} f(x, y) = \partial^3_{xyx} f(x, y) = \partial^3_{xxy} f(x, y)$$

Exercici 24

Per a quins valors de a, b, c i d pot existir una funció $f(x,y)$ tal que $\dfrac{\partial f}{\partial x} = ax + by$ i $\dfrac{\partial f}{\partial y} = cx + dy$? Per a aquests valors calculeu totes les possibles solucions per a f.

- Imposem que les derivades de segon ordre siguin iguals:

$$\partial^2_{xy} f(x,y) = \partial^2_{yx} f(x,y)$$

- Solució: $b = c$ i

$$f(x,y) = \frac{a}{2}x^2 + bxy + \frac{d}{2}y^2.$$

El Laplacià

Definició

Si f és una funció escalar, el seu Laplacià es defineix com la divergència del seu gradient:

$$\Delta f = \langle \nabla, \nabla f \rangle.$$

Així doncs, si $f \in C^2(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

$$\Delta f(x) = \partial^2_{x_1,x_2} f + \partial^2_{x_2,x_2} f + \cdots + \partial^2_{x_n,x_n} f$$

Es pot veure que

$$\Delta \langle x, \nabla f \rangle = 2\Delta f + \langle x, \nabla \Delta f \rangle$$

Exercici 25. Enunciat

Considereu la funció

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \text{ si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1. Aplicant la defininció de derivada parcial calculeu $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$.
2. Calculeu $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ si $(x,y) \neq (0,0)$.
3. Demostreu que $\nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$.
4. Quin és el subconjunt $D \subset \mathbb{R}^2$ més gran on tenim que $f \in C^1(D)$?

Exercici 25. Indicacions I

Considereu la funció

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \text{ si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1. Aplicant la defininció de derivada parcial calculeu $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$.
   Com que $f(x,0) = 0$, aleshores

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$$

Exercici 25. Indicacions II

2. Calculeu $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ si $(x,y) \neq (0,0)$. Usant les regles

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y^3}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}.$$

3. Demostreu que $\nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$.
   - Podem triar la recta $y=0$ (límit 0)
   - i la recta $x=0$ (límit 1).
4. Quin és el subconjunt $D \subset \mathbb{R}^2$ més gran on tenim que $f \in C^1(D)$?

$$D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

Exercici 27. Enunciat I

Considereu la funció

$$f(x,y) = xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

si $(x,y) \neq (0,0)$ i $f(0,0) = 0$.

1. Calculeu $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ i $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$, si $(x,y) \neq (0,0)$.
2. Usant la definició calculeu $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ i $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.
3. Usant la definició calculeu $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ i $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$. Indicació

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,h) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{h}.$$

Exercici 27. Enunciat II

4. Quin és el subconjunt $D \subset \mathbb{R}^2$ més gran on tenim que $f \in C^2(D)$?
5. Quin és el subconjunt $D \subset \mathbb{R}^2$ més gran on tenim que $f \in C^\infty(D)$?

Exercici 27. Indicacions I

Considereu la funció

$$f(x,y) = xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

si $(x,y) \neq (0,0)$ i $f(0,0) = 0$.

1. Calculeu $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ i $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$, si $(x,y) \neq (0,0)$.

   $$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2},$$
   $$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x(x^4-4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}$$

2. Usant la definició calculeu $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ i $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

   $$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$$

Exercici 27. Indicacions II

3. Usant la definició calculeu $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ i $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$. Indicació

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,h) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{h}.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1, \ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = -1.$$

4. Quin és el subconjunt $D \subset \mathbb{R}^2$ més gran on tenim que $f \in C^2(D)$?
   $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
5. Quin és el subconjunt $D \subset \mathbb{R}^2$ més gran on tenim que $f \in C^\infty(D)$?
   $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

La regla de la cadena: de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}^n$ I

Regla de la cadena a $\mathbb{R}$

Donades $f:\Omega^* \to R$ i $g:\Omega \to \mathbb{R}$ tenim que si $\tilde{f}(x) \equiv f(g(x))$, llavors $\tilde{f}'(x) = f'(g(x))g'(x)$.

Per a funcions vectorials

$$g:\Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \quad f:\Omega^* \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k \quad f\circ g:\Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$$

on s'ha de complir que $g(\Omega) \subset \Omega^*$ perquè la composició $\tilde{f} = f\circ g$ estigui ben definida, podrem trobar la matriu de derivades o matriu jacobiana de la $\tilde{f}$ usant la mateixa igualtat que abans, però escrita amb matrius jacobianes:

$$\underbrace{(J\tilde{f})(x)}_{k\times n} = \underbrace{(Jf)(g(x))}_{k\times m} \cdot \underbrace{(Jg)(x)}_{m\times n}.$$

La regla de la cadena: de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}^n$ II

En termes de les derivades parcials,

$$\begin{pmatrix} \partial_1(f\circ g)_1(x) & \dots & \partial_n(f\circ g)_1(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1(f\circ g)_k(x) & \dots & \partial_n(f\circ g)_k(x) \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} \partial_1 f_1(g(x)) & \dots & \partial_m f_1(g(x)) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 f_k(g(x)) & \dots & \partial_m f_k(g(x)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_1 g_1(x) & \dots & \partial_n g_1(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 g_m(x) & \dots & \partial_n g_m(x) \end{pmatrix}$$

que és el mateix que escriure:

$$\partial_i(f\circ g)_j(x) = \sum_{l=1}^{m} \partial_i f_l(g(x))\partial_l g_j(x)$$

La regla de la cadena: de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}^n$ III

Observem que això ja ho havíem estat fent de forma intuïtiva. Per exemple, suposem que $k, m = 2$ i que $n = 3$. Així

$$f(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y))\,, g(x,y,z) = (g_1(x,y,z), g_2(x,y,z))$$

i, per tant, la composició és

$$(f\circ g)(x,y,z) = \left(\underbrace{f_1(g_1(x,y,z), g_2(x,y,z))}_{(f\circ g)_1}, \underbrace{f_2(g_1(x,y,z), g_2(x,y,z))}_{(f\circ g)_2}\right)$$

i per calcular les derivades respecte la x

$$\begin{aligned}\partial_x(f\circ g)_1(x,y,z) = {} & \partial_x f_1(g_1(x,y,z), g_2(x,y,z))\partial_x g(x,y,z) + \\ & \partial_y f_1(g_1(x,y,z), g_2(x,y,z))\partial_x g(x,y,z)\end{aligned}$$

La regla de la cadena: de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}^n$ IV

i, respecte la y:

$$\begin{aligned}\partial_y (f\circ g)_1(x,y,z) = {} & \partial_x f_1(g_1(x,y,z), g_2(x,y,z))\partial_y g(x,y,z) + \\ & \partial_y f_1(g_1(x,y,z), g_2(x,y,z))\partial_y g(x,y,z)\end{aligned}$$

i, respecte la z

$$\begin{aligned}\partial_z (f\circ g)_1(x,y,z) = {} & \partial_x f_1(g_1(x,y,z), g_2(x,y,z))\partial_z g(x,y,z) + \\ & \partial_y f_1(g_1(x,y,z), g_2(x,y,z))\partial_z g(x,y,z)\end{aligned}$$

Exercici (càlcul) I

Donada la composició $\tilde{f} = f \circ g$ amb

$$f(y_1, y_2) = (\cos(y_2) + y_1^2, e^{y_1+y_2}, y_1 - y_2),$$

$$g(x_1, x_2) = (e^{x_1^2}, x_1 - \sin(x_2)),$$

Comproveu que

$$J\tilde{f}(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ e & -e \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Amb el producte de les matrius jacobianes en $(0, 0)$
- Calculant directament la composició i les derivades en $(0, 0)$.

Exercici (càlcul) II

La matriu jacobiana (matriu de derivades) de f en (y_1, y_2) és

$$Jf(y_1, y_2) = \begin{pmatrix} 2\,y_1 & -\sin(y_2) \\ e^{(y_1+y_2)} & e^{(y_1+y_2)} \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

mentre que la matriu jacobiana de la g en (x_1, x_2) és

$$Jg(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2\,x_1 e^{\left(x_1^2\right)} & 0 \\ 1 & -\cos(x_2) \end{pmatrix}$$

Ara volem calcular la jacobiana de la composició en $(0, 0)$, $J\tilde{f}(0, 0)$ usant la regla de la cadena, que en aquest cas ens diu:

$$J\tilde{f}(0,0) = (Jf)(g(0,0))(Jg)(0,0) \underbrace{=}_{g(0,0)=(1,0)} (Jf)(1,0)(Jg)(0,0)$$

Exercici (càlcul) III

com que

$$(Jg)(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad (Jf)(1,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ e & e \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

la jacobiana de la composició és

$$J\tilde{f}(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ e & e \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ e & -e \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercici (càlcul) IV

com volíem veure. Aquesta és la manera més senzilla en aquest cas, anem a veure què passa si fem primer la composició.

$$\tilde{f}(x_1, x_2) = \left(\cos\left(x_1 - \sin\left(x_2\right)\right) + e^{\left(2\,x_1^2\right)}, e^{\left(x_1 + e^{\left(x_1^2\right)} - \sin(x_2)\right)}, -x_1 + e^{\left(x_1^2\right)} + \sin\left(x_2\right)\right)$$

i la seva matriu jacobiana $J\tilde{f}(x_1, x_2)$ és

$$\begin{pmatrix} 4\,x_1 e^{\left(2\,x_1^2\right)} - \sin\left(x_1 - \sin\left(x_2\right)\right) & \cos\left(x_2\right)\sin\left(x_1 - \sin\left(x_2\right)\right) \\ \left(2\,x_1 e^{\left(x_1^2\right)} + 1\right) e^{\left(x_1 + e^{\left(x_1^2\right)} - \sin(x_2)\right)} & -\cos\left(x_2\right) e^{\left(x_1 + e^{\left(x_1^2\right)} - \sin(x_2)\right)} \\ 2\,x_1 e^{\left(x_1^2\right)} - 1 & \cos\left(x_2\right) \end{pmatrix}$$

