

# 1 EDOs de primer ordre

---

## Càlcul II / Introducció a les EDOS (Esquema)

Rafael Ramírez

---

Estudiem les equacions diferencials ordinàries (EDOs) de primer ordre en forma normal:

$$y' = h(x, y),$$

on  $h : U \rightarrow \mathbb{R}$  és una funció “suficientment regular” en un obert  $U \subset \mathbb{R}^2$ . Busquem les seves solucions; és a dir, funcions derivables  $y(x)$  definides en un interval obert  $I \subset \mathbb{R}$  tals que

$$y'(x) = h(x, y(x)), \quad \forall x \in I.$$

A continuació, introduïm alguns conceptes:

- La *solució general* d'una EDO és el conjunt de totes les seves solucions;
- Qualsevol element de la solució general rep el nom de *solució particular*;
- Les solucions poden expressar-se en *forma explícita*:  $y = y(x)$  o *implícita*:  $U(x, y) = 0$ ; i
- Si una EDO de primer ordre no està en forma normal, podem intentar *normalitzar-la* (és a dir, aïllar la derivada  $y'$ ), tot i que aleshores poden aparèixer alguns *punts singulars* (és a dir, punts on la funció  $h(x, y)$  així obtinguda no és “suficientment regular”).

La solució general d'una EDO de primer ordre sol ser un conjunt de solucions que depèn d'una constant d'integració  $c \in \mathbb{R}$  que queda lliure. Aquesta constant s'acostuma a determinar imposant que la solució de l'equació compleixi una *condició inicial* (*c. i.*) de la forma

$$y(x_0) = y_0.$$

Direm que  $x_0$  és el *punt inicial* i que  $y_0$  és el *valor inicial*.

**Teorema 1.1** (Teorema d'existència i unicitat per a EDOs de primer ordre). *Si la funció  $h(x, y)$  és de classe  $C^1$  en un obert  $W \subset \mathbb{R}^2$  i  $(x_0, y_0) \in W$ , aleshores el problema de valor inicial (PVI)*

$$y' = h(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

*té exactament una solució local; és a dir, una única solució definida en un interval obert  $I \subset \mathbb{R}$  que conté al punt inicial  $x_0$ .*

A l'assignatura de *Càlcul 2* s'explica quan una funció  $h(x, y)$  és de classe  $C^1$  en un obert  $W \subset \mathbb{R}^2$ . Per als nostres propòsits actuals és suficient conèixer que les sumes, restes, productes, quocients i composicions de polinomis, exponencials, logaritmes i funcions trigonomètriques i hiperbòliques són de classe  $C^1$  en els seus corresponents dominis.

Només estudiem les EDOs de primer ordre llistades a la taula següent.

A continuació expliquem com s'obtenen aquestes solucions.

EDO	Tipus	Solució general	Solució del PVI
$y' = f(x)$	Càlcul de primitiva	$y(x) = F(x) + c$	$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t)dt$
$g(y)y' = f(x)$	EDO separable	$G(y) = F(x) + c$ (en forma implícita)	$\int_{y_0}^y g(s)ds = \int_{x_0}^x f(t)dt$ (en forma implícita)
$y' = a(x)y$	EDO lineal homogènia	$y_h(x) = ce^{A(x)}$	$y(x) = y_0 \exp\left(\int_{x_0}^x a(t)dt\right)$
$y' = a(x)y + b(x)$	EDO lineal no homogènia	$y_g(x) = y_h(x) + y_p(x)$ $y_p(x) = V(x)e^{A(x)}$ $V(x) = \int e^{-A(x)}b(x)dx$	Es determina $c \in \mathbb{R}$ imposant la c. i. $y(x_0) = y_0$
$P(x, y) + Q(x, y)y' = 0$ amb $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$	EDO exacta	$U(x, y) = c$ on $\frac{\partial U}{\partial x} = P$ i $\frac{\partial U}{\partial y} = Q$ (en forma implícita)	$U(x, y) = U(x_0, y_0)$ (en forma implícita)

Taula 1: Les EDOs de primer ordre més simples i les seves solucions. Les funcions  $F(x)$ ,  $G(y)$  i  $A(x)$  són primitives arbitràries de les funcions  $f(x)$ ,  $g(y)$  i  $a(x)$ .

