Càlcul 2 (240022)

Tema 1. Funcions de Vàries variables

September 1, 2020

Definició 1 (Límit d'una funció en un punt)

Sigui $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $A = D(f)$, $a \in \bar{A}$, $L \in \mathbb{R}^m$.

- Si a no és un punt aïllat de A, direm que $f(x)$ tendeix cap a L quan x tendeix cap a a, i escriurem $f(x) \to L$ quan $x \to a$; o que el límit de la funció $f(x)$ quan x tendeix cap a a (o en $x = a$) és L, i escriurem

  $$\lim_{x \to a} f(x) = L = \lim_{a} f(x) = L,$$

  sii, donat $\varepsilon > 0$ existeix $\delta = \delta_a(\varepsilon) > 0$ t.q. $f(x) \in B^n_\varepsilon(L)$, sempre que $x \in (B^n_\delta(a) \setminus \{a\}) \cap A$ o, equivalentment, sii

  $$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta = \delta_a(\varepsilon) > 0 \text{ t.q.:}$$
  $$\|x - a\|_{\mathbb{R}^n} < \delta, x \in A \setminus \{a\} \Longrightarrow \|f(x) - L\|_{\mathbb{R}^m} < \varepsilon,$$

  on $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^n}$, $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^m}$ denoten les normes en $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{R}^m$ respectivament.
- Si A és un punt aïllat de A, llavors $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Definició 2 (Límits segons subconjunts)

Sigui $B \subseteq A$, $a \in \bar{B}$. Direm que $L \in \mathbb{R}^m$ és el límit de $f(x)$ quan $x \to a$ segon el subconjunt B, i escriurem $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ B}} f(x) = L$, sii

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in B}} f_{|B}(x) = L,$$

on $f_{|B}$ és la restricció de la funció f al conjunt B.

Exemple 1

Límits segons rectes, paràboles, etc.

Proposició 1

- $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L \Longrightarrow \lim\limits_{\substack{x \to a \\ B}} f(x) = L$, *per a tot* $B \subseteq A$ *amb* $a \in \bar{B}$.
- *Si* $A = \bigcup\limits_{i=1}^{s} B_i$, $s \in \mathbb{N}$, $a \in \bar{B}_i$ *per a cada* $i = 1, 2, \ldots, s$; *aleshores:*

$$\lim_{\substack{x \to a \\ B_i}} f(x) = L, \ \textit{per a cada } i = 1, 2, \ldots, s \ \Longrightarrow \lim_{x \to a} f(x) = L.$$

Definició 3 (Continuïtat)

- Direm que f és contínua en $x = a$ sii:
  (a) $a \in A$.
  (b) Existeix $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ i és finit.
  (c) El valor del límit en $x = a$ coincideix amb el de la funció al mateix punt, i.e.: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.
- f és contínua en A (o d'un subconjunt de $B \subseteq A$) sii ho és en cada punt de A (o del subconjunt B).

Proposició 2

Sigui $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$*. Són equivalents:*

- f *és contínua en* $\mathbb{R}^n$*.*
- $\forall\, V \subseteq \mathbb{R}^m \;\; f^{-1}(V) = U$ *és un conjunt obert de* $\mathbb{R}^n$*.*
- $\forall\, Z \subseteq \mathbb{R}^m \;\; f^{-1}(Z) = W$ *és un conjunt tancat de* $\mathbb{R}^n$*.*

Proposició 3

Si $f : K \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *és contínua i* K *és un compacte, llavors la imatge de* K*,* $f(K) \subseteq \mathbb{R}^m$*, és un conjunt compacte.*

Exemple 2

Problema 1, apartats (a), (b), (c) i (d).

Exemple 3 (Examen parcial 02/11/2015)

Considereu la funció $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, on

$$\Omega = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + \frac{y^2}{4} < 3 \right\},$$

definida per

$$f(x,y) = \begin{cases} E\left[-x^2 - \dfrac{y^2}{4}\right], & 1 < x^2 + y^2/4 < 3, \\ -\sqrt{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2/4 \leq 1. \end{cases}$$

On $E[t] = \sup\{z \in \mathbb{Z} : z \leq t\}$ és la funció "part entera de t".

(a) Estudieu si f és contínua en els puts de l'el·lipse $x^2 + y^2/4 = 2$.

(b) Estudieu si f és contínua als punts $(0, \pm 2)$.

(c) Estudieu en quins punts la funció f és discontínua.

Exemple 4 (Examen parcial 02/11/2017)

Sigui $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida a trossos de la forma següent

$$f(x,y) = \mathrm{e}^{-y/x}, \text{ si } x > 0; \;\; f(0,y) = 0; \;\; f(x,y) = \frac{\sin\left(x^3\right)}{x^2 + y^4}, \text{ si } x < 0.$$

(a) Calculeu, si existeix, $\lim\limits_{(0,y_0)} f(x,y)$ si ens acostem a $(0, y_0)$ per punts $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ verificant $x < 0$.