Exercici (càlcul) V

que, avaluada en el $(0,0)$ dóna el mateix resultat que abans

$$J\tilde{f}(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ e & -e \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemple: funcions escalars I

Prenem $f : \Omega^* \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ una funció escalar i $g : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m; x \to g(x)$ vectorial. Així, $\tilde{f}$ és escalar:

$$\tilde{f}(x) := f \circ g(x) = f(g(x)) = f(g_1(x), \ldots, g_m(x))$$

La regla de la cadena ens diu, en aquest cas,

$$\nabla \tilde{f}(x) = (\nabla f)(g(x)) \cdot J_x g(x).$$

o, el que és el mateix escrit en coordenades:

$$\partial_j \tilde{f}(x) = \langle (\nabla f)(g(x)), (\partial_j g(x))^T \rangle =$$

$$(\nabla f)(g(x)) \cdot \partial_j g(x) = \sum_{l=1}^{m} (\partial_l f)(g(x)) \partial_j g_l(x).$$

Exemple: funcions escalars II

Exercici

Calculeu $\partial_1 \tilde{f}(x_1, x_2)$ si

$$f(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 + y_2^2 - y_3,\; g(x_1, x_2) = (x_1^2 x_2, x_2^2, e^{-x_1 x_2}).$$

En aquest cas la composició val

$$\tilde{f}(x_1, x_2) = x_1^4 x_2^2 + x_2^4 - e^{-x_1 x_2}$$

i és fàcil veure que

$$\partial_{x_1} \tilde{f}(x_1, x_2) = 4x_1^3 x_2^2 + x_2 e^{-x_1 x_2}.$$

Exemple: funcions escalars III

Proveu de fer-ho amb el càlcul de matrius jacobianes:

$$Jg(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} 2\,x_1x_2 & x_1^2 \\ 0 & 2\,x_2 \\ -x_2e^{(-x_1x_2)} & -x_1e^{(-x_1x_2)} \end{pmatrix}$$

$$Jf(y_1,y_2,y_3) = \begin{pmatrix} 2\,y_1 & 2\,y_2 & -1 \end{pmatrix}$$

i el producte de matrius el podem fer en dues etapes:

$$\begin{pmatrix} 4\,x_1x_2y_1 + x_2e^{(-x_1x_2)} & 2\,x_1^2y_1 + 4\,x_2y_2 + x_1e^{(-x_1x_2)} \end{pmatrix}$$

i, per tant, la derivada parcial respecte x_1 és la primera component,

$$\partial_{x_1}\tilde{f}(x_1,x_2) = 4\,x_1x_2y_1 + x_2e^{(-x_1x_2)} \underbrace{=}_{y_1=x_1^2x_2} 4x_1^3x_2^2 + x_2e^{-x_1x_2}$$

Exemple Corbes a $\mathbb{R}^n$ I

Recordem que una corba a $\mathbb{R}^n$, p.e. una trajectòria, és una aplicació

$$\sigma : (a, b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n ; t \to \sigma(t) = (\sigma_1(t), \ldots, \sigma_n(t)).$$

Si la composem amb $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}; x \to f(x)$ funció escalar tindrem

$$\tilde{f}(t) := f(\sigma(t))$$

Exemple Corbes a $\mathbb{R}^n$ II

i així la seva derivada serà

$$\tilde{f}'(t) = \underbrace{((\partial_1 f)(\sigma(t)), \ldots, (\partial_n f)(\sigma(t)))}_{Jf(\sigma(t))} \underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_1'(t) \\ \vdots \\ \sigma_n'(t) \end{pmatrix}}_{J\sigma(t)} =$$

$$= \langle \nabla_x f(\sigma(t)), (\sigma'(t))^T \rangle = \sum_{l=1}^{m} \partial_l f(\sigma(t)) \sigma_l'(t).$$

Exercici 29. Enunciat

Exercici 29

Siguin $f(u,v) = (\tan(u-1) - \mathrm{e}^v, u^2 - v^2)$ i $g(x,y) = (\mathrm{e}^{x-y}, x-y)$. Calculeu $D(f \circ g)(1,1)$ mitjançant la regla de la cadena.

Exercici 29

Exercici 29

Siguin $f(u,v) = (\tan(u-1) - \mathrm{e}^v, u^2 - v^2)$ i $g(x,y) = (\mathrm{e}^{x-y}, x-y)$. Calculeu $D(f \circ g)(1,1)$ mitjançant la regla de la cadena.

$$Df(u,v) = \begin{pmatrix} \sec^2(u-1) & -e^v \\ 2u & -2v \end{pmatrix}, \quad Dg(x,y) = \begin{pmatrix} e^{x-y} & -e^{x-y} \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$D(f \circ g)(1,1) = Df(1,0)Dg(1,1) =$$
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Exercici 33 I

Donada una funció $f = f(u, v, w)$ de classe C^1, calculeu mitjançant la regla de la cadena expressions per a les derivades o derivades parcials primeres de la funció h en termes de les de α, β i γ en cadascun dels casos següents.

1. $h(x) = f(x, \alpha(x), \beta(x))$.
2. $h(x, y) = f(y, \alpha(x, y), \beta(x))$.
3. $h(x, y, z) = f(\alpha(z), \beta(y, z), \gamma(x, y, z))$.

Per exemple,

$$h'(x) = \partial_1 f(x, \alpha(x), \beta(x)) + \partial_2 f(x, \alpha(x), \beta(x))\alpha'(x) + \partial_3 f(x, \alpha(x), \beta(x))\beta'(x)$$

Exercici 33 II

1. $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \alpha(\mathbf{x}), \beta(\mathbf{x}))$.
   $\partial_x h(x, y) =$
   $\partial_2 f(y, \alpha(x, y), \beta(x))\partial_x \alpha(x, y) + \partial_3 f(y, \alpha(x, y), \beta(x))\beta'(x)$,
   $\partial_y h(x, y) =$
   $\partial_1 f(y, \alpha(x, y), \beta(x)) + \partial_2 f(y, \alpha(x, y), \beta(x))\partial_y \alpha(x, y)$.
2. $\mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \mathbf{f}(\alpha(\mathbf{z}), \beta(\mathbf{y}, \mathbf{z}), \gamma(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}))$.
   $\partial_x h(x, y) = \partial_3 f(\alpha(z), \beta(y, z), \gamma(x, y, z))\partial_x \gamma(x, y, z)$,
   $\partial_y h(x, y) = \partial_2 f(\alpha(z), \beta(y, z), \gamma(x, y, z))\partial_y \beta(y, z) +$
   $\partial_3 f(\alpha(z), \beta(y, z), \gamma(x, y, z))\partial_y \gamma(x, y, z)$,
   $\partial_z h(x, y) = \partial_1 f(\alpha(z), \beta(y, z), \gamma(x, y, z))\alpha'(z) +$
   $\partial_2 f(\alpha(z), \beta(y, z), \gamma(x, y, z))\partial_z \beta(y, z)$
   $+\partial_3 f(\alpha(z), \beta(y, z), \gamma(x, y, z))\partial_z \gamma(x, y, z)$.

Derivada de la funció inversa a $\mathbb{R}$

Si $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és una funció derivable definida en un interval i la derivada no s'anul·la enlloc, aleshores existeix la funció inversa $f^{-1} : J \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on $f(I) = J$ és un interval, que compleix

$$f^{-1}(f(x)) = x, \quad x \in I.$$

A més, la funció inversa és derivable i, derivant aquesta expressió obtenim

$$f^{-1'}(f(x))\, f'(x) = 1 \Rightarrow f^{-1'}(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$$

Jacobiana de la funció inversa a $\mathbb{R}^n$ I

A nivell de càlculs, a $\mathbb{R}^n$, la cosa funciona de manera semblant. Prenem que $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \Omega^* \subset \mathbb{R}^n$ una funció $\mathcal{C}^1$ a Ω. Suposem, per un moment, que existeixi una funció inversa f^{-1}. És a dir, suposem que existeixi una funció

$$f^{-1} : \Omega^* \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \text{ tal que } f^{-1}(f(x)) = x, \ x \in \Omega$$

- Les dimensions del domini i la imatge han de ser iguals.
- Si suposem que també f^{-1} és de classe $\mathcal{C}^1$ a Ω^*, derivant la relació $f^{-1}(f(x)) = x$, i amb la regla de la cadena s'obté

$$Df^{-1}(f(x))(Df(x)) = I,$$

Jacobiana de la funció inversa a $\mathbb{R}^n$ II

- Per tant, cal que es compleixi que $Df(x)$ sigui invertible i aleshores la matriu jacobiana de la funció inversa de f és la matriu inversa de la jacobiana de f

$$Df^{-1}(f(x)) = (Df(x))^{-1}$$

- $Df(x)$ serà invertible si el seu determinant, anomenat **(determinant) jacobià de** f **en** x és diferent de zero.
- Hi ha la següent relació amb els jacobians de f i f^{-1}:

$$\det Df^{-1}(f(x)) = \frac{1}{\det Df(x)}.$$

- Quan podem assegurar que f^{-1} existeix i és $\mathcal{C}^1$?

El teorema de la funció inversa

Teorema (Funció inversa)

Sigui $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \Omega^* \subset \mathbb{R}^n$ una funció $\mathcal{C}^1$ a Ω. Donat $p \in \Omega$ t.q.

$$\det Df(p) \neq 0,$$

llavors f és **localment invertible***, és a dir, existeix $\epsilon > 0$ de manera que $\mathcal{B}^n_\epsilon(p) \subset \Omega$ i que la funció restringida a aquesta bola*

$$f : \mathcal{B}^n_\epsilon(p) \to f\left(\mathcal{B}^n_\epsilon(p)\right),$$

és bijectiva (injectiva i exhaustiva), i la seva inversa f^{-1} és $\mathcal{C}^1$.

Quan $f^{-1} : \Omega^* \to \Omega$ direm que f és **globalment invertible** a Ω.

Exemple de càlcul

Exercici

Sigui $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida per $f(x,y) = (e^x + e^y, e^x - e^y)$. Comproveu que existeix f^{-1} i calculeu Df^{-1}.

