

Càlcul II (240022)



2. Integració de Funcions de dues o més variables

ETSEIB. UPC-BarcelonaTech

Curs 2018-19

Referències

El material que presentem en aquestes notes es pot trobar a [MT04] i a [Pas02]:

-  Jerrold E. Marsden and Anthony J. Tromba, *Càlculo Vectorial*, 5 ed., Pearson Education S.A., Madrid, 2004, Capítols 5 i 6.
-  Pere Pascual (ed.), *Càlcul Integral per a Enginyers*, Edicions UPC, 2002, Capítols 1, 2, i 3.

Integrals dobles

Sigui $f : R = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, f \geq 0$, amb $a < b$ i $c < d$. La integral doble:

$$\iint_R f(x, y) \, dx dy, \quad (1)$$

dóna el volum en \mathbb{R}^3 tancat per la gràfica de la funció $z = f(x, y)$ i el pla xy (veure figura 1)

Remarca 1

Si $f(x, y)$ pren valors negatius, llavors es defineix:

$$f^+ = \max(f, 0) \geq 0, \quad f^- = \max(-f, 0) \geq 0,$$

i la integral doble (1) s'escriu com la diferència:

$$\iint_R f(x, y) \, dx dy = \iint_R f^+(x, y) \, dx dy - \iint_R f^-(x, y) \, dx dy.$$

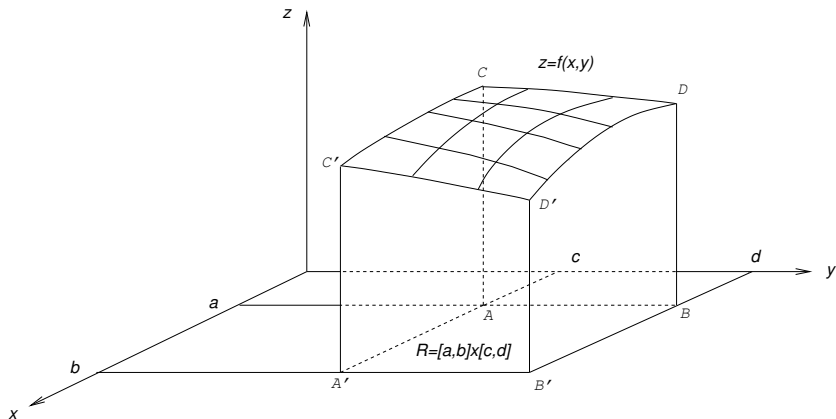


Figura 1 : La integral doble $\iint_R f(x, y) \, dx \, dy$ dóna el volum de la regió de \mathbb{R}^3 limitada per la gràfica de la funció $z = f(x, y)$, el pla xy i els plans $x = a$, $x = b$, $y = c$ i $y = d$.

Remarca 2

Sigui $A \subset \mathbb{R}^2$ un domini acotat però no un rectangle. Si volem introduir la integral doble

$$\iint_A f(x, y) \, dx dy,$$

només cal considerar un rectangle R t.q. $A \subset R$ i definir l'extensió:

$$\tilde{f}(x, y) := \begin{cases} f(x, y) & \text{si } (x, y) \in A, \\ 0 & \text{si } (x, y) \in R \setminus A. \end{cases}$$

Llavors és clar que:

$$\iint_A f(x, y) \, dx dy := \iint_R \tilde{f}(x, y) \, dx dy$$

donat que els volums coincideixen.

Definició 1 (Sumes superiors i inferiors de Riemann)

Sigui $f : R = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ acotada, $n \in \mathbb{N}$. Definim la suma superior n -èsima de f en R per:

$$S_n(f, R) := \frac{(b-a)(d-c)}{n^2} \sum_{i,j=1}^n \sup_{(x,y) \in R_{i,j}} \{f(x,y)\} \quad (2)$$

i la suma inferior n -èsima per:

$$s_n(f, R) := \frac{(b-a)(d-c)}{n^2} \sum_{i,j=1}^n \inf_{(x,y) \in R_{i,j}} \{f(x,y)\}, \quad (3)$$

on

$$R_{i,j} := [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$$

són subrectangles (veure **figura 2**), amb

$$x_i = a + i \frac{b-a}{n}, \quad y_j = c + j \frac{d-c}{n}, \quad i, j = 0, 1, \dots, n.$$

Estem aproximant el volum $\iint_R f(x, y) dx dy$ mitjançant paral·lelèpeds (“capses de sabates”) amb base els subrectangles $R_{i,j}$ i una alçada que

- ▶ Pel cas de les sumes inferiors, $s_n(f, R)$, ve donada per:

$$f(c_{i,j}) = \inf_{(x,y) \in R_{i,j}} f(x, y) \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Per tant la “tapa” inferior de cada capsa està per sota de la gràfica de la funció (capses “inscrites”). Veure figura 3.

- ▶ Mentre que per les sumes superiors, $S_n(f, R)$, l'alçada ve donada per:

$$f(c_{i,j}) = \sup_{(x,y) \in R_{i,j}} f(x, y) \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Per tant la “tapa” superior de cada capsa està per sobre de la gràfica de la funció (capses “circumscrietes”). Veure figura 4.

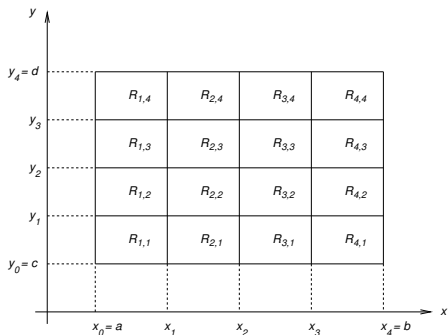


Figura 2 : Dividim el rectangle R en n^2 subrectangles (a la figura es representa $n = 4$), cadascun d'ells de costats $\frac{b-a}{n}$ i $\frac{d-c}{n}$.

Llavors és clar que per tot $n \in \mathbb{N}$ tenim:

$$s_n(f, R) \leq \iint_R f(x, y) \, dx dy \leq S_n(f, R).$$

És a dir, les sumes inferiors aproximen el volum “per defecte”, mentre que les sumes superiors aproximen el volum “per excés”.

