Extrems de funcions de vàries variables

Font: M.L. Krasnov, G.I. Makarenko, A.I. Kiseliov.

Cálculo Variacional. Ed. Mir, Moscú, 1992.

Capítol 1 (almost verbatim)

Sigui $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ una funció escalar definida en un cert domini $D \subseteq \mathbb{R}^n$.

Es diu que la funció $f(x)$ assoleix el seu valor màxim (mínim) absolut al punt $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in D$ si

$$f(x) \leq f(a) \qquad (f(x) \geq f(a))$$

per a qualsevol punt $x \in D$.

Teorema 1 (Bolzano-Weierstrass)

Tota funció contínua definida en un compacte K de $\mathbb{R}^n$ assoleix en ell els seus valors màxim i mínim. Això vol dir que existeixen $x^{(M)}$, $x^{(m)} \in K$ tals que,

$$f(x) \leq f(x^{(M)}), \qquad f(x) \geq f(x^{(m)}),$$

per a tot $x \in K$.

Definició 2

- Direm que $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in D$ és un punt de màxim relatiu estricte (un punt de mínim relatiu estricte, respectivament) de la funció $f(x)$ si existeix $\delta > 0$ tal que,

$$f(x) < f(a) \qquad (f(x) > f(a), \text{ respectivament})$$

  per a tot $x \in D \cap (B^n_\delta(a) \setminus \{a\})$.

- Per contra, si existeix $\delta > 0$ tal que

$$f(x) \leq f(a) \qquad (f(x) \geq f(a), \text{ respectivament})$$

  per a tot $x \in D \cap B^n_\delta(a)$, direm simplement que el punt a és un punt de màxim relatiu (un punt de mínim relatiu, respectivament).

Definició 3

Ells punts de màxim i de mínim de la funció $f(x)$ s'anomenen punts d'extrem de la funció. Així, segons sigui el cas, parlarem d'extrems absoluts, o d'extrems relatius, o d'extrems relatius estrictes.

Teorema 4 (Condició necessària d'extrem)

Sigui $f(x)$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ *una funció definida en un entorn del punt* $a = (a_1, \ldots, a_n)$. *Si aquest punt és un punt d'extrem de la funció* $f(x)$ *i si en ell existeixen les derivades* $D_{x_j} f(a)$ $(j = 1, \ldots, n)$, *totes aquestes derivades són iguals a zero:*

$$D_{x_j} f(a) = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Definició 5

Els punts on es verifica la condició necessària d'extrem de la funció $f(x)$ s'anomenen punts crítics de la funció.

Remarca 1

És clar que no tots els punts crítics d'una funció corresponen a extrems de la mateixa. Per exemple $(x, y) = (0, 0)$ és un punt crític de $f(x, y) = x^2 - y^2$ però la funció no té extrems en ell (en qualsevol entorn del $(0, 0)$ hi ha punts on la funció pren valors tant positius com negatius, mentre que $f(0, 0) = 0$).

Sigui $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, $A^\top = A$.

Definició 6

- A és definida positiva (definida negativa, respect.) si $x^\top Ax > 0$ (si $x^\top Ax < 0$, respect.) per a tot $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$, i s'anul·la només quan $x = 0$, això és, quan $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$.
- A s'anomena no negativa si $x^\top Ax$ mai pren valors negatius. Per exemple, les matrius

  $$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{i} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

  són totes dues no negatives. La primera és definida positiva perquè $x^\top A_1 x$ només s'anul·la per $x = (0,0)^\top$, mentre que $x^\top A_2 x$ s'anul·la també, per exemple, per a $x = (-1,1)^\top$.
- Una matriu simètrica definida positiva o definida negativa s'anomena matriu definida.
- Si $x^\top Ax$ pren valors tant positius com negatius, direm que A és indefinida.

Teorema 7 (Condicions suficients d'extrem relatiu estricte)

Sigui $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *una funció definida en un entorn d'un punt* $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *suposen que* $f(x)$ *és* C^2 *en aquest entorn i sigui* a *un punt crític de la funció* $f(x)$*. Aleshores, si la matriu hessiana*

$$\operatorname{Hess} f(a) = \begin{pmatrix} D^2_{x_1 x_1} f(a) & D^2_{x_1 x_2} f(a) & \ldots & D^2_{x_1 x_n} f(a) \\ D^2_{x_2 x_1} f(a) & D^2_{x_2 x_2} f(a) & \ldots & D^2_{x_2 x_n} f(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D^2_{x_n x_1} f(a) & D^2_{x_n x_2} f(a) & \ldots & D^2_{x_n x_n} f(a) \end{pmatrix}$$

és definida positiva (definida negativa, respectivament) el punt a *és un punt de mínim relatiu estricte (de màxim relatiu estricte, respectivament); si és indefinida no hi ha extrem en el punt* a*.*

Criteri de Sylvester

Condició necessària i suficient perquè $A \in \mathbb{M}_{n\times n}$, $A^\top = A$, sigui definida positiva és que es verifiqui

$$\varDelta_1 = a_{11} > 0, \quad \varDelta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \varDelta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} > 0, \dots$$

$$\dots, \varDelta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

Condició necessària i suficient perquè $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, $A^\top = A$, sigui definida negativa és que es verifiqui

$$\varDelta_1 < 0, \quad \varDelta_2 > 0, \quad \varDelta_3 < 0, \dots, (-1)^n \varDelta_n > 0.$$

Cas $n = 2$

Sigui $f(x, y)$ una funció definida en un entorn del punt (a_1, a_2). Suposem que,

1. $f(x, y)$ és de classe C^2 en aquest entorn.
2. (a_1, a_2) és un punt crític, i.e., $D_x f(a_1, a_2) = D_y f(a_1, a_2) = 0$.

Aleshores,

- Si $\Delta(a_1, a_2) := D^2_{xx} f(a_1, a_2) D^2_{yy} f(a_1, a_2) - \left(D^2_{xy} f(a_1, a_2)\right)^2 > 0$, la funció $f(x, y)$ té un extrem relatiu estricte en aquest punt. Concretament:
  - Un màxim relatiu estricte si
  $$D^2_{xx} f(a_1, a_2) < 0 \qquad (D^2_{yy} f(a_1, a_2) < 0)$$
  - Un mínim relatiu estricte si
  $$D^2_{xx} f(a_1, a_2) > 0 \qquad (D^2_{yy} f(a_1, a_2) > 0)$$
- Si $\Delta(a_1, a_2) < 0$ no hi ha extrem al punt (a_1, a_2).
- Per últim, si $\Delta(a_1, a_2) = 0$, en aquest punt pot haver o no un extrem. Aquest cas requereix un estudi complementari.