La matriu jacobiana de la f en un (x,y) qualsevol és

$$Df(x,y) = \begin{pmatrix} e^x & e^y \\ e^x & -e^y \end{pmatrix}$$

i el seu determinant és

$$\det\left(Df(x,y)\right) = -2\, e^{(x+y)}$$

que no s'anul·la en cap punt de $\mathbb{R}^2$. Per tant, en cada punt (x,y) existeix una funció inversa local i la jacobiana de la inversa és

$$Df^{-1}(x,y) = \begin{pmatrix} e^x & e^y \\ e^x & -e^y \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\, e^{-x} & \frac{1}{2}\, e^{-x} \\ \frac{1}{2}\, e^{-y} & -\frac{1}{2}\, e^{-y} \end{pmatrix}$$

Una fórmula útil

La matriu inversa d'una matriu 2×2 es pot calcular directament

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Exercici 34 I

Exercici 34

Sigui $f(x, y, z) = (e^{2y} + e^{2z}, e^{2x} - e^{2z}, x - y)$. Proveu que f té una inversa local en tots els punts de $\mathbb{R}^3$ i calculeu la seva matriu derivada.

- En primer lloc, anem a veure que f té una inversa local en cada punt (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$.
- Com que f és de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3)$ només cal veure que el determinant jacobià mai no s'anul·la:

$$Df = \begin{pmatrix} 0 & 2\,e^{(2\,y)} & 2\,e^{(2\,z)} \\ 2\,e^{(2\,x)} & 0 & -2\,e^{(2\,z)} \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercici 34 II

i, per tant, el seu determinat jacobià val

$$\det\left(Df(x,y,z)\right) = -4\left(e^{2x+2z} + e^{2y+2z}\right) < 0$$

que no s'anul·la en cap punt (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$.

- Amb les eines de què disposem, per veure que té una inversa global, no hi ha més remei que trobar la inversa i veure que és $\mathcal{C}^1$ a $\mathbb{R}^3$. Per fer-ho, hem d'aïllar x, y, z de l'expressió següent

$$\begin{aligned} \bar{x} &= e^{2y} + e^{2z} \\ \bar{y} &= e^{2x} - e^{2z} \\ \bar{z} &= x - y \end{aligned}$$

i expressar-les en funció de $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$.

Funcions i derivació implícita (Zill 3.6 ⇒ Càlcul 1) I

- Moltes de les funcions usades en la ciència o la tècnica no venen expressades com la gràfica d'una funció.
- A més, a vegades és molt més convenient una expressió *implícita* que no pas una expressió *explícita* d'una funció.
- Per exemple, l'equació *implícita* de la circumferència de radi 5 i centrada a l'origen és

$$x^2 + y^2 = 5^2$$

i això defineix dues funcions $y = y(x)$ com són $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$ i $g(x) = -\sqrt{25 - x^2}$, amb domini $x \in [-5, 5]$.

Funcions i derivació implícita (Zill 3.6 $\Rightarrow$ Càlcul 1) II

- Observem que aquestes dues funcions són solució de l'equació implícita:

$$x^2 + f(x)^2 = 25 \quad \text{i} \quad x^2 + g(x)^2 = 25, \quad x \in [-5, 5]$$

- Podem trobar la derivada de f i g en un punt qualsevol de la corba sense conèixer l'<u>expressió explícita</u> d'aquestes.
- Per exemple, anem a trobar la derivada de f en 3 *derivant implícitament*:
  1. Com que f és la "branca positiva", i sabem que f compleix:

$$x^2 + f(x)^2 = 25,\ x \in [-2, 2] \underbrace{\Rightarrow}_{x=3} 3^2 + f(3)^2 = 25 \underbrace{\Rightarrow}_{f \geq 0} f(3) = 4$$

Funcions i derivació implícita (Zill 3.6 ⇒ Càlcul 1) III

2. Suposant que f és derivable en $x = 3$, podem derivar l'expressió
$$x^2 + f(x)^2 = 25$$
i avaluar-la en $x = 3$ per trobar $f'(3)$. En efecte:
$$\underbrace{2x}_{\frac{d}{dx}x^2} + \underbrace{2f(x)f'(x)}_{\frac{d}{dx}f(x)^2} = \underbrace{0}_{\frac{d}{dx}25} \underbrace{\Rightarrow}_{x=3} 6 + 2\underbrace{f(3)}_{4}f'(3) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f'(3) = -\frac{6}{8} = -\frac{3}{4}.$$

- Observem que si fem el mateix derivant l'expressió explícita obtenim:
$$f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{25 - x^2}} \Rightarrow f'(3) = \frac{-2 \cdot 3}{2\sqrt{25 - 3^2}} = \frac{-3}{4}$$
- I si no podem aïllar l'expressió implícita de l'explícita?

El teorema de la funció implícita a $\mathbb{R}^2$

Teorema Donada la funció de classe $\mathcal{C}^1$ a $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} f : \Omega^* \subset \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto f(x, y), \end{aligned}$$

considerem l'equació implícita $f(x, y) = 0$. Suposem el següent

- Hi ha un punt $(p, q) \in \Omega^*$ tal que $f(p, q) = 0$.
- En aquest punt, es compleix que

$$\partial_y f(p, q) \neq 0.$$

Aleshores existeix un $\epsilon > 0$ i una funció $\mathcal{C}^1$, $g : \mathcal{B}_\epsilon(p) \to \mathbb{R}$, amb $g(p) = q$, de manera que, per qualsevol $x \in \mathcal{B}_\epsilon(p)$,

$$f(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = g(x).$$

Càlcul de la derivada a $\mathbb{R}^2$

Donades dues funcions de classe $\mathcal{C}^1$:

$$\begin{aligned} f: \Omega^* \subset \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto f(x,y), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g: \Omega \subset \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto g(x), \end{aligned}$$

que, per qualsevol satisfacin l'equació

$$f(x, g(x)) = 0$$

per calcular la derivada només cal aplicar la regla de la cadena

$$\partial_x f(x, g(x)) + \partial_y f(x, g(x)) g'(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad g'(x) = -\frac{\partial_x f(x, g(x))}{\partial_y f(x, g(x))}.$$

El teorema de la funció implícita a $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ I

Teorema Donada la funció de classe $\mathcal{C}^1$ a $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$:

$$\begin{aligned} f : \Omega^* \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m &\to \mathbb{R}^m \\ (x, y) &\mapsto f(x, y), \end{aligned}$$

considerem el sistema d'equacions implícites $f(x, y) = 0$, és a dir

$$\begin{aligned} f_1(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) &= 0 \\ f_2(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) &= 0 \\ &\vdots \\ f_m(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) &= 0 \end{aligned}$$

Suposem que es compleixi el següent:

El teorema de la funció implícita a $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ II

- Hi ha un punt $(p, q) \in \Omega^* \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ tal que $f(p, q) = 0$.
- En aquest punt, la següent matriu $m \times m$ és invertible:

$$D_y f(p, q) = \begin{pmatrix} \partial_{y_1} f_1(p, q) & \dots & \partial_{y_m} f_1(p, q) \\ \partial_{y_1} f_2(p, q) & \dots & \partial_{y_m} f_2(p, q) \\ \vdots & & \\ \partial_{y_1} f_m(p, q) & \dots & \partial_{y_m} f_m(p, q) \end{pmatrix}$$

Aleshores existeix un $\epsilon > 0$ i una funció $\mathcal{C}^1$, $g : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, amb $g(p) = q$, de manera que, per qualsevol $x \in \mathcal{B}_\epsilon(p)$,

$$f(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = g(x).$$

Càlcul de la derivada a $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$

El càlcul de la matriu de derivades de g es fa a partir de l'equació

$$f(x, g(x)) = 0,$$

on, recordem,

$$\begin{aligned} f : \Omega^* \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m &\to \mathbb{R}^m \\ (x, y) &\mapsto f(x, y), \end{aligned}$$

i $g : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Si volem calcular la matriu de derivades de g, $Dg(x)$, en funció de les derivades de f. Amb la regla de la cadena:

$$D_x f(x, g(x)) + D_y f(x, g(x)) Dg(x) = 0 \quad \underbrace{\iff}_{\exists D_y f(x,y)^{-1}}$$

$$\iff Dg(x) = -\left(D_y f(x, g(x))\right)^{-1} D_x f(x, g(x)).$$

Exemple de càlcul a $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ I

La discussió dels sistemes d'equacions no lineals és, doncs, similar al dels sistemes lineals. Per exemple, donada una funció $\mathcal{C}^1/\Omega)$, $f : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, considerem l'equació

$$f(x, y, z) = 0,$$

al voltant d'un punt $(x_0, y_0, z_0) \in \Omega$ tal que

$$f(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

Suposem que volem "aïllar" la variable z en funció de les altres dues variables x i y. Per poder aplicar el Teorema de la funció implícita cal que

$$\partial_z f(x_0, y_0, z_0) \neq 0.$$

Exemple de càlcul a $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ II

Si això es compleix, aleshores existeix $\epsilon > 0$ i una funció $\mathcal{C}^1$

$$\begin{aligned} g : \mathcal{B}^2_\epsilon(x_0, y_0) &\to \mathbb{R}^m \\ (x, y) &\to g(x, y), \end{aligned}$$

amb $g(x_0, y_0) = z_0$, de manera que, per qualsevol $(x, y) \in \mathcal{B}^2_\epsilon(x_0, y_0)$,

$$f(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow z = g(x, y)).$$

Per calcular les derivades de g en (x_0, y_0, z_0), derivem

$$f(x, y, g(x, y)) = 0$$

Exemple de càlcul a $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ III

respecte (x, y) i usem la regla de la cadena en

$$D_{(x,y)}\left(f(x,y,g(x,y))\right) = 0 \Rightarrow$$
$$D_{(x,y)}f\left(x,y,g(x,y)\right) + D_z f(x,y,g(x,y))D_{(x,y)}g(x,y) = 0$$

i, com que $D_z f$ és invertible en (x_0, y_0, z_0) i $g(x_0, y_0) = z_0$:

$$D_{(x,y)}g(x_0,y_0) = -D_z f(x_0,y_0,z_0)^{-1} D_{(x,y)}f\left(x_0,y_0,z_0\right)$$

És a dir:

$$\left(\partial_x g, \partial_y g\right)(x_0,y_0) = -\underbrace{\frac{1}{\partial_z f(x_0,y_0,z_0)}}_{D_z f(x_0,y_0,z_0)^{-1}}\left(\partial_x f(x_0,y_0,z_0), \partial_y f(x_0,y_0,z_0)\right)$$

Exemple de càlcul a $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ IV

o, el que és el mateix,

$$\partial_x g(x_0, y_0) = -\frac{1}{\partial_z f(x_0, y_0, z_0)} \partial_x f(x_0, y_0, z_0);$$
$$\partial_y g(x_0, y_0) = -\frac{1}{\partial_z f(x_0, y_0, z_0)} \partial_y f(x_0, y_0, z_0).$$

A aquest resultat també hi podríem haver arribat, en comptes de fer-ho matricialment, escrivint directament l'expressió per a les derivades parcials de respecte x i respecte y a partir de

$$f(x, y, g(x, y)) = 0$$

i avaluant-ho en el punt (x_0, y_0, z_0).