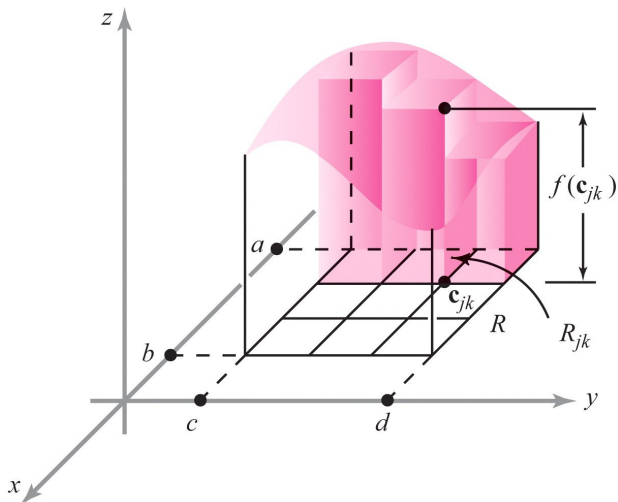


Figura 3 : Les sumes inferiors, $s_n(f, R)$, aproximen (per defecte) el volum $\iint_R f(x, y) dx dy$ mitjançant capses inscrites. Figura treta de [MT04], capítol 5.

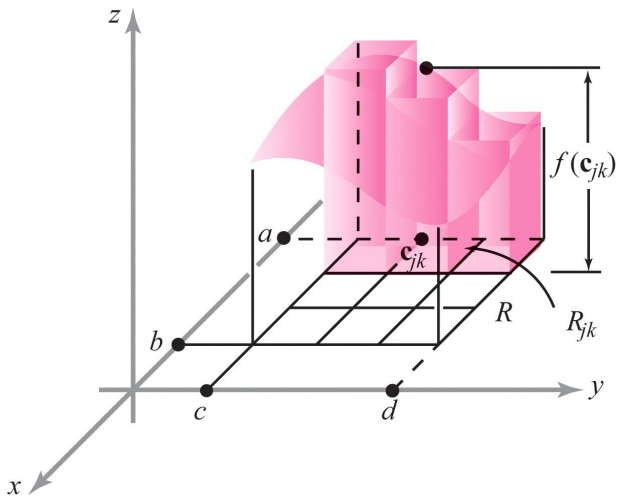


Figura 4 : Les sumes superiors, $S_n(f, R)$, aproximen (per excés) el volum $\iint_R f(x, y) dx dy$ mitjançant capses circumsrites. Figura treta de [MT04], capítol 5.

Exemple 1

Sigui $f(x, y) = 1 - x$ (veure **figura 5**) i el rectangle $R = [0, 1] \times [0, 1]$.
Volem calcular:

$$\lim_n S_n(f, R), \quad \lim_n s_n(f, R).$$

Si $(x, y) \in R_{i,j} \Rightarrow x_{i-1} \leq x \leq x_i$ i:

$$\begin{aligned} 1 - x_i \leq f(x, y) = 1 - x \\ \leq 1 - x_{i-1}. \end{aligned}$$

Llavors:

$$\sup_{(x,y) \in R_{i,j}} \{f(x, y)\} = 1 - x_{i-1},$$

$$\inf_{(x,y) \in R_{i,j}} \{f(x, y)\} = 1 - x_i,$$

per $i, j = 1, \dots, n$.

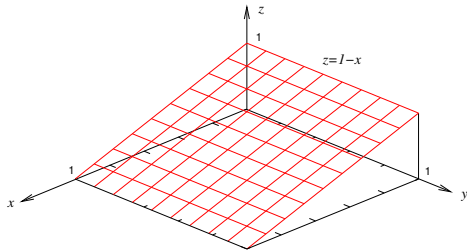


Figura 5 : La gràfica de la funció $f(x, y) = 1 - x$ és un tros de pla inclinat on z creix de 0 a 1 quan x es mou de 1 a 0.

En aquest cas $x_i = 0 + i \frac{1-0}{n} = \frac{i}{n}, i = 0, 1, \dots, n$; aleshores:

$$\begin{aligned} S_n(f, R) &= \frac{1}{n^2} \sum_{i,j=1}^n (1 - x_{i-1}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(1 - \frac{i-1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n (i-1) \\ &= 1 - \frac{1}{n^2} (0 + 1 + \dots + n-1) = 1 - \frac{1}{n^2} \left(\frac{(n-1)n}{2}\right) = \frac{n+1}{2n}, \\ s_n(f, R) &= \frac{1}{n^2} \sum_{i,j=1}^n \left(1 - \frac{i}{n}\right) = \dots = 1 - \frac{1}{n^2} \left(\frac{n(n+1)}{2}\right) = \frac{n-1}{2n}. \end{aligned}$$

El límits buscats són doncs:

$$\lim_n S_n(f, R) = \lim_n s_n(f, R) = \frac{1}{2}.$$

Això motiva la definició que donem tot seguit.

Definició 2 (Funcions integrables)

Sigui $f : R = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ acotada. Direm que f és integrable en R si existeixen i són coincidents els límits:

$$I = \lim_n S(f, R) = \lim_n s(f, R).$$

Llavors escriurem:

$$I := \iint_R f(x, y) \, dx dy$$

El següent resultat dóna una caracterització de les funcions integrables sobre rectangles:

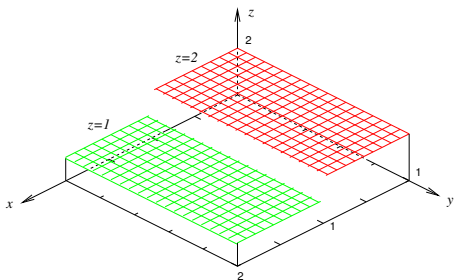
Teorema 3 (Criteri d'integrabilitat en un rectangle)

Sigui $f : R = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ acotada i contínua excepte en un conjunt de punts $A \subset R$ que està contingut en la unió d'un nombre finit de corbes contínues contingudes en R . Llavors f és integrable en el rectangle R .

Exemple 2

La funció esglaó:

$$f(x, y) = \begin{cases} 2 & \text{si } (x, y) \in R, x \in [0, 1], \\ 1 & \text{si } (x, y) \in R, x \in (1, 2] \end{cases}, \quad R = [0, 2] \times [0, 1] \quad (4)$$



és integrable en R segons el teorema 3, ja que la seva fractura es produeix al llarg d'una recta.