Comencem per l'equació  $y' = f(x)$ , que té com a solucions, per definició, les primitives de  $f$ . La seva solució general és  $y(x) = F(x) + c$ , perquè les primitives de  $f$  difereixen entre elles en una constant d'integració. També podem utilitzar la notació  $y' = \frac{dy}{dx}$  i operar amb els diferencials  $dy$  i  $dx$ :

$$y' = f(x) \Leftrightarrow dy = f(x)dx \Leftrightarrow y = \int dy = \int f(x)dx = F(x) + c.$$

Imposant la condició inicial  $y(x_0) = y_0$ , la constant de integració és  $c = y_0 - F(x_0)$ , per tant

$$y(x) = y_0 + F(x) - F(x_0) = y_0 + \left[F(t)\right]_{t=x_0}^{t=x} = y_0 + \int_{x_0}^x f(t)dt.$$

Operem de nou amb els diferencials per obtenir la solució general de l'EDO separable:

$$g(y)y' = f(x) \Leftrightarrow g(y)dy = f(x)dx \Leftrightarrow G(y) = \int g(y)dy = \int f(x)dx = F(x) + c.$$

Imposant la condició inicial  $y(x_0) = y_0$ , la constant d'integració és  $c = G(y_0) - F(x_0)$ , per tant

$$\int_{y_0}^y g(s)ds = \left[G(s)\right]_{s=y_0}^{s=y} = G(y) - G(y_0) = F(x) - F(x_0) = \left[F(t)\right]_{t=x_0}^{t=x} = \int_{x_0}^x f(t)dt.$$

**Exemple 1.1.** Considerem l'EDO de primer ordre separable  $yy' + x = 0$ . No està en forma normal, però podem normalitzar-la:

$$y' = h(x, y) = -x/y.$$

La funció  $h(x, y) = -x/y$  no està definida en  $y = 0$ . Per tant, l'EDO és singular en la recta  $\{y = 0\}$  i treballarem en l'obert  $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\}$ . Resolem l'EDO:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \Leftrightarrow y^2/2 = \int ydy = -\int xdx = -x^2/2 + c, \quad c \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x^2 + y^2 = r^2, \quad r^2 = 2c > 0.$$

Aquesta és la solució general en forma implícita. Les corbes obtingudes són circumferències centrades en l'origen. En aquest cas, no resulta difícil aïllar la funció incògnita  $y = y(x)$  en la relació implícita per obtenir la solució general en forma explícita:

$$y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}, \quad x \in I = (-r, r), \quad r > 0.$$

Constatem que la forma explícita deixa d'estar ben definida quan les circumferències-solució intersequen a la recta de punts singulars. ♡

**Teorema 1.2.** Si  $A(x)$  és una primitiva de  $a(x)$  i  $V(x)$  és una primitiva de  $e^{-A(x)}b(x)$ , aleshores:

1.  $y_h(x) = ce^{A(x)}$ ,  $c \in \mathbb{R}$ , és la solució general de l'EDO lineal homogènia  $y' = a(x)y$ .
2.  $y(x) = y_0 \exp\left(\int_{x_0}^x a(t)dt\right)$  és la solució del PVI lineal homogeni  $y' = a(x)y$ ,  $y(x_0) = y_0$ .
3.  $y_p(x) = V(x)e^{A(x)}$  és una solució particular de l'EDO lineal no homogènia  $y' = a(x)y + b(x)$ .
4.  $y_g(x) = y_h(x) + y_p(x)$  és la solució general de l'EDO lineal no homogènia  $y' = a(x)y + b(x)$ .

*Demostració.*

1. L'EDO lineal homogènia  $y' = a(x)y$  és un cas especial d'EDO separable:

$$y' = a(x)y \Leftrightarrow \ln|y| = \int \frac{dy}{y} = \int a(x)dx = A(x) + k, \quad k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow y(x) = ce^{A(x)}, \quad c = \pm e^k \neq 0.$$

La funció  $y(x) \equiv 0$  també és una solució de l'EDO, de manera que podem treure la restricció  $c \neq 0$  i dir que  $c \in \mathbb{R}$ . Veiem on l'hem perdut, per a què no torni a passar. El problema ha estat dividir per  $y$ , la qual cosa requereix estudiar el cas  $y = 0$  per separat. A partir d'ara, cada vegada que resollem una EDO separable tindrem cura de no perdre cap solució pel camí. Finalment, comprovem que no ens hem deixat cap altra solució. Si  $y(x)$  és una solució qualsevol de l'EDO lineal homogènia  $y' = a(x)y$ , aleshores

$$(e^{-A(x)}y(x))' = -A'(x)e^{-A(x)}y(x) + e^{-A(x)}y'(x) = (-a(x)y(x) + a(x)y(x))e^{-A(x)} \equiv 0.$$

Això implica que  $e^{-A(x)}y(x)$  és constant, de manera que  $y(x) = ce^{A(x)}$  per a alguna  $c \in \mathbb{R}$ .