Exemple d'aplicació del T. Funció Implícita I

Exemple

Demostreu que el sistema d'equacions següent

$$\left\{ \begin{array}{rcl} xe^{u+v} + 2uv & = & 1 \\ ye^{u-v} - \frac{u}{1+v} & = & 2x, \end{array} \right.$$

detemina dues funcions $u(x,y)$ i $v(x,y)$ que satisfan $u(1,2) = v(1,2) = 0$. Calculeu $\partial_x u(1,2)$ i $\partial_y v(1,2)$.

- El primer pas és escriure-ho com a una equació del tipus $f(x,y,u,v) = 0$ amb les dimensions adequades.

Exemple d'aplicació del T. Funció Implícita II

- En el nostre cas, donat que el sistema és equivalent a

$$\left\{ \begin{array}{rcl} xe^{u+v} + 2uv - 1 & = & 0 \\ ye^{u-v} - \frac{u}{1+v} - 2x & = & 0, \end{array} \right.$$

sembla convenient definir $f(x, y, u, v) = (f_1, f_2)$ amb

$$f_1(x, y, u, v) = xe^{u+v} + 2uv - 1,$$
$$f_2(x, y, u, v) = ye^{u-v} - \frac{u}{1+v} - 2x$$

- Així, $f : \Omega \subset \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ on $\Omega = \mathbb{R}^4 \setminus \{v \neq -1\}$ és $\mathcal{C}^1(\Omega)$.

Exemple d'aplicació del T. Funció Implícita III

- Ara hem de veure quines són les variables dependents i quines són les independents segons ens demana l'enunciat, i veure que les dimensions "quadren". Ens demanen dues funcions $u(x, y)$ i $v(x, y)$ i, per tant, les variables dependents (la y del teorema) són (u, v) mentre que les independents (la x del teorema) són (x, y). Aleshores $m = 2$ i $n = 2$:

$$\begin{aligned} f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x, y, u, v) &\mapsto f(x, y, u, v) \end{aligned}$$

número de variables dependents = número d'equacions.

Exemple d'aplicació del T. Funció Implícita IV

- Ara hem de comprovar que es compleixen les condicions del Teorema de la funció implícita al punt $p = (1, 2, 0, 0)$ que és el que s'obté de $u(1, 2) = v(1, 2) = 0$.
  - **La funció f és $\mathcal{C}^1$ al voltant del punt:** cert ja que $v \neq -1$.
  - **El punt p compleix que $f(p) = 0$:** Efectivament.
  - **La matriu $D_{(u,v)}f(p)$ és invertible**. Aquesta matriu és

$$\begin{pmatrix} \partial_u f_1 & \partial_v f_1 \\ \partial_u f_2 & \partial_v f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xe^{(u+v)} + 2\,v & xe^{(u+v)} + 2\,u \\ ye^{(u-v)} - \frac{1}{v+1} & -ye^{(u-v)} + \frac{u}{(v+1)^2} \end{pmatrix}$$

i, per tant, en el punt $p = (1, 2, 0, 0)$, és invertible

$$D_{(u,v)}f(p) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Exemple d'aplicació del T. Funció Implícita V

- **Teorema de la Funció Implícita:** Localment existeix una funció implícita $\mathcal{C}^1$ $g : \Omega^* \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de manera que

$$f(x, y, g(x, y)) = 0, \quad g_1(1, 2) = g_2(1, 2) = 0$$

- A vegades, en comptes d'usar g_1 i g_2 s'escriu $u(x, y)$ i $v(x, y)$
- Per trobar $\partial_x g_1(1, 2), \partial_y g_2(1, 2)$ ($D_{(x,y)}g$), usem la regla de la cadena per derivar $f(x, y, g(x, y)) = 0$ resp. (x, y):

$$D_{(x,y)}f(x, y, g(x, y)) + D_{(u,v)}f(x, y, g(x, y))D_{(x,y)}g(x, y) = 0$$

que avaluat en $p = (1, 2, 0, 0)$ esdevé:

$$D_{(x,y)}f(1, 2, 0, 0) + D_{(u,v)}f(1, 2, 0, 0)D_{(x,y)}g(1, 2) = 0$$

Exemple d'aplicació del T. Funció Implícita VI

i, amb el que hem calculat abans

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}}_{D_{(x,y)}f(1,2,0,0)} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}}_{D_{(u,v)}f(1,2,0,0)} D_{(x,y)}g(1,2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

i, aïllant $D_{(x,y)}g(1,2)$ i invertint $D_{(u,v)}f(1,2,0,0)$ obtenim

$$D_{(x,y)}g(1,2) = -\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} \\ -1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

- Així, identificant termes de la matriu $D_{(x,y)}g(1,2)$

$$\partial_x u_1(1,2) = \partial_x g_1(1,2) = 0, \quad \partial_y v(1,2) \partial_y g_2(1,2) = 1/3$$

Exercici 37 - Càlcul- Enunciat

Exercici 37

El següent sistema determina dues funcions $u(x,y)$ i $v(x,y)$ que satisfan $u(1,1) = v(1,1) = 0$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x + yv + e^{yu} + e^{xv} & = & 3 \\ y - xv + e^{xu} + e^{yv} & = & 3, \end{array} \right.$$

Determineu $Dg(1,1)$ i $Dg^{-1}(0,0)$ si $g(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$

Exercici 37 - Càlcul- Indicacions I

Exercici 37

El següent sistema determina dues funcions $u(x,y)$ i $v(x,y)$ que satisfan $u(1,1) = v(1,1) = 0$

$$\begin{cases} x + yv + e^{yu} + e^{xv} & = & 3 \\ y - xv + e^{xu} + e^{yv} & = & 3, \end{cases}$$

Determineu $Dg(1,1)$ i $Dg^{-1}(0,0)$ si $g(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$

- No farem les comprovacions del teorema de la funció implícita.
- El sistema és equivalent a:

$$\begin{cases} x + yv + e^{yu} + e^{xv} - 3 & = & 0 \\ y - xv + e^{xu} + e^{yv} - 3 & = & 0, \end{cases}$$

Exercici 37 - Càlcul- Indicacions II

- El que volem és que (x, y) siguin les variables independents i que (u, v) siguin les variables dependents. Triarem la funció $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida per

$$\begin{cases} x + yv + e^{yu} + e^{xv} - 3 & = & f_1(x, y, u, v) \\ y - xv + e^{xu} + e^{yv} - 3 & = & f_2(x, y, u, v), \end{cases}$$

- Hi ha el mateix nombre de variables dependents que d'equacions.
- El teorema de la funció implícita ens diria que existeix una funció $g : \Omega^* : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida al voltant de $p = (1, 1, 0, 0)$ tal que

$$f(x, y, g(x, y)) = 0, \quad g_1(1, 1) = g_2(1, 1) = 0$$

Exercici 37 - Càlcul- Indicacions III

- Per trobar $Dg(1,1)$ usem la regla de la cadena per derivar $f(x,y,g(x,y)) = 0$ resp. (x,y):

  $$D_{(x,y)}f(x,y,g(x,y)) + D_{(u,v)}f(x,y,g(x,y))D_{(x,y)}g(x,y) = 0$$

  derivant:

  $$\begin{pmatrix} ve^{(vx)}+1 & ue^{(uy)}+v \\ ue^{(ux)}-v & ve^{(vy)}+1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ye^{(uy)} & xe^{(vx)}+y \\ xe^{(ux)} & ye^{(vy)}-x \end{pmatrix} D_{(x,y)}g(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  que avaluat en $p = (1,1,0,0)$ esdevé:

  $$D_{(x,y)}f(1,1,0,0) + D_{(u,v)}f(1,1,0,0)D_{(x,y)}g(1,1) = 0$$

Exercici 37 - Càlcul- Indicacions IV

i, calculant-ho:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} D_{(x,y)}g(1,1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

D'on

$$D_{(x,y)}g(1,1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

- Finalment, fixem-nos que també ens demanen $Dg^{-1}(0,0)$. Com que $g(1,1) = (0,0)$, g és $\mathcal{C}^1$ localment i $D_{(x,y)}g(1,1)$ és no singular, el teorema de la funció inversa ens diu que la inversa existeix localment, és $\mathcal{C}^1$ i, a més,

$$Dg^{-1}(0,0) = Dg(1,1)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercici: Com calcularíem el hessià de g_1?

La derivada direccional I

- Donada una funció

$$\begin{aligned} f:\Omega\subset\mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ x &\to f(x), \end{aligned}$$

i un punt $a\in\Omega$, les parcials $\partial_k f(a)$ ens donen les derivades en a de f quan només varia la coordenada k-èsima, és a dir, en la direcció del vector coordenat corresponent de $\mathbb{R}^n$:

$$e_k^n = (0,\dots \underbrace{,1,}_{\text{posició } k} \dots,0).$$

- I si volem la derivada en una altra direcció?