Clarament, el valor de la integral:

$$\iint_R f(x, y) \, dx \, dy = 2 + 1 = 3$$

és el volum sota l'esglaó.

Figura 6 : La funció esglaó (4) és integrable d'acord amb el teorema 3.

Remarca 3

De fet podem refinar el criteri anterior dient que f és integrable en R si el conjunt de les singularitats de f forma un *conjunt d'àrea zero*.

Definició 4 (Àrea d'un conjunt de \mathbb{R}^2)

Sigui $D \subset \mathbb{R}^2$ un conjunt acotat. Definim l'àrea del conjunt D per

$$\text{Àrea}(D) = \iint_D 1 \, dx dy$$

(sempre que la integral existeixi).

Comentaris:

- ▶ L'àrea d'un punt i d'una corba contínua és zero.
- ▶ La unió finita de conjunts d'àrea zero té àrea zero.
- ▶ Important!: si modifiquem els valors d'una funció integrable en un conjunt d'àrea zero, llavors la funció continua sent integrable i el valor de la integral és el mateix.

Definició 5 (Domini elemental del pla)

Direm que un conjunt $D \subset \mathbb{R}^2$ és un domini elemental si és acotat i la seva frontera està formada per la unió finita de corbes contínues.

Exemples de dominis elementals són:

- ▶ El rectangle: la seva frontera són els seus costats.
- ▶ El disc: la seva frontera és una circumferència.
- ▶ L'anell: la seva frontera és la unió de dues circumferències.

Com que nosaltres bàsicament treballarem sobre aquest tipus de dominis, serà essencial el resultat següent:

Teorema 6 (Criteri d'integrabilitat en dominis elementals)

Sigui $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, D domini elemental, f acotada i contínua excepte en un conjunt de punts $A \subset D$ que té àrea zero. Llavors f és integrable en D .

Integrals triples

- ▶ De manera natural, podem estendre la construcció de la integral d'una funció $f(x, y)$ de dues variables sobre un rectangle $R = [a, b] \times [c, d]$ al cas d'una funció $f(x, y, z)$ de tres variables sobre un paral·lelepíed $P = [a, b] \times [c, d] \times [e, f]$.
- ▶ El punt clau per definir les sumes de Riemann és que el volum de P és

$$\text{Volum}(P) = (b - a) \times (d - c) \times (f - e).$$

- ▶ En aquest cas el paper dels conjunts d'àrea zero el juguen els conjunts de volum zero, on si $D \subset \mathbb{R}^3$ és acotat, llavors:

$$\text{Volum}(D) = \iiint_D 1 \, dx \, dy \, dz.$$

En particular, observem que una superfície de \mathbb{R}^3 té volum zero.

- ▶ Finalment, els dominis elementals $D \subset \mathbb{R}^3$ són aquells que la seva frontera està formada per la unió finita de superfícies contínues.

Idènticament, podem estendre la noció d'integral a funcions de més de tres variables.

Integrals múltiples

Notació:

En el que segueix $D \subset \mathbb{R}^n$. Llavors escriurem $\int_D f$ per referir-nos a la integral de f en D , independentment del valor de n . Així:

- ▶ Si $n = 2$: $\int_D f = \iint_D f(x, y) \, dx dy$.
- ▶ Si $n = 3$: $\int_D f = \iiint_D f(x, y, z) \, dx dy dz$, etc.

Proposició 7 (Propietats de la integral)

Sigui $D \subset \mathbb{R}^n$ domini elemental, f i g integrables en D . Aleshores:

- (i) $\int_D (af + bg) = a \int_D f + b \int_D g$, per tot $a, b \in \mathbb{R}$ (linealitat).
- (ii) Si $f \geq g$ en D : $\int_D f \geq \int_D g$.
- (iii) $|\int_D f| \leq \int_D |f|$.
- (iv) Si $D = D_1 \cup D_2$, $D_1 \cap D_2 = \emptyset$ amb D_1, D_2 dominis elementals:

$$\int_D f = \int_{D_1} f + \int_{D_2} f.$$

Proposició 8 (Teorema del valor mig per a integrals múltiples)

Sigui $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ contínua, D domini elemental. Llavors

$\exists \mathbf{x}_0 \in D$ t.q.:

$$\int_D f = f(\mathbf{x}_0) \cdot \int_D 1,$$

on $\int_D 1 = \text{Àrea}(D)$ si $n = 2$, $\int_D f = \text{Volum}(D)$ si $n = 3$, etc.

Aplicació: acotació del valor de les integrals

Si $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$ (bola tancada de centre $(0, 0)$ i radi $r = 2$), tenim:

$$\iint_D e^{x^2+y^2} dx dy = f(x_0, y_0) \cdot \text{Àrea}(D) = e^{x_0^2+y_0^2} \pi \cdot 2^2,$$

per algun $(x_0, y_0) \in D$. D'altra banda és clar que $1 \leq e^{x_0^2+y_0^2} \leq e^4$ en D , i llavors:

$$4\pi \leq \iint_D e^{x^2+y^2} dx dy \leq 4\pi e^4.$$

Càlcul d'integrals

Comentaris:

Per calcular integrals de funcions de dues o més variables, els punts claus són:

- ▶ Cal saber “primitivitzar” les funcions involucrades respecte de cadascuna de les variables. Així és molt senzill formalitzar el càlcul de la integral d'una funció de dues variables sobre un rectangle (o de tres variables sobre un paral·lelepíped) en termes d'integrals iterades respecte cadascuna de les variables.
- ▶ En el cas de funcions de dues o més variables sobre dominis elementals, cal a més saber parametritzar adequadament aquests dominis.

Comencem introduint el **Principi de Cavalieri** que a més d'oferir una eina potent pel càlcul de volums en \mathbb{R}^3 també “motiva” el càlcul d'integrals en el cas més general via el *Teorema de Fubini*.

Bonaventura Cavalieri (1598–1647)



Jesuita i matemàtic italià, alumne de Galileo, ocupà la càtedra de matemàtiques a la Universitat de Bolònia. Autor, entre d'altres treballs de l'obra: *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota* (1635, 2^a edició, 1653).

El principi de Cavalieri, tal com es va formular originalment, es pot resumir en els termes següents:

Principi de Cavalieri

“Si dos sòlids al ser tallats per plans paral·lels produeixen sempre seccions d'igual superfície, llavors aquests cossos tenen el mateix volum”.