(b) Ídem si ens acostem per punts (x,y) verificant $x > 0$.

(c) Indiqueu per quins punts de l'eix y la funció $f(x,y)$ és contínua.

Exercici 1 (Examen parcial 31/10/2014)

Considereu la funció $f(x,y) = E\left[\mathrm{e}^{2x^2+3y^2}\right]$, on $E[t]$ és la funció "part entera de t". Calculeu la anti-imatge del punt 2 i digueu quin objecte geomètric és la seva frontera.

Teorema 4 (Regla de la Cadena, en [PdM82])

Siguin $U \subseteq \mathbb{R}^m$ *i* $V \subseteq \mathbb{R}^n$ *dos conjunts oberts. Si* $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *és de classe* C^1 *en* $p \in U$, $f(U) \subseteq V$ *i* $g : V \longrightarrow \mathbb{R}^k$ *és de classe* C^1 *en* $q = f(p)$, *aleshores* $g \circ f : U \longrightarrow \mathbb{R}^k$ *és de Classe* C^1 *en* p *i* $D(g \circ f)(p) = Dg(f(p))Df(p)$.

Corol·lari 5

Si f *i* g *són totes dues de classe* C^r, $r \geq 1$, *aleshores la seva composició* $g \circ f$ *també és de classe* C^r.

Corol·lari 6

Si $f : U \subseteq \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^k$ *és de classe* C^1 *en* $p \in U$ *i* $\alpha : (-1, 1) \longrightarrow U$ *és una corba t.q.* $\alpha(0) = p$ *i* $\alpha'(0) = v \in \mathbb{R}^m$, *aleshores* $f \circ \alpha$ *és una corba derivable en* $t = 0$ *i* $(f \circ \alpha)'(0) = Df(p)v$.

Teorema 7 (Teorema de la funció inversa, en [PdM82])

Sigui $f : U \subseteq \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *una funció de classe* C^r*. Si* $\det Df(p) \neq 0$*, llavors* f *és un difeomorfisme local en* p *de classe* C^r*. Això és: existeixen entorns* $V \subseteq U$*,* $W \subseteq \mathbb{R}^m$*, de* p *i* $f(p)$ *respectivament, i una aplicació* $g : W \longrightarrow V$*, de classe* C^r *tal que* $g \circ f_{|V} = I_V$ *i* $f_{|V} \circ g = I_W$*, on* I_V *denota l'aplicació identitat de* V*,* I_W *denota l'aplicació identitat de* W *i* $f_{|V}$ *denota la restricció de* f *a* V*.*

Corol·lari 8

Si a més f *és injectiva i* $\det Df(p) \neq 0$ *per a cada* $p \in U$*, aleshores* f *és globalment invertible sobre la seva imatge* $V = f(U)$*, amb inversa global de classe* C^r*.*

Teorema 9 (Teorema de la funció implícita, en [PdM82])

Sigui $U \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ *un conjunt obert i* $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *de classe* C^r, $r \geq 1$. *Sigui* $z_0 = (x_0, y_0) \in U$ *i* $c = f(z_0)$. *Suposem que, en el punt* $z_0 = (x_0, y_0)$ *la matriu de derivades parcials respecte la* 2^{a} *variable,* $D_2 f(x_0, y_0)$, *és invertible i.e.,* $\det D_2 f(x_0, y_0) \neq 0$. *Llavors, existeixen dos conjunts oberts* $V \subseteq \mathbb{R}^m$ *contenint* x_0 *i* $W \subseteq U$ *contenint* z_0, *tal que per a cada* $x \in V$ *hi ha un únic* $g(x) \in \mathbb{R}^n$ *amb* $(x, g(x)) \in W$ *i* $f(x, g(x)) = c$. *L'aplicació* $g : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *definida d'aquesta manera és de classe* C^r *i la seva derivada ve donada per* $Dg(x) = -\left(D_2 f(x, g(x))\right)^{-1} D_1 f(x, g(x))$.

Remarca 1

Observem que en particular $g(x_0) = y_0$. Això ens permet calcular totes les derivades de g en x_0 fins a ordre r.

Referències

Jerrold E. Marsden and Anthony J. Tromba.
Cálculo Vectorial.
Pearson Education S.A., Madrid, 5 edition, 2004.
Capítols 5 i 6.

Pere Pascual, editor.
Càlcul Integral per a Enginyers.
Edicions UPC, 2002.
Capítols 1, 2, i 3.

Jacob Palis, Jr. and Welington de Melo.
Geometric Theory of Dynamical Systems.
Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982.