La derivada direccional II

- Prenem v vector de $\mathbb{R}^n$ normalitzat amb $||v|| = 1$. Definim

$$\begin{aligned}\tilde{f} : \mathcal{B}^1_r(0) \subset \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t &\to \tilde{f}(t) := f(a + tv)\end{aligned}$$

  la funció f restringida a la recta amb direcció v que passa per a.

- Definim la **derivada direccional de f en a segons v** com

$$\partial_v f(a) \equiv D_v f(a) := \tilde{f}'(0).$$

- Aquesta definició és equivalent a:

$$\partial_v f(a) \equiv D_v f(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t}.$$

La fórmula del gradient I

Teorema (La fórmula del gradient)

Per qualsevol funció $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ i $a \in \Omega$,

$$\partial_v f(a) = \langle v, \nabla f(a) \rangle, \quad v \in \mathbb{R}^n.$$

En particular $\partial_{e_j^n} f(a) = \partial_j f(a)$, cosa que ja sabíem.

Derivada direccional màxima

En les hipòtesis anteriors, suposem que a no és un punt crític ($\nabla f(a) \neq 0$). Llavors la derivada direccional màxima en a s'asoleix en la direccio de $\nabla f(a)/||\nabla f(a)||$ i val $||\nabla f(a)||$. És a dir

$$\max_{v \in \mathbb{R}^n, \|v\|=1} \partial_v f(a) = \frac{\nabla f(a)}{||\nabla f(a)||} = \partial_{\nabla f(a)} f(a)$$

Exemple de càlcul

Exercici

Calculeu la derivada direccional màxima de $f(x,y) = x^y$ en $(e,1)$.

- El gradient de la funció f és

$$\nabla f(x,y) = \left(x^{y-1}y,\ x^y \log(x)\right)$$

- En el punt $(e,1)$, aquest és

$$\nabla f(e,1) = (1,\ e)$$

- Per la fórmula del gradient, la derivada màxima és

$$\|\,(1,\ e)\,\| = \sqrt{1+e^2}$$

Exercici 34. Enunciat

Useu la fórmula del gradient per calcular les següents derivades direccionals.

1. $D_u f(1,0)$ si $f(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2}$ i $u = (2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5})$.
2. $D_u f(0,-1)$ si $f(x,y) = \mathrm{e}^x \cos(\pi y)$ i $u = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$.
3. $D_u f(1,0,0)$ si $f(x,y,z) = x^2 \mathrm{e}^{-yz}$ i $u = (1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$.

En tots els casos usarem

$$\partial_v f(a) = \langle v, \nabla f(a) \rangle$$

i, per tant, el primer que farem serà calcular el gradient.

Exercici 34. Indicacions I

Useu la fórmula del gradient per calcular les següents derivades direccionals.

1. $D_u f(1,0)$ si $f(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2}$ i $u = (2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5})$.

$$\nabla f(1,0) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right) = (1,\ 0)$$

$$D_u f(1,0) = \langle (2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5}), (1,\ 0)\rangle = 2/\sqrt{5}$$

2. $D_u f(0,-1)$ si $f(x,y) = \mathrm{e}^x \cos(\pi y)$ i $u = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$.

$$\nabla f(0,-1) = (\cos(\pi y)\, e^x,\ -\pi e^x \sin(\pi y)) = (-1,\ 0)$$

$$D_u f(0,-1) = \langle (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}), (-1,\ 0)\rangle 1/\sqrt{2}$$

Exercici 34. Indicacions II

3. $D_u f(1,0,0)$, $f(x,y,z) = x^2 \mathrm{e}^{-yz}$ i $u = (1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$.

$$\nabla f(1,0,0) = \left(2\,xe^{(-yz)},\ -x^2 ze^{(-yz)},\ -x^2 ye^{(-yz)}\right) = (2,\ 0,\ 0)$$

$$D_u f(1,0,0) = (1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}) \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2/\sqrt{3}$$

Exercici 35 I

El perfil d'una certa muntanya es modela mitjançant la funció

$$h(x, y) = 5000 - 0.01x^2 - 0.02y^2,$$

on si (x, y) és un punt del pla ("imaginari", ja que la terra no és plana) que defineix la base de la muntanya, llavors $z = h(x, y)$ ens dóna la corresponent alçada.

1. Un muntanyenc es troba en el punt $(x, y) = (10, 10)$, a punt de fer el cim. En quina direcció s'ha de moure per pujar més ràpidament? Quin és el pendent?
   Resposta: Si es troba en el punt de coordenades $(10, 10)$, la direcció "per pujar més ràpidament" és la direcció de la derivada màxima de la funció altura. Per calcular-ho:

$$\nabla f(x, y) = (-0.02x, -0.04y) \rightarrow \nabla f(10, 10) = (-0.2, -0.4)$$

Exercici 35 II

i per tant la direcció de la derivada màxima serà

$$v = \frac{\nabla f(10,10)}{\|\nabla f(10,10)\|} = \frac{1}{1/\sqrt{5}}\left(\frac{-1}{5}, \frac{-2}{5}\right) = -\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

El pendent és precisament el valor de la derivada direccional, $\nabla f(10,10) = 1/\sqrt{5}$.

2. Si enlloc de triar la direcció de màxima pendent opta per triar-ne una amb pendent del 40%, quina direcció ha de seguir?
   - Per determinar la o les direccions que donin lloc a aquest pendent (veure gràfica de la funció), escrivim

$$\partial_v f(10,10) = \langle v, \nabla f(10,10)\rangle = \langle v, (-0.2, -0.4)\rangle =$$
$$-0.2v_1 - 0.4v_2 = 0.4 \text{ (pendent del 40\%)}$$

Exercici 35 III

- L'equació per a la direcció serà:

$$v_1 + 2v_2 = -2, \quad \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = 1,$$

ja que el vector ha de tenir mòdul 1. Podem escriure $v_1 = \sin\theta$ i $v_2 = \cos\theta$ i només ens quedarà l'equació de l'esquerra en termes de θ:

$$\sin\theta + 2\cos\theta = -2$$

3. Una solució és clarament $\theta = \pi$, que correspon a la direcció $(0, -1)$ i l'altra és

$$\sin\theta + 2\sqrt{1 - \sin^2\theta} = -2$$

d'on $\sin\theta = -4/5$ i el vector és $(-4/5, -3/5)$.

Formula de Taylor a $\mathbb{R}^2$ I

Abans de generalitzar la formula de Taylor per a funions generals de $\mathbb{R}^k$ anem a veure les aproximacions d'ordres creixents al voltant d'un punt (aka. Taylor) per al cas d'una funció $\mathcal{C}^k(\Omega)$:

$$\begin{aligned} f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto f(x, y) \end{aligned}$$

definida en un obert Ω de manera que $a, a + h \in \Omega$. Aquí $h = (h_1, h_2)$ i $a = (a_1, a_2)$:

- Aproximació lineal, si $h = (h_1, h_2)$ és una petita pertorbació:

$$f(a + h) \cong f(a) + \underbrace{\langle \nabla f(a), h \rangle}_{D_h f(a)} = f(a) + h_1 \partial_x f(a) + h_2 \partial_y f(a)$$

Formula de Taylor a $\mathbb{R}^2$ II

- Aproximació quadràtica:

$$
\begin{aligned}
f(a+h) \cong\ & f(a) + h_1\partial_x f(a) + h_2\partial_y f(a) + \\
& \frac{1}{2}(h_1, h_2)\begin{pmatrix} \partial^2_{xx} f(a) & \partial^2_{xy} f(a) \\ \partial^2_{yx} f(a) & \partial^2_{yy} f(a) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \\
& f(a) + h_1\partial_x f(a) + h_2\partial_y f(a) + \\
& \frac{1}{2}(\underbrace{\partial^2_{xx}}_{\partial^2_{x^2}} f(a)h_1^2 + 2\partial^2_{xy} f(a)h_1 h_2 + \underbrace{\partial^2_{yy}}_{\partial^2_{y^2}} f(a)h_2^2)
\end{aligned}
$$

Formula de Taylor a $\mathbb{R}^2$ III

- Aproximació cúbica:

$$
\begin{aligned}
f(a+h) \cong\ & f(a) + h_1\partial_x f(a) + h_2\partial_y f(a) + \\
& \frac{1}{2}(\partial^2_{x^2} f(a)h_1^2 + 2\partial^2_{xy} f(a)h_1h_2 + \partial^2_{y^2} f(a)h_2^2) + \\
& \frac{1}{3!}(\partial_{x^3} f(a)h_1^3h_2^0 + \\
& \underbrace{\mathbf{3}\partial_{x^2y^1} f(a)h_1^2h_2^1}_{\partial_{xxy},\partial_{xyx},\partial_{yxx}} + \underbrace{\mathbf{3}\partial_{x^1y^2} f(a)h_1^1h_2^2}_{\partial_{yyx},\partial_{yxy},\partial_{xyy}} + \partial_{y^3} f(a)h_1^0h_2^3)
\end{aligned}
$$

Formula de Taylor a $\mathbb{R}^2$ IV

També ho podem agrupar de la següent forma:

$$f(a+h) \cong f(a) + \underbrace{\frac{1}{1!} h_1 \partial_x f(a) + \frac{1}{1!} h_2 \partial_y f(a)}_{\text{ordre 1}} + \underbrace{\frac{1}{2!}\partial^2_{x^2} f(a) h_1^2 + \frac{1}{1!1!}\partial^2_{xy} f(a) h_1 h_2 + \frac{1}{2!}\partial^2_{y^2} f(a) h_2^2}_{\text{ordre 2}} + \underbrace{\frac{1}{3!}\partial_{x^3} f(a) h_1^3 h_2^0 + \frac{1}{2!1!}\partial_{x^2y^1} f(a) h_1^2 h_2^1 + \frac{1}{1!2!}\partial_{x^1y^2} f(a) h_1^1 h_2^2 +}_{\text{ordre 3}} \overbrace{\frac{1}{3!}\partial_{y^3} f(a) h_1^0 h_2^3} =$$