(nosaltres aplicarem una versió adaptada d'aquest principi que tot seguit formalitzarem).

Per discutir les aplicacions d'aquest principi:

- ▶ començarem amb el cas més senzill del càlcul de l'àrea d'un domini $D \subset \mathbb{R}^2$ determinat per les gràfiques de dues funcions contínues. En particular, definirem:
 - ▶ **Domini x -elemental**: la seva frontera es pot expressar en termes de gràfiques de y en funció de x . Figura 7.
 - ▶ **Domini y -elemental**: la seva frontera es pot expressar en termes de gràfiques de x en funció de y . Figura 8.
- ▶ Quan el domini D té una frontera que no es pot expressar en termes de gràfiques d'aquesta mena, s'aplica el **principi de Cavalieri per al Càlcul d'àrees**. Figura 9.
- ▶ No farem exemples del càlcul d'àrees, sinó que ens centrarem en el càlcul de volums de regions D en \mathbb{R}^3 . Per això enunciarem una versió "modernitzada" del principi de Cavalieri (**Proposició 9**).

Domini x -elemental

$$\text{Àrea}(D) = \iint_D 1 \, dx dy = \int_a^b (g(x) - h(x)) \, dx = \int_a^b \ell(x) \, dx,$$

on $\ell(x) :=$ longitud del segment vertical $\overline{(x, h(x)), (x, g(x))}$.

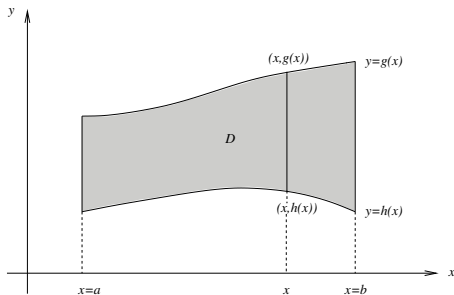


Figura 7 : Representació d'un domini x -elemental.

Domini y -elemental

$$\text{Àrea}(D) = \iint_D 1 \, dx dy = \int_c^d (v(y) - u(y)) \, dy = \int_c^d \ell(y) \, dy,$$

on $\ell(y) :=$ longitud del segment horitzontal $\overline{(u(y), y), (v(y), y)}$.

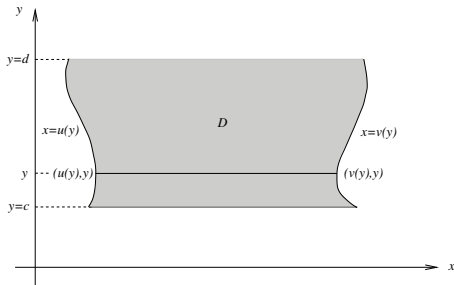


Figura 8 : Representació d'un domini y -elemental.

Principi de Cavalieri per al càlcul d'àrees

Suposem que si $(x, y) \in D$, aleshores, els valors de x varien entre $x = a$ i $x = b$ i denotem per $\ell(x_0)$ la suma de les longituds dels segments que obtenim si tallem D amb una recta vertical, per exemple, a la figura 9:

$\ell(x_0)$ és la suma de les longituds dels segments \overline{EF} i \overline{GH} , llavors:

$$\text{Àrea}(D) = \int_a^b \ell(x) dx.$$

Ídem si fem seccions per rectes horitzontals de la forma $y = y_0$:

$$\text{Àrea}(D) = \int_c^d \ell(y) dy,$$

on ara $\ell(y_0)$ és la suma de les longituds dels segments $\overline{H'G'}$ i $\overline{F'E'}$.

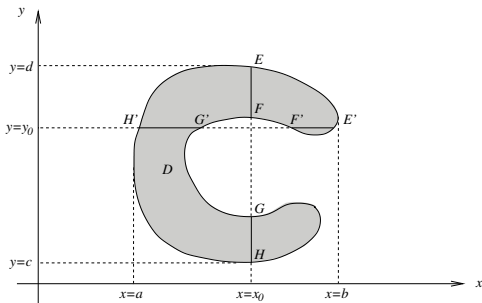


Figura 9 : Seccions per rectes horitzontals i verticals del domini D .

Proposició 9 (Principi de Cavalieri)

Sigui $D \subset \mathbb{R}^3$ un domini elemental tal que si $(x, y, z) \in D$ llavors $x \in [a, b]$. Denotem per $A(x_0)$ l'àrea de la regió plana determinada pel tall de D amb el pla $x = x_0$. Aleshores:

$$\text{Volum}(D) = \int_a^b A(x) dx.$$

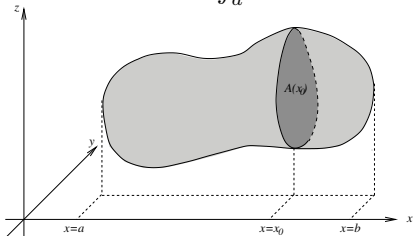


Figura 10 : Tall transversal de la regió D pel pla $x = x_0$. El mateix resultat és vàlid si fem talls per plans de la forma: $y = y_0$ ó $z = z_0$.

Exemple 3

Càlcul del volum d'una bola:

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}.$$

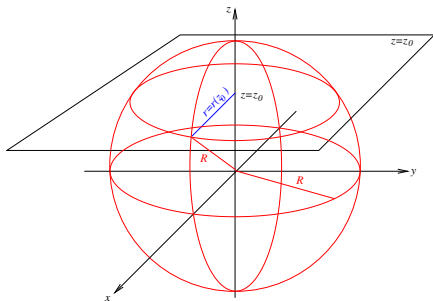


Figura 11 : Tall de l'esfera de radi R pel pla $z = z_0$.

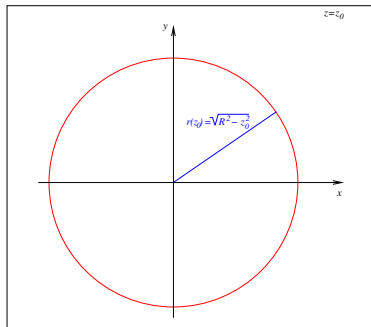


Figura 12 : La secció $D \cap \{z = z_0\}$ és un disc de radi $r(z_0) = \sqrt{R^2 - z_0^2}$.