2. Imposant la c. i.  $y(x_0) = y_0$ , veiem que  $c = y_0e^{-A(x_0)}$ . Per tant, la solució del PVI és

$$y(x) = y_0 \exp(A(x) - A(x_0)) = y_0 \exp\left(\left[A(t)\right]_{t=x_0}^{t=x}\right) = y_0 \exp\left(\int_{x_0}^x a(t)dt\right).$$

3.  $y_p'(x) = V'(x)e^{A(x)} + V(x)A'(x)e^{A(x)} = e^{-A(x)}b(x)e^{A(x)} + V(x)a(x)e^{A(x)} = a(x)y_p(x) + b(x)$ .
4. És suficient observar que  $y(x)$  és una solució de l'EDO lineal no homogènia  $y' = a(x)y + b(x)$  si i només si  $z(x) = y(x) - y_p(x)$  és una solució de l'EDO lineal homogènia  $z' = a(x)z$ . □

**Exemple 1.2.** La solució general de l'EDO lineal homogènia  $y' = y/x$ , definida en  $x > 0$ , és

$$y_h(x) = c \exp\left(\int \frac{dx}{x}\right) = c \exp(\ln x) = cx, \quad c \in \mathbb{R}. \quad \heartsuit$$

**Exemple 1.3.** Resoldre el PVI format per l'EDO lineal homogènia  $y' = \lambda y$  i la c. i.  $y(x_0) = y_0$ .

La solució del PVI és  $y_h(x) = y_0 \exp\left(\int_{x_0}^x \lambda dt\right) = y_0 e^{\lambda(x-x_0)}$ . ♡

**Exemple 1.4.** Resoldre el PVI format per l'EDO lineal no homogènia  $y' = \lambda y + b$  i la c. i.  $y(x_0) = y_0$ .

- *Pas 1: Resoldre l'EDO lineal homogènia.* La solució general de  $y' = \lambda y$  és

$$y_h(x) = ce^{\int \lambda dx} = ce^{\lambda x}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

- *Pas 2: Trobar una solució particular.* Com  $A(x) = \lambda x$  és una primitiva de  $a(x) \equiv \lambda$ ,

$$V(x) = \int e^{-\lambda x} b dx = -be^{-\lambda x}/\lambda.$$

Per tant,  $y_p(x) = V(x)e^{A(x)} = -b/\lambda$  és una solució particular de l'EDO lineal no homogènia.

- *Pas 3: Imposar la c.i.* La solució general de l'EDO lineal no homogènia és

$$y_g(x) = y_h(x) + y_p(x) = ce^{\lambda x} - b/\lambda, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Imposant que  $y(x_0) = y_0$ , veiem que  $c = (y_0 + b/\lambda)e^{-\lambda x_0}$ , de manera que

$$y(x) = (y_0 + b/\lambda)e^{\lambda(x-x_0)} - b/\lambda$$

és la solució del PVI. ♥

**Exercici 1.1.** Les fórmules de l'exemple 1.4 no són vàlides quan  $\lambda = 0$ . Provar que si  $y(x)$  és la solució trobada en aquell exemple, aleshores  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} y(x) = y_0 + b(x - x_0)$ . Comprovar que el límit anterior és la solució del PVI  $y' = b$ ,  $y(x_0) = y_0$ .

**Definició 1.1.** L'EDO  $P(x, y) + Q(x, y)y' = 0$  és *exacta* quan  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ .

La notació anterior  $\partial$  (derivada parcial) per a funcions de vèries variables substitueix a la derivada per a funcions d'una variable. A l'assignatura de *Càlcul 2* es defineixen les derivades parcials. Per als nostres propòsits actuals és suficient conèixer que la derivada parcial respecte una variable es determina derivant respecte aquesta variable, considerant la resta de variables constants.

**Exemple 1.5.** L'EDO  $P(x, y) + Q(x, y)y' = 0$ ,  $P(x, y) = 2x + 1/y$  i  $Q(x, y) = 1/y - x/y^2$ , és exacta:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{1}{y^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

La solució general en forma implícita de l'EDO exacta  $P(x, y) + Q(x, y)y' = 0$  és

$$U(x, y) = c,$$

on  $U(x, y)$  es *qualsevol* funció que compleix les condicions  $\frac{\partial U}{\partial x} = P$  i  $\frac{\partial U}{\partial y} = Q$ . Efectivament. Derivant implícitament la relació  $U(x, y) = c$  respecte la variable  $x$ , veiem que

$$P(x, y) + Q(x, y)y' = \frac{\partial U}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial U}{\partial y}(x, y)y' = \frac{d}{dx}[U(x, y)] = \frac{d}{dx}[c] = 0.$$