Formula de Taylor a $\mathbb{R}^2$ V

- Aproximació d'ordre k

$$f(a + h) \cong f(a)\sum_{j=0}^{k}\sum_{l=0}^{j}\frac{1}{l!(j-l)!}\partial^j_{x^l y^{j-l}} f(a) h_1^l h_2^{j-l}.$$

- El desenvolupament de Taylor d'una funció de dues variables al voltant del zero ($a = (0,0)$ i $h = (x,y)$) és

$$f(x,y) \cong f(0) + \sum_{j=0}^{k}\sum_{l=0}^{j}\underbrace{\frac{1}{l!(j-l)!}\partial^j_{x^l y^{j-l}} f(0)}_{\text{coeficient de } x^l y^{j-l}} x^l y^{j-l}.$$

Formula de Taylor a $\mathbb{R}^2$ VI

- Per tant, en el desenvolupament de Taylor d'una funció de dues variables al voltant del zero en termes de x i de y el terme que acompanya a $x^l y^{l-j}$ és sempre

$$\frac{1}{l!(j-l)!}\partial^j_{x^l y^{j-l}} f(0)$$

- Alternativament, si coneixem el desenvolupament de Taylor i el coeficient d'un cert monomi $x^l y^k$ és C aleshores

$$Cx^l y^k = \frac{1}{l!(j-l)!}\partial^j_{x^l y^{j-l}} f(0) \Rightarrow \partial^{l+k}_{x^l y^k} f(0) = Cl! \cdot k!$$

cosa que, com a $\mathbb{R}$, ens permet conèixer les derivades en termes del desenvolupament de Taylor.

Exercici I

Sigui $f(x, y) = e^{xy^3}$. Quan val $\partial^{12}_{x^3 y^9} f(0,0)$?

Com que la funció exponencial té polinomi de Taylor

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{k!}x^k + \ldots$$

el desenvolupament de Taylor de f serà

$$\begin{aligned} e^{xy^3} &= 1 + xy^3 + \frac{1}{2}(xy^3)^2 + \frac{1}{3!}(xy^3)^3 + \cdots + \frac{1}{k!}(xy^3)^k + \ldots \\ &= 1 + xy^3 + \frac{1}{2}x^2y^6 + \frac{1}{3!}x^3y^9 + \cdots + \frac{1}{k!}x^k y^{3k} + \ldots \end{aligned}$$

Per tant,

$$\partial^{12}_{x^3 y^9} f(0) = \frac{1}{3!}3!9! = 9!$$

Cas de R^3 I

Si $f \in \mathcal{C}^k(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$:

$$
\begin{aligned}
f(x,y,z) \cong f(0,0,0) + & \\
& \underbrace{\frac{1}{1!}x\partial_x f(0) + \frac{1}{1!}y\partial_y f(0) + \frac{1}{1!}z\partial_z f(0)}_{\text{ordre 1}} + \\
& \underbrace{\frac{1}{2!}\partial^2_{x^2} f(0)x^2 + \frac{1}{1!1!}\partial^2_{xy} f(0)xy + \frac{1}{2!}\partial^2_{y^2} f(0)y^2}_{\text{ordre 2}} + \\
& + \underbrace{\frac{1}{1!1!}\partial^2_{xz} f(0)xz + \frac{1}{1!1!}\partial^2_{yz} f(0)yz + \frac{1}{2!}\partial^2_{z^2} f(0)z^2 +}_{\text{ordre 2}} \dots
\end{aligned}
$$

Cas de R^3 II

Així, el desenvolupament general d'ordre k serà:

$$f(x,y,z) \cong f(0,0,0) + \sum_{j=0}^{k} \sum_{\alpha+\beta+\gamma=j} \frac{1}{\alpha!\beta!\gamma!} \partial^{j}_{x^\alpha y^\beta z^\gamma} f(0) x^\alpha y^\beta z^\gamma.$$

on, recordem el conveni que $0! = 1$.

Fórmula de Taylor a $\mathbb{R}^n$ I

Anem a generalitzar la fórmula de Taylor a funcions de n variables. Considerem una funció

$$\begin{aligned} f : \Omega \subset \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

de tal manera que els punts a i $a+h$ pertanyin a l'obert Ω i que $f \in \mathcal{C}^k(\Omega)$. Aleshores els polinomis successius de Taylor ens donen una sèrie d'aproximacions de la funció, cada cop de grau més gran:

- Aproximació lineal:

$$f(a+h) \cong f(a) + \langle h, \nabla f(a) \rangle.$$

Fórmula de Taylor a $\mathbb{R}^n$ II

- Aproximació quadràtica:

$$f(a+h) \cong f(a) + \langle h, \nabla f(a)\rangle + \frac{1}{2}\langle hHf(a), h\rangle$$

on la matriu $Hf(a) := J\nabla f(a)$ és una matriu simètrica $n \times n$ anomenada *hessiana* (observeu que traça $Hf(a) = \Delta f(a)$).

- Aproximació d'ordre k

$$f(a+h) \cong \sum_{j=0}^{k} \frac{\langle h, \nabla\rangle^j}{j!} f(a).$$

on usem l'expressió

$$\langle h, \nabla\rangle$$

Fórmula de Taylor a $\mathbb{R}^n$ III

per denotar l'operador

$$\sum_{j=1}^{n} h_j \partial_j,$$

i

$$\langle h, \nabla \rangle^j f = \langle h, \nabla \rangle (\langle h, \nabla \rangle^{j-1} f).$$

Així doncs, passar de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}^n$ és senzillament substituir $\frac{d}{dx_1}$ per $\langle h, \nabla \rangle$.

Cas de funcions $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

- En el cas de funcions no escalars, $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ amb $a, a+h \in \Omega$ obert, el desenvolupament de Taylor de f fins a ordre k l'obtenim fent el desenvolupament de Taylor fins a ordre k de cadascuna de les funcions components $(f_1, \dots, f_m)$ i posant-la en el vector de longitud m.
- De forma més compacta, l'aproximació lineal es pot expressar com

$$f(a+h) \cong f(a) + h(Jf(a))^T, \; h = (h_1, \dots, h_m)$$

- Com a cas particular, si $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ compleix que $f(a) = b$ i $Df(a)$ és invertible, aleshores podem usar el desenvolupament de Taylor de f i el teorema de la funció inversa per trobar el desenvolupament lineal de $f^{-1}(x)$ en b:

$$f^{-1}(b+h) \cong a + h((Jf(a))^{-1})^T, \; h = (h_1, \dots, h_n)$$

Residu de Taylor

Donats $a, a+h \in \Omega$ obert, $f \in \mathcal{C}^{k+1}(\Omega)$

$$\begin{aligned} f : \Omega \subset \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ x &\to f(x) \end{aligned}$$

definim **el residu d'ordre k en un entorn del punt** a, com la funció de h que dóna la diferència entre la $f(a+h)$ i el polinomi de Taylor en a fins a ordre k en h:

$$R_k(h) = f(a+h) - \underbrace{\sum_{j=0}^{k} \frac{\langle h, \nabla \rangle^j}{j!} f(a)}_{\text{Taylor ordre } k}.$$

Aleshores, com en funcions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, es compleix que

$$\lim_{h \to 0} \frac{|R_k(h)|}{||h||^k} = 0.$$

Aplicació al càlcul de límits I

Exercici 45

Calculeu, si existeix, el següent límit.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\mathrm{e}^x \sin(x+y) - x - y - x^2 - xy}{x^2+y^2}.$$

(Indicació: Calculeu el desenvolupament de Taylor del numerador fins ordre 2 i useu les propietats del residu de Taylor $R_2(x,y)$.)

Com que tenim els següents desenvolupaments de Taylor coneguts

$$e^x \cong 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots,$$

$$\sin(x+y) \cong (x+y) - \frac{1}{3!}(x+y)^3 + \frac{1}{5!}(x+y)^5 + \dots$$

Aplicació al càlcul de límits II

la part quadràtica de Taylor de f és

$$T_2[f](x,y) = (x+y) + x(x+y) = x + y + x^2 + y^2$$

i, per tant, el numerador del límit és

$$\begin{aligned} &\mathrm{e}^x \sin(x+y) - x - y - x^2 - xy = \\ &\qquad x + y + x^2 + y^2 + R_2[f](x,y) - x - y - x^2 - xy = \\ &\qquad\qquad R_2[f](x,y) \end{aligned}$$

Així, el límit val zero pel teorema del residu de Taylor:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\mathrm{e}^x \sin(x+y) - x - y - x^2 - xy}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{R_2[f](x,y)}{\|(x,y)\|^2} = 0$$

Exercici 42. Enunciat

La resistència total R corresponent a dues resistències R_1 i R_2 conectades en paral·lel verifica

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

Usant l'aproximació lineal, estimeu la variació del valor de R si incrementem el valor de R_1 de 10 ohms a 10.5 ohms i decreixem el valor de R_2 de 15 ohms a 13 ohms.

Exercici 42. Indicacions

La funció que ens dóna la resistència equivalent és

$$R(R_1, R_2) = \frac{1}{\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

La seva aproximació quadràtica en $R_0 = 10\Omega$, $R_1 = 15\Omega$ és

$$R(R_1, R_2) = R(10, 15) + \underbrace{\partial_1 R(10, 15)}_{9/25}(R_1 - 10) + \underbrace{\partial_2 R(10, 15)}_{4/25}(R_2 - 15)$$

Així doncs, la variació en el valor de R serà

$$R(10.5, 13) - R(10, 15) \cong \partial_1 R(10, 15) \cdot 0.5 + \partial_2 R(10, 15) \cdot (-2) = -7/50.$$

Exercici 47

Exercici 47

Calculeu totes les derivades parcials fins ordre 2 de les següents funcions i doneu el seu desenvolupament de Taylor fins a termes de grau 2 inclosos entorn del punt que s'indica en cada cas.

1. Taylor de $f(x,y) = \sin(xy)$ entorn del punt $(1, \pi/2)$.
2. Taylor de $f(x,y) = x^y$ entorn del punt $(1,1)$.
3. Taylor de $f(x,y) = \mathrm{e}^{x/y}$ entorn del punt $(0,1)$.
4. Taylor de $f(x,y,z) = \mathrm{e}^{-x}\sin(yz)$ entorn del punt $(0,1,\pi)$.