Punts clau:

- (i) L'àrea d'un disc de radi r és πr^2 .
- (ii) Si fem $z = \text{const.}$ llavors la secció de D amb el pla és la bola

$$x^2 + y^2 \leq R^2 - z^2$$

(si $-R \leq z \leq R$) de radi

$$r(z) = \sqrt{R^2 - z^2}.$$

Aleshores:

$$\begin{aligned} \text{Volum}(D) &= \int_{-R}^R \pi(R^2 - z^2) dz \\ &= \pi \left[R^2 z - \frac{z^3}{3} \right]_{z=-R}^{z=R} = 2\pi \left(R^3 - \frac{R^3}{3} \right) = \frac{4}{3}\pi R^3. \end{aligned}$$

Exemple 4

Sigui D el domini de revolució (entorn de l'eix z) definit per

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -1 \leq z \leq 1, x^2 + y^2 \leq 1 + z^2\}.$$

Les seccions $z = \text{const.}$ són boles de radi $\sqrt{1 + z^2}$ i per tant:

$$\begin{aligned} \text{Volum}(D) &= \int_{-1}^1 \pi(1 + z^2) dz \\ &= \pi \left[z + \frac{z^3}{3} \right]_{z=-1}^{z=1} = \frac{8\pi}{3} \end{aligned}$$

En canvi, si fem seccions, per ex. per $x = \text{const.}$, el càlcul resulta molt més complicat.

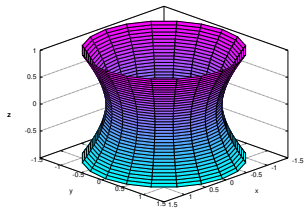
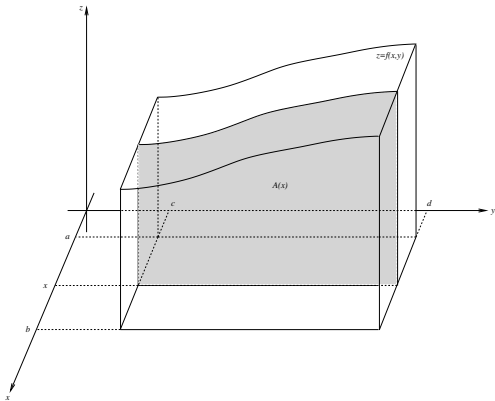


Figura 13 : $x^2 + y^2 = 1 + z^2$.

Apliquem el principi de Cavalieri al càlcul del volum sota la gràfica d'una funció $f(x, y) \geq 0$ definida al rectangle $R = [a, b] \times [c, d]$. Això és:

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in [a, b] \times [c, d], 0 \leq z \leq f(x, y)\}$$



Si fem $x = \text{const.}$ obtenim un domini secció que té àrea:

$$A(x) = \int_c^d f(x, y) dy.$$

Llavors:

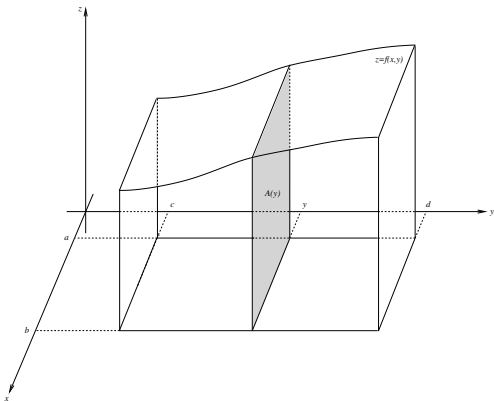
$$\text{Volum}(D) = \int_a^b A(x) dx.$$

Si repetim els càlculs fent seccions $y = \text{const.}$ obtenim:

$$A(y) = \int_a^b f(x, y) dx$$

d'on:

$$\text{Volum}(D) = \int_c^d A(y) dy.$$



Finalment, si recordem que $\text{Volum}(D) = \iint_D f(x, y) dx dy$, tenim:

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy = \iint_R f(x, y) dx dy.$$

Aquest resultat (vàlid si f és contínua) es coneix com *Teorema de Fubini*.

Teorema de Fubini

Guido Fubini (1879-1943)



Matemàtic italià destacà en camps tan diversos com l'anàlisi, la geometria i la física matemàtica. Autor, entre d'altres obres, de **Lezioni Di Analisi Matematica (1920)**

Teorema 10 (Teorema de Fubini)

Sigui $f : R = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua. Aleshores, les integrals iterades,

$$I_1 := \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) \, dy \right) \, dx, \quad I_2 := \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) \, dx \right) \, dy$$

existeixen totes dues i verifiquen:

$$I_1 = I_2 = \iint_R f(x, y) \, dx \, dy.$$

Exemple 5

Si $R = \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times [0, 1]$, volem trobar $I := \iint_R x \cos(xy) \, dx dy$.

Com que $f(x, y) = x \cos(xy)$ és una funció contínua:

$$\begin{aligned} \iint_R x \cos(xy) \, dx dy &= \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^1 x \cos(xy) \, dy \right) dx \\ &= \int_0^{\pi/2} [\sin(xy)]_{y=0}^{y=1} dx = \int_0^{\pi/2} \sin x \, dx = [-\cos x]_{x=0}^{x=\pi/2} = \cos 0 = 1. \end{aligned}$$

Remarca 4

Si considerem l'altra integral iterada,

$$\int_0^1 \left(\int_0^{\pi/2} x \cos(xy) \, dx \right) dy,$$

cal calcular una primitiva respecte de x de $x \cos(xy)$. Obtindríem el mateix resultat, però el càlcul surt més complicat...