**Exemple 1.6.** Per resoldre l'EDO exacta de l'exemple anterior, busquem una funció  $U(x, y)$ .

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial x} = P = 2x + 1/y &\Rightarrow U(x, y) = \int (2x + 1/y) dx = x^2 + x/y + k(y) \\ \Rightarrow k'(y) - x/y^2 = \frac{\partial U}{\partial y} = Q = 1/y - x/y^2 &\Rightarrow k'(y) = 1/y \\ \Rightarrow k(y) = \int \frac{dy}{y} = \ln |y| &\Rightarrow U(x, y) = x^2 + x/y + \ln |y|.\end{aligned}$$

Per tant, la solució general en forma implícita de l'EDO és  $x^2 + x/y + \ln |y| = c$ ,  $c \in \mathbb{R}$ . ♡

Poques EDOs de la forma  $P(x, y) + Q(x, y)y' = 0$  són exactes, però algunes es poden convertir en exactes si les multipliquem per un factor adequat.

**Definició 1.2.** Una funció  $\mu(x, y)$  és un *factor integrant* de l'EDO  $P + Qy' = 0$  quan l'EDO  $\mu P + \mu Qy' = 0$  és exacta, és a dir, quan  $\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x}$ .

En general, trobar factors integrants d'una EDO donada és una tasca titànica, però es simplifica molt quan el factor integrant només depèn d'una variable:

1. Si  $K = \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}$  no depèn de  $y$ , llavors  $\mu(x) = e^{\int K(x) dx}$  és un factor integrant.
2. Si  $K = \frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{P}$  no depèn de  $x$ , llavors  $\mu(y) = e^{\int K(y) dy}$  és un factor integrant.

**Exemple 1.7.** Resoldre el PVI  $y^2/2 + 2ye^x + (y + e^x)y' = 0$ ,  $y(0) = -2$ , sabent que l'EDO associada admet un factor integrant de la forma  $\mu = \mu(x)$ . Expressen la solució en forma explícita.

En aquest cas,  $P(x, y) = y^2/2 + 2ye^x$  i  $Q(x, y) = y + e^x$ . La funció

$$K(x) = \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} = \frac{y + 2e^x - e^x}{y + e^x} \equiv 1$$

no depèn de  $y$ . Llavors  $\mu(x) = e^{\int dx} = e^x$  és un factor integrant i l'EDO  $\tilde{P}(x, y) + \tilde{Q}(x, y)y' = 0$ , amb

$$\tilde{P}(x, y) = \mu(x)P(x, y) = e^x y^2/2 + 2e^{2x}y, \quad \tilde{Q}(x, y) = \mu(x)Q(x, y) = e^x y + e^{2x},$$

és exacta. Finalment, busquem una funció  $U(x, y)$  adequada:

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial x} = \tilde{P} = e^x y^2/2 + 2e^{2x}y &\Rightarrow U(x, y) = \int (e^x y^2/2 + 2e^{2x}y) dx = e^x y^2/2 + e^{2x}y + k(y) \\ \Rightarrow e^x y + e^{2x} + k'(y) = \frac{\partial U}{\partial y} = \tilde{Q} = e^x y + e^{2x} &\Rightarrow k'(y) = 0 \\ \Rightarrow k(y) = \int 0 dy = 0 &\Rightarrow U(x, y) = e^x y^2/2 + e^{2x}y.\end{aligned}$$

Per tant, la solució general en forma implícita de l'EDO és  $e^x y^2/2 + e^{2x}y = c$ ,  $c \in \mathbb{R}$ . Finalment, determinen la constant d'integració imposant la condició inicial:

$$(x_0, y_0) = (0, -2) \Rightarrow e^x y^2/2 + e^{2x}y = e^{x_0} y_0^2/2 + e^{2x_0} y_0 = 2 - 2 = 0 \Rightarrow y(x) = -2e^x. \quad \heartsuit$$

Acabem aquest tema amb una llista molt incompleta d'aplicacions on apareixen EDOs de primer ordre com les aquí descrites:

- Calcular el temps que triga un compost granular en disoldre's;
- Calcular la semivida de materials radioactius;
- Datar mostres pel mètode del Carboni-14;
- Calcular el temps que triga en buidar-se un dipòsit de líquid amb un petit forat;
- Calcular la concentració d'un contaminant en un llac; i
- Calcular la velocitat terminal d'un paracaigudista.

Totes aquestes aplicacions estan descrites a la llista de problemes del tema.