Exercici 47. Indicacions I

1. Taylor de $f(x,y) = \sin(xy)$ entorn del punt $(1, \pi/2)$. Aquí hem de calcular les derivades parcials, ja que el desenvolupament el volem al voltant del zero. Com que

$$\partial_x f(x,y) = y\cos(xy)\,,\ \partial_y f(x,y) = x\cos(xy)$$

no tenim termes lineals. El desenvolupament de Taylor al voltant de $(1, \pi/2)$ fins a termes quadràtics és

$$f(x,y) \cong 1 + \frac{1}{2!}\frac{1}{4}\pi^2(x-1)^2 - \frac{1}{2}\pi(x-1)(y-\pi/2)\frac{1}{2!}(-1)(y-2)^2$$

Exercici 47. Indicacions II

2. Taylor de $f(x,y) = x^y$ entorn del punt $(1,1)$. En primer lloc, recordem que

$$x^y = \exp(y \log x)$$

Com que $f(1,1) = 1$, $\partial_x f(x,y) = x^{y-1}y$ i $\partial_y f(x,y) = x^y \log(x)$, i, a més les derivades segones són

$$\begin{aligned}
\partial f^2_{x^2}(x,y) =& x^{y-2}(y-1)y \\
\partial f^2_{xy}(x,y) =& x^{y-1}y\log(x) + x^{y-1} \\
\partial f^2_{y^2}(x,y) =& x^y \log(x)^2
\end{aligned}$$

de manera que, avaluades en $(1,1)$ són

$$\partial f^2_{x^2}(1,1) = 0, \partial f^2_{xy}(1,1) = 1, \partial f^2_{y^2}(1,1) = 0$$

$$f(x,y) \cong 1 - y - xy$$

Exercici 47. Indicacions III

3. Taylor de $f(x,y) = \mathrm{e}^{x/y}$ entorn del punt $(0,1)$. Com que

$$\partial_x f(x,y) = \frac{e^{\frac{x}{y}}}{y}, \quad \partial_y f(x,y) = -\frac{xe^{\frac{x}{y}}}{y^2}$$

en el punt $(1,0)$ tenim que

$$\partial_x f(x,y) = 1, \quad \partial_y f(x,y) = 0$$

Exercici 47. Indicacions IV

Si calculem les derivades segones

$$\partial f^2_{x^2}(x,y) = \frac{e^{\frac{x}{y}}}{y^2}$$

$$\partial f^2_{xy}(x,y) = -\frac{xe^{\frac{x}{y}}}{y^3} - \frac{e^{\frac{x}{y}}}{y^2}$$

$$\partial f^2_{y^2}(x,y) = \frac{x^2e^{\frac{x}{y}}}{y^4} + \frac{2\,xe^{\frac{x}{y}}}{y^3}$$

i les derivades en $(0,1)$ i el pol. quadràtic de Taylor és

$$\partial f^2_{x^2}(0,1) = 1, \quad \partial f^2_{xy}(0,1) = -1, \quad \partial f^2_{y^2}(0,1) = 0$$

$$f(x,y) \cong 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - x(y-1)$$

Exercici 47. Indicacions V

4. Taylor de $f(x, y, z) = \mathrm{e}^{-x} \sin(yz)$ entorn del punt $(0, 1, \pi)$. Observem que, com que $\sin(1 \cdot \pi) = 0$, i

$$e^{-x} \cong 1 - x + O(x^2)$$

n'hi ha prou amb calcular el desenvolupament de Taylor de $\sin(yz)$ fins a ordre 2 i multiplicar-lo per $(1 - x)$ (del desenvolupament de Taylor de e^{-x}).

$$\sin yz \cong -(z - \pi) - \pi(y - 1) - (z - \pi)(y - 1)$$

Multiplicant-lo per $(1 - x)$ ens queda:

$$-(z-\pi)-\pi(y-1)-(z-\pi)(y-1)+x(z-\pi)+x\pi(y-1)+ x(z-\pi)(y-1)$$

Exercici 47. Indicacions VI

i prenent només els termes d'ordre 2 trobarem el desenvolupament de Taylor d'ordre 2 de f:

$$f(x,y) \cong -(z-\pi) - \pi(y-1) - (z-\pi)(y-1) + x(z-\pi) + \pi x(y-1).$$

Exercici 48. Enunciat

Exercici 48

Mitjançant l'ús de desenvolupaments de Taylor de funcions d'una variable (coneguts a priori), calculeu els desenvolupaments de Taylor en l'origen fins a termes de grau dos inclosos de les següents funcions.

1. $f(x, y) = \mathrm{e}^{xy} \ln(1 + x + y)$.
2. $f(x, y) = \mathrm{e}^{x} \cos y$.
3. $f(x, y) = \dfrac{1}{1 + x + y}$.
4. $f(x, y, z) = \mathrm{e}^{x+y} \sqrt{1 + x} \cos(x + y + z)$.

Exercici 48. Indicacions I

1. $f(x,y) = \mathrm{e}^{xy}\ln(1+x+y)$.

$$e^{xy} \cong 1 + xy, \quad \ln(1+x+y) \sim x + y - (x+y)^2/2.$$

$$f(x,y) \cong \ln(1+x+y) \sim x + y - (x+y)^2/2.$$

2. $f(x,y) = \mathrm{e}^{x}\cos y$.

$$e^{x} \cong 1 + x + \frac{1}{2}x^2, \quad \cos(y) \cong 1 - \frac{1}{2}y^2$$

$$f(x,y) \cong 1 + x + (x^2 - y^2)/2.$$

Exercici 48. Indicacions II

3. $f(x, y) = \dfrac{1}{1 + x + y}$.

$$\frac{1}{1-r} = 1 + r + r^2 + r^3 + \dots, \quad r = -(x+y)$$

$$f(x, y) \cong 1 - (x+y) + (x+y)^2.$$

Exercici 48. Indicacions III

4. $f(x,y,z) = \mathrm{e}^{x+y}\sqrt{1+x}\cos(x+y+z)$.

$$\begin{aligned}
e^{x+y} \cong& 1 + (x+y) + \frac{1}{2}(x+y)^2, \\
\sqrt{1+x} \cong& 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 \\
\cos(x+y+z) \cong& 1 - \frac{1}{2}(x+y+z)^2 = \\
& 1 - \frac{1}{2}(x+y)^2 + (x+y)z + \frac{1}{2}z^2
\end{aligned}$$

$$f(x,y,z) \cong 1 + \frac{3}{2}x + y - \frac{3}{8}x^2 + \frac{1}{2}yx - zx - zy - \frac{1}{2}z^2.$$

Exercici 49. Enunciat

Exercici 49

Calculeu el desenvolupament de Taylor en l'origen de les següents funcions fins l'ordre que s'indica en cada cas i doneu el valor de totes les derivades parcials de la funció en el $(0,0)$ corresponents a l'ordre màxim fins al qual s'ha desenvolupat (p. ex., si desenvolupem fins a ordre 5 volem $\dfrac{\partial^5 f}{\partial x^n y^m}(0,0)$ amb $n+m=5$.)

1. $f(x,y) = \ln(1+x^2-y)$ fins ordre 3.
2. $f(x,y) = \cos(xy)$ fins ordre 8.
3. $f(x,y) = \mathrm{e}^{x^2-y^2}$ fins ordre 8.

Exercici 49. Indicacions I

1. $f(x,y) = \ln(1+x^2-y)$ fins ordre 3.

$$\log(1+t) \cong t - t^2/2 + t^3/3$$

$$f(x,y) \cong y - x^2 + \frac{1}{2}y^2 - yx^2 + \frac{1}{3}y^3$$

$$\partial^3_{y^3} f(0,0) = 2, \quad \partial^3_{yx^2} f(0,0) = -2.$$

2. $f(x,y) = \cos(xy)$ fins ordre 8.

$$f(x,y) \cong 1 - \frac{1}{2}(yx)^2 + \frac{1}{24}(yx)^4$$

$$\partial^4_{y^4x^4} f(0,0) = 24.$$

Exercici 49. Indicacions II

3. $f(x,y) = \mathrm{e}^{x^2-y^2}$ fins ordre 8.

$$f(x,y) \cong 1+(x^2-y^2)+\frac{1}{2}(x^2-y^2)^2+\frac{1}{6}(x^2-y^2)^3+\frac{1}{24}(x^2-y^2)^4$$

$$\partial^8_{x^8} f(0,0) = \partial^8_{y^8} f(0,0) = 8!/4!,$$

$$\partial^8_{y^2x^6} f(0,0) = \partial^8_{y^6x^2} f(0,0) = -5!2$$

$$\partial^8_{y^4x^4} f(0,0) = 4!6$$

Exercici 46

Exercici 46

Determineu el valor de $\lambda \in \mathbb{R}$ per tal que:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\arctan(x^2+y) - x^2 - y - \lambda y^3}{(x^2+y^2)^{3/2}} = 0.$$

$$\arctan t \cong t + \frac{1}{2}\frac{t^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{t^3}{5} + \dots$$

$$\arctan(x^2+y) \sim x^2 + y - \frac{1}{3}y^3 \Longrightarrow \lambda = -1/3.$$

Extrems de funcions de diverses variables

Definició (Extrems)

Sigui

$$\begin{aligned} f : \Omega \subset \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

$a \in \Omega$ obert i $f \in \mathcal{C}^2(\Omega)$

- Si hi ha un $\epsilon > 0$ de manera que si $x \in \mathcal{B}_\epsilon^n(a) \setminus \{0\}$ es compleix que $f(a) \geq f(x)$, llavors a és un màxim relatiu de f.
- Si hi ha un $\epsilon > 0$ de manera que si $x \in \mathcal{B}_\epsilon^n(a) \setminus \{0\}$ es compleix que $f(a) \leq f(x)$, llavors a és un mínim relatiu de f.