Corol·lari 11

Si $f(x, y) = g(x)h(y)$, aleshores la integral sobre el rectangle $R = [a, b] \times [c, d]$ es pot expressar com:

$$\iint_R g(x)h(y) \, dx dy = \left(\int_a^b g(x) \, dx \right) \times \left(\int_c^d h(y) \, dy \right).$$

Exemple 6

$$\begin{aligned} \iint_{[1,2] \times [1,3]} xy^2 \, dx dy &= \left(\int_1^2 x \, dx \right) \times \left(\int_1^3 y^2 \, dy \right) \\ &= \left[\frac{x^2}{2} \right]_{x=1}^{x=2} \times \left[\frac{y^3}{3} \right]_{y=1}^{y=3} \\ &= \left(\frac{4}{2} - \frac{1}{2} \right) \times \left(\frac{27}{3} - \frac{1}{3} \right) = \frac{3}{2} \times \frac{26}{3} = 13. \end{aligned}$$

Remarca 5

Si $f(x, y)$ no és contínua però sí integrable, el teorema de Fubini també és cert però amb matisos. Així:

- ▶ Si $f(x, y)$ és integrable en $R = [a, b] \times [c, d]$ i alguna de les integrals iterades existeix, llavors coincideix amb el valor de $\iint_R f$.
- ▶ En alguns casos doncs, malgrat f sigui integrable, pot ser que alguna de les integrals iterades no existeixi.
- ▶ Nosaltres no formalitzarem aquest fet però sí donarem el següent criteri de no integrabilitat.

Criteri de no integrabilitat de f en R

Si les integrals de iterades existeixen i són diferents, llavors f no és integrable en R .

Exemple 7

Sigui $f(x, y) = \frac{x - y}{(x + y)^3}$, $R = [0, 1] \times [0, 1]$. Aleshores:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x - y}{(x + y)^3} dx \right) dy &= \int_0^1 \left(\int_0^1 \left[\frac{1}{(x + y)^2} - \frac{2y}{(x + y)^3} \right] dx \right) dy \\ &= \int_0^1 \left[\frac{-1}{x + y} + \frac{y}{(x + y)^2} \right]_{x=0}^{x=1} dy \\ &= \int_0^1 \left[\frac{-1}{1 + y} + \frac{y}{(1 + y)^2} \right] dy \\ &= - \int_0^1 \frac{dy}{(1 + y)^2} = \left[\frac{1}{1 + y} \right]_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2};\end{aligned}$$

mentre que, per simetria, es clar que $\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x - y}{(x + y)^3} dy \right) dx = \frac{1}{2}$. Per tant, f no és integrable en R .

Teorema de Fubini per dominis x -elementals

Si

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, h(x) \leq y \leq g(x)\}.$$

Llavors:

$$\iint_D f(x, y) \, dx dy = \int_a^b \left(\int_{h(x)}^{g(x)} f(x, y) \, dy \right) dx.$$

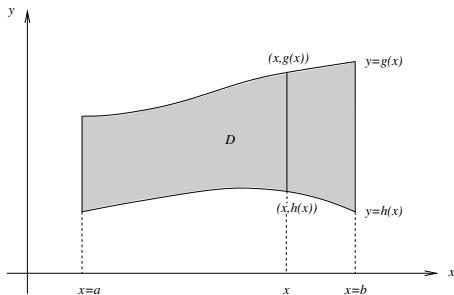


Figura 14 : Domini x -elemental.

Teorema de Fubini per dominis y -elementals

Si

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq x \leq d, u(y) \leq x \leq v(y)\}.$$

Llavors:

$$\iint_D f(x, y) \, dx dy = \int_c^d \left(\int_{u(y)}^{v(y)} f(x, y) \, dx \right) dy.$$

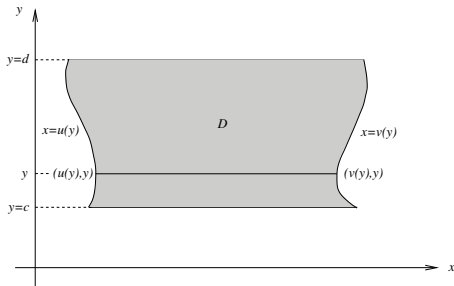


Figura 15 : Domini y -elemental.

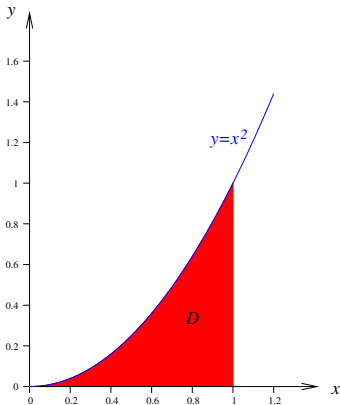
Remarca 6

- ▶ És molt normal que un domini $D \subset \mathbb{R}^2$ sigui simultàniament x -elemental i y -elemental. Aleshores, totes dues opcions són vàlides per integrar $\iint_D f$, però s'ha de veure quina dóna lloc a càlculs més simples.
- ▶ Si el domini D no encaixa en cap dels casos anteriors, sempre tenim la opció de dividir el domini en trossos que siguin x -elementals ó y -elementals i integrar per separat cadascun d'ells. De vegades, però, resulta més convenient l'ús de coordenades adaptades. Ho discutirem més endavant quan parlem de *canvis de variables*.

Exemple 8

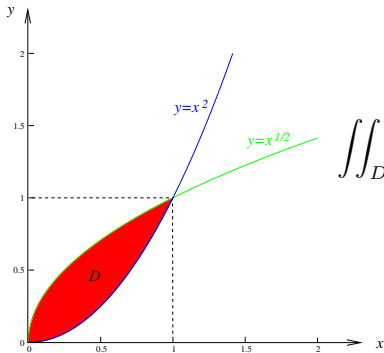
Escriviu les dues integrals iterades de la funció $f(x, y)$ corresponents als dominis següents:

(i) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2\}$.



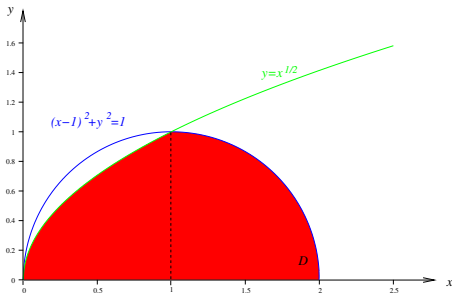
$$\begin{aligned}\iint_D f(x, y) \, dx \, dy &= \int_0^1 \left(\int_0^{x^2} f(x, y) \, dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \left(\int_{\sqrt{y}}^1 f(x, y) \, dx \right) dy.\end{aligned}$$

(ii) D : domini limitat per les corbes $y = x^2$ i $y^2 = x$.



$$\begin{aligned}\iint_D f(x, y) \, dx \, dy &= \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} f(x, y) \, dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \left(\int_{y^2}^{\sqrt{y}} f(x, y) \, dx \right) dy.\end{aligned}$$

(iii) D : domini limitat per les corbes $y^2 = x$, $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ i $y \geq 0$.



$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) \, dx \, dy &= \int_0^1 \left(\int_{y^2}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x, y) \, dx \right) dy \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{x}} f(x, y) \, dy \right) dx + \int_1^2 \left(\int_0^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y) \, dy \right) dx. \end{aligned}$$

Exemple 9

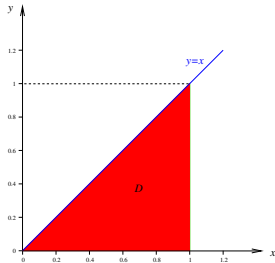
Calculeu $I = \iint_D e^{\frac{y}{x}} dx dy$ on D és el triangle de vèrtexs $(0, 0)$, $(1, 0)$ i $(1, 1)$.

Veiem que no podem calcular la integral:

$$I = \int_0^1 \left(\int_y^1 e^{\frac{y}{x}} dx \right) dy,$$

ja que la primitiva $\int e^{\frac{y}{x}} dx$ no és expressable en termes de funcions elementals. Així que ho haurem de calcular amb l'altra:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\int_0^x e^{\frac{y}{x}} dy \right) dx &= \int_0^1 \left[x e^{\frac{y}{x}} \right]_{y=0}^{y=x} dx \\ &= \int_0^1 x(e - 1) dx \\ &= (e - 1) \left[\frac{x^2}{2} \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{e - 1}{2}. \end{aligned}$$



Teorema de Fubini per funcions de tres variables

- ▶ Si $g(x, y, z)$ és contínua en $P = [a, b] \times [c, d] \times [e, f]$, llavors totes les *integrals iterades* existeixen i el seu valor és el mateix i igual al valor de la integral sobre P . Així:

$$\iiint_P g(x, y, z) \, dx dy dz = \int_a^b \left[\int_c^d \left(\int_e^f g(x, y, z) \, dz \right) dy \right] dx$$

o en qualsevol ordre en què es considerin les integrals iterades respecte x, y, z .

- ▶ Si D és un domini elemental i el podem parametritzar, per exemple, com:

$$a \leq x \leq b, \quad \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x), \quad \gamma_1(x, y) \leq z \leq \gamma_2(x, y).$$

Llavors:

$$\iiint_D f(x, y, z) \, dx dy dz = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left(\int_{\gamma_1(x, y)}^{\gamma_2(x, y)} g(x, y, z) \, dz \right) dy \right] dx.$$

Exemple 10

Calculeu $I = \iiint_D 2z \, dx \, dy \, dz$, on D és el domini de \mathbb{R}^3 definit per les restriccions:

$$x, y, z \geq 0, \quad x^2 + y \leq 1, \quad z \leq x^2 + y^2.$$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \left[\int_0^{1-x^2} \left(\int_0^{z=x^2+y^2} 2z \, dz \right) dy \right] dz = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x^2} [z^2]_{z=0}^{z=x^2+y^2} dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x^2} (x^2 + y^2)^2 dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x^2} (x^4 + 2x^2y^2 + y^4) dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \left[x^4y + \frac{2}{3}x^2y^3 + \frac{y^5}{5} \right]_{y=0}^{y=1-x^2} dx \\ &= \int_0^1 \left[x^4(1-x^2) + \frac{2}{3}x^2(1-x^2)^3 + \frac{1}{5}(1-x^2)^5 \right] dx \\ &= \int_0^1 \left[\frac{1}{5} - \frac{x^2}{3} + x^4 - x^6 + \frac{x^8}{3} - \frac{x^{10}}{5} \right] dx = \dots = \frac{1714}{10395}. \end{aligned}$$

CdCs per integrals dobles

Siguin D, D^* oberts acotats de \mathbb{R}^2 . Considerem l'aplicació

$$\begin{aligned} T : D^* &\longrightarrow D \\ (u, v) &\longrightarrow (x, y) = (x(u, v), y(u, v)) \end{aligned}$$

(u, v) són les coordenades “noves” i (x, y) són les coordenades “velles”, on:

- (i) T és almenys C^1 i bijectiva i per tant $\exists T^{-1} : D \rightarrow D^*$.
- (ii) $\det DT(u, v) \neq 0 \forall (u, v) \in D^* \Rightarrow T^{-1}$ també és de classe C^1 (Teorema de la funció Inversa).
- (iii) La matriu:

$$DT(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial x}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial y}{\partial v}(u, v) \end{pmatrix}$$

és la matriu de derivades parcials o *matriu Jacobiana*.

Definició 12

Anomenarem *Jacobià* de T al determinant de $DT(u, v)$.

Teorema 13 (canvi de variables per funcions de dues variables)

Siguin D, D^ dos oberts acotats del pla y $T : D^* \rightarrow D$ un canvi de variable. Si $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ és una funció integrable, es satisfà:*

$$\iint_D f(x, y) \, dx dy = \iint_{D^*} f(x(u, v), y(u, v)) |\det DT(u, v)| \, du dv.$$

Corol·lari 14 (Canvi de variables pel càlcul d'àrees)

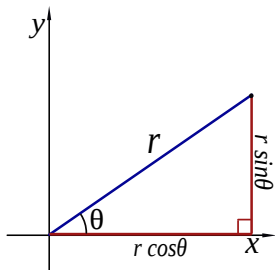
$$\iint_D 1 \, dx dy = \iint_{D^*} |\det DT(u, v)| \, du dv.$$

El canvi de variables més important en el pla són les *coordenades polars*.

Coordenades polars (1/2)

Les coordenades polars vénen definides pel canvi:

$$\begin{aligned} T : (0, +\infty) \times (0, 2\pi) &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y = 0\} \\ (r, \theta) &\longrightarrow (x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta). \end{aligned}$$



- El fet de què les coordenades polars no recobreixin la semi-recta:

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y = 0\}$$

no té influència en el càlcul de la integral ja que és un conjunt d'àrea zero.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \begin{cases} 2 \arctan \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{si } y \geq 0, \\ 2\pi + 2 \arctan \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{si } y < 0. \end{cases}$$

Coordenades polars (2/2)

- ▶ El jacobià de les coordenades polars és:

$$\begin{aligned}\det DT(r, \theta) &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r}(r, \theta) & \frac{\partial x}{\partial \theta}(r, \theta) \\ \frac{\partial y}{\partial r}(r, \theta) & \frac{\partial y}{\partial \theta}(r, \theta) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = r.\end{aligned}$$

- ▶ Per tant, si $D = T(D^*)$, tenim:

$$\iint_D f(x, y) \, dx dy = \iint_{D^*} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r \, dr d\theta.$$

CdCs per funcions de 3 variables (1/2)

L'extensió de dels CdCs al cas de funcions de tres o més variables és directa i no presenta cap dificultat conceptual.