Relació amb punts crítics

Proposició

Sigui $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funció de classe $\mathcal{C}^2(\Omega)$ en un obert Ω. Si $a \in \Omega$ és un extrem relatiu, aleshores a és un punt crític, és a dir, el gradient s'anul·la, $\nabla f(a) = 0$.

Demostració: És una senzilla aplicació de Taylor. Fem-ho amb dues variables (x, y), en el cas d'un màxim i suposem que alguna de les parcials $\partial_x f(a)$ o bé $\partial_y f(a)$ fossin no nul·les. Per exemple, suposem que $\partial_x f(a) > 0$. El desenvolupament de Taylor de f en a és

$$f(a+h) = f(a) + h_1 \partial_x f(a) + h_2 \partial_x f(a) + R_1(h)$$

com que $\partial_x f(a) > 0$, si $h = (h_1, 0)$ amb h_1 prou petit $f(a+h)$ és més gran que $f(a)$ i, per tant, a no és màxim relatiu.

Criteri de la derivada segona I

- Recordem que quan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, es podia decidir quan un punt crític era màxim en termes de la derivada segona (negativa) o mínim (positiva).
- A $\mathbb{R}^n$, el conjunt de derivades segones formen una matriu simètrica, la Hessiana.
- Cal establir quan és positiva o negativa.

Criteri de la derivada segona II

Definició (Matrius definides positives o negatives)

Sigui A matriu simètrica $n \times n$, direm que és:

- *Definida positiva* si tots els seus vap's són estrictament positius $\iff \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \quad xAx^T > 0$.
- *Definida negativa* si tots els seus vap's són estrictament negatius $\iff \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \quad xAx^T < 0$.
- *No definida* si no és ni definida positiva ni definida negativa.

Criteri de Silvester-Jacobi: si A és una matriu simètrica $n \times n$:

- A definida positiva si, i només si, tots els seus menors principals són estrictament positius.

Criteri de la derivada segona III

- A definida negativa si, i només si, tots els seus menors principals no són zero i van alternant el signe començant per -1.

Criteri de la derivada segona

Suposem $f \in \mathcal{C}^2(\Omega)$, $a \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$:

- a punt crític i $Hf(a)$ definida positiva $\Longrightarrow$ a mínim relatiu.
- a punt crític i $Hf(a)$ definida negativa $\Longrightarrow$ a màxim relatiu.

- Com a $\mathbb{R}$, no tots el punts crítics són extrems relatius. Així el punt $(0,0)$ és punt crític de $f(x_1,x_2) = x_1^2 - x_2^2$ però no és ni màxim ni mínim.
- Un punt crític a en què $\det Hf(a) \neq 0$ i $Hf(a)$ és no definida, direm que és un *punt de sella* (mireu la seva gràfica).

Exercici

Exercici

Sigui $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : x \to f(x) = e^{-(1-||x||^2)^2}$. Demostreu que té un mínim relatiu en 0 i que la hipersuperfície de nivell $||x|| = 1$ està formada per tots els màxims relatius de f.

1. FIxem-nos que les corbes de nivell són les hiperesferes $\|x\| = c$.
2. $f(x) = h(\|x\|)$ on $h(t) = e^{-(1-t^2)^2}$ té mínim relatiu en $t = 0$ i màxim relatiu en $t = 1$.
3. L'enunciat se segueix dels dos punts anteriors.

Extrems absoluts

Teorema

Extrems absoluts en compactes Tota funció $f : K \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, contínua en un compacte K (tancat i acotat) pren el seu màxim i mínim absoluts. en K.

- Per trobar-los, es busquen tots els màxims i mínims relatius.
- Posteriorment, es busquen els màxims i mínims a la frontera del conjunt d'interès.
- Es compara el valor de f en els extrems relatius i es trien els que dónen els màxim i el mínim.

Exemple

Considerem la funció $f(x, y) = x^2 - y^2$ restringida a $\bar{\mathcal{B}}_1^1(0, 0)$.

- L'ùnic punt crític és l'origen de coordenades on f val zero.
- Anem ara a mirar què passa a la frontera

$$\{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}.$$

- Si restringim f a aquest punts tenim $\bar{f}(x) = 2x^2 - 1$ per $x \in [-1, 1]$.
- L'unic punt crític a l'interior d'aquest intèrval és $x = 0$, on f val -1.
- Finalment ens falta restringir $\bar{f}$ a la frontera de $[-1, 1]$, i.e., calcular $\bar{f}(\pm 1) = 1$.
- Conclusió: f pren el seu màxim en $(\pm 1, 0)$ i el seu mínim a $(0, \pm 1)$.

Exercici 52

Per a la funció $f(x,y) = x^2y + y^2x$ vegeu que $(0,0)$ és un candidat a extrem relatiu però que el mètode del hessià no permet caracteritzar-lo. A quina conclusió arribem si restringim els valors de (x,y) als de la recta $y = x$?

- $(0,0)$ és un candidat a extrem relatiu perquè
$$\nabla f(0,0) = (0,0)$$
- D'altra banda el hessià no és definit, ja que
$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
i no podem concloure res de les derivades segones.
- $(0,0)$ no és extrem de $f(x,y)$ perquè $f(x,x) = 2x^3$ i $(0,0)$ n'és un punt d'inflexió (no es ni màxim ni mínim) .

Exercici 53. Enunciat

Considereu la funció $f(x,y) = (y - x^2)(y - 3x^2)$.

1. Si restringim els valors de (x,y) als d'una recta passant pel $(0,0)$, vegeu que l'origen és un mínim relatiu de la funció amb independència de la recta triada.
2. Discutiu si el resultat de l'apartat (a) us permet concloure que $f(x,y)$, com a funció de dues variables, té un mínim relatiu en el $(0,0)$.
3. Estudieu si l'origen és o no un mínim relatiu si restringim els valors de (x,y) als d'una paràbola de la forma $y = ax^2$ i refineu la discussió de l'apartat (2).

Exercici 53. Indicacions

1. Si prenem una recta del tipus $(x, \lambda x)$, aleshores
$$F(x, \lambda x) = x^2(\lambda - x)(\lambda - 3x) \sim (\text{per} \quad x \cong 0) \sim \lambda^2 x^2$$
i, per tant, $(0,0)$ és un mínim relatiu sobre qualsevol recta que passi per l'origen.
2. Si intentem usar el criteri de les derivades segones, calculem el hessià
$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$
que no és definit (vaps 0 i 2).
3. Els valors de la funció sobre una paràbola de la forma $y = ax^2$ són
$$f(x, ax) = x^4(a-1)(a-3),$$
i per tant, quan $1 < a < 3$ $(0,0)$ és un màxim relatiu i $(0,0)$ no és extrem de $f(x,y)$.

Exercici 56. Enunciat

Una generalització de la funció de Cobb-Douglas al cas de tres variables és la següent:

$$U(x, y, z) = xy^2z^3, \qquad x, y, z \geq 0,$$

on x, y, z verifiquen el lligam $3x + 2y + z = 1$ (i. e., els costos unitaris de x, y i z són de 3,2 i 1, respectivament i la suma de l'inversió total que fem és l'unitat).

1. Useu el lligam entre (x, y, z) per expressar $U(x, y, z)$ en termes d'una nova funció $u(x, y)$.
2. Dibuixeu el domini per a les variables (x, y) de $u(x, y)$. Quant val la funció $u(x, y)$ en la frontera d'aquest domini?
3. Busqueu el màxim absolut de la funcio $u(x, y)$ en el domini de l'apartat (b).

Exercici 56. Indicacions I

1. Usem el lligam per aïllar la z en funció de la x i la y:

$$3x + 2y + z = 1 \Leftrightarrow z = 1 - 3x - 2y$$

d'on la nova funció, en termes de x i $y$només, és

$$u(x, y) = xy^2(1 - 3x - 2y)^3.$$

2. El domini on està definida la nova funció $u = u(x, y)$ seran els valors a on $x \geq 0$, $y \geq 0$ i, a més, $z = 1 - 3x - 2y \geq 0$. Així

$$K = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 0, y \geq 0, 3x + 2y \leq 1\right\}$$

que és l'interior del triangle de $\mathbb{R}^2$ determinat pels eixos coordenats i la recta $3x + 2y = 1$. El valor de la funció en els

Exercici 56. Indicacions II

eixos coordenats val zero. A la hipotenusa del triangle també val zero:

$$u(x,y) = xy^2(1-3x-2y)^3 = 0$$

3. En primer lloc busquem els punts crítics a l'interior de K:

$$\partial_x u(x,y) = -(3\,x+2\,y-1)^3 y^2 - 9\,(3\,x+2\,y-1)^2 xy^2,$$
$$\partial_y u(x,y) = -2\,(3\,x+2\,y-1)^3 xy - 6\,(3\,x+2\,y-1)^2 xy^2$$

o, el que és el mateix:

$$\partial_x u(x,y) = -\,(12x+2y-1)(3x+2y-1)^2 y^2,$$
$$\partial_y u(x,y) = -\,2(3x+5y-1)(3x+2y-1)^2 xy$$

Exercici 56. Indicacions III

Fora de la la frontera de K (és a dir, si $x \neq 0$, $y \neq 0$ i $3x + 2y - 1 \neq 0$, els punts crítics vindran donats pel sistema d'equacions

$$\begin{aligned} 0 =& -12x - 2y + 1, \\ 0 =& 3x + 5y - 1 \end{aligned}$$

que té com a única solució $x = 1/18$ i $y = 1/6$ que es troba a l'interior de K. Calculem el Hessià per veure si és màxim o mínim:

$$Hess(f)(1/18, 1/6) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{12} & -\frac{1}{72} \\ -\frac{1}{72} & -\frac{5}{216} \end{pmatrix}$$

que és definida negativa (vaps negatius o menors -1 i $1/576$) i es tracta d'un màxim. El

Parcial i Prova a Classe

- La normativa del parcial es pot trobar a ATENEA.
- La prova a classe (aka 'avaluació continuada') serà el dimarts 8 d'octubre de 17h a 18h.
- La prova consistirà en un o dos problemes similars als fets a classe.
- El temari és el mateix que per al parcial.
- No es pot dur formulari ni calculadora.