Siguin D, D^* oberts acotats de \mathbb{R}^3 i,

$$(u, v, w) \in D^* \xrightarrow{T} (x, y, z) = (x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \in D$$

un canvi de variables C^1 . El seu jacobinà és:

$$\det DT(u, v, w) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u, v, w) & \frac{\partial x}{\partial v}(u, v, w) & \frac{\partial x}{\partial w}(u, v, w) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u, v, w) & \frac{\partial y}{\partial v}(u, v, w) & \frac{\partial y}{\partial w}(u, v, w) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(u, v, w) & \frac{\partial z}{\partial v}(u, v, w) & \frac{\partial z}{\partial w}(u, v, w) \end{vmatrix}.$$

CdCs per funcions de 3 variables (2/2)

Així, si $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ és integrable i $D = T(D^*)$, tenim:

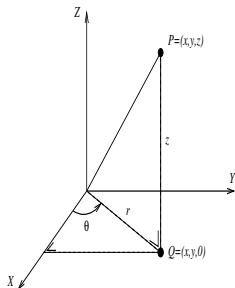
$$\iiint_D f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \iiint_{D^*} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) |\det DT(u, v, w)| \, du \, dv \, dw.$$

Les coordenades més usuals en \mathbb{R}^3 són les *cilíndriques* i les *esfèriques*.

Coordenades cilíndriques (1/2)

Estan definides de la forma següent:

$$T : (0, +\infty) \times (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y = 0, z \in \mathbb{R}\}$$
$$(r, \theta, z) \longrightarrow (x, y, z) = (r \cos \theta, r \sin \theta, z).$$



- ▶ Si projectem $P = (x, y, z)$ en el pla xy , obtenim el punt $Q = (x, y, 0)$, llavors (r, θ) són les corresponents coordenades polars d'aquest punt, mentre que z dona l'alçada del punt.
- ▶ El nom de coordenades cilíndriques és clar, ja que si fixem el valor de $r = R$, llavors la transformació:

$$(x, y, z) = T_R(\theta, z) := T(R, \theta, z) = (R \cos \theta, R \sin \theta, z)$$

parametriza un cilindre de base circular amb radi R .

- ▶ Les coordenades cilíndriques són útils quan el domini d'integració presenti simetria cilíndrica, i.e., de rotació respecte de una recta.

Coordenades cilíndriques (2/2)

- ▶ El conjunt de punts per als quals les coordenades no estan definides és un semiplà. Com que és un conjunt de volum zero això no comporta cap dificultat en el càlcul de la integral.
- ▶ el seu jacobinà és $\det DT(r, \theta, z) =$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r}(r, \theta, z) & \frac{\partial x}{\partial \theta}(r, \theta, z) & \frac{\partial x}{\partial z}(r, \theta, z) \\ \frac{\partial y}{\partial r}(r, \theta, z) & \frac{\partial y}{\partial \theta}(r, \theta, z) & \frac{\partial y}{\partial z}(r, \theta, z) \\ \frac{\partial z}{\partial r}(r, \theta, z) & \frac{\partial z}{\partial \theta}(r, \theta, z) & \frac{\partial z}{\partial z}(r, \theta, z) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r.$$

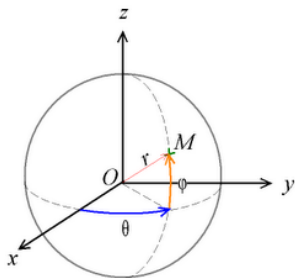
- ▶ Aleshores:

$$\iiint_D f(x, y, z) \, dx dy dz = \iiint_{D^*} f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r \, dr d\theta dz.$$

Coordenades esfèriques (1/2)

Estan definides per:

$$\begin{aligned} T : (0, +\infty) \times (0, 2\pi) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{x \geq 0, y = 0, z \in \mathbb{R}\} \\ (r, \theta, \varphi) &\longrightarrow (x, y, z) = \\ &(r \cos \theta \cos \varphi, r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \varphi). \end{aligned}$$



- ▶ $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ és la distància del punt $M = (x, y, z)$ a l'origen $O = (0, 0, 0)$.
 - ▶ $\varphi \equiv$ latitud: l'angle que forma el vector de posició del punt $M = (x, y, z)$ amb la seva projecció al pla xy ($\varphi > 0$ en l'hemisferi nord).
 - ▶ $\theta \equiv$ longitud: l'angle que forma la projecció $(x, y, 0)$ del vector de posició del punt $M = (x, y, z)$ sobre el pla xy amb l'eix x .
- ▶ El nom de coordenades esfèriques és clar: si fixem $r = R$, llavors la transformació $T_R(\theta, \varphi) := T(R, \theta, \varphi)$ parametriza una esfera de radi R .

Coordenades esfèriques (2/2)

- ▶ Les coordenades esfèriques són útils quan el domini d'integració presenti simetria esfèrica, i.e., simetria respecte un punt.
- ▶ El seu jacobià és:

$$\begin{aligned}\det DT(r, \theta, \varphi) &= \begin{vmatrix} \cos \varphi \cos \theta & -r \cos \varphi \sin \theta & -r \sin \varphi \cos \theta \\ \cos \varphi \sin \theta & r \cos \varphi \cos \theta & -r \sin \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi & 0 & r \cos \varphi \end{vmatrix} \\ &= r^2 \cos \varphi.\end{aligned}$$

Observem que $r^2 \cos \varphi > 0$ si $r > 0$ i $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$.

- ▶ Així:

$$\begin{aligned}\iiint_D f(x, y, z) \, dx dy dz \\ = \iiint_{D^*} f(r \cos \theta \cos \varphi, r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \varphi) r^2 \cos \varphi \, dr d\theta d\varphi.\end{aligned}$$