Càlcul II / Transformada de Laplace

1 de setembre de 2015

Definicions. Exemples bàsics

Definició Donada $f:]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ contínua a $]0,+\infty[$.

1) Se'n diu la seva transformada de Laplace (o $\mathcal{L}$-transformada) a la funció $\mathcal{L}[f]$ depenent d'un paràmetre $s \in \mathbb{R}$ mitjançant

$$(*) \qquad \mathcal{L}[f(t)](s) \equiv F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\, dt$$

sempre i quan aquesta integral impròpia sigui convergent per a algun valor del paràmetre s (en cas contrari direm que no existeix la $\mathcal{L}$-transformada de f).

2) Aleshores, el domini de definició de $\mathcal{L}[f]$ és el conjunt dels valors de $s \in \mathbb{R}$ per als quals la integral impròpia (*) anterior és convergent.

Exemple

1) Essent $f(t) = 1$, per a tot $s > 0$ és:

$$\mathcal{L}[1](s) = \int_0^{+\infty} e^{-st}\, dt = \left[-\frac{e^{-st}}{s} \right]_{t=0}^{t=+\infty} = \frac{1}{s}$$

Clarament, la corresponent integral impròpia és divergent per a $s \leq 0$.

2) Essent $f(t) = e^t$, per a tot $s > 1$, és

$$\mathcal{L}\left[e^t\right](s) = \int_0^{+\infty} e^t e^{-st}\, dt = \left[\frac{e^{(1-s)t}}{1-s} \right]_{t=0}^{t=+\infty} = \frac{1}{s-1}$$

Clarament, la corresponent integral impròpia és divergent per a $s \leq 1$.

3) Essent $f(t) = 1/\sqrt{t}$, per a tot $s > 0$, fent el canvi de variable $st = z$, s'obté:

$$\mathcal{L}\left[\frac{1}{\sqrt{t}}\right](s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} \frac{1}{\sqrt{t}}\, dt = \int_0^{+\infty} e^{-z} \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{z}} \frac{dz}{s} = \frac{1}{\sqrt{s}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

on $\Gamma(x) \equiv \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$ és la funció Gamma d'Euler, que té la propietat següent: $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. En particular per $n \in N$ tenim

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = \ldots = n(n-1)\ldots 1 \times \Gamma(1) = n(n-1)\ldots 1 = n!,$$

ja que $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = 1$. En particular $0! = \Gamma(1) = 1$, de fet podem definir $\forall x > -1$ $x! \equiv \Gamma(x+1)$.

Finalment calculem $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$. Si fem el canvi de variable $t = x^2$ tindrem

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx,$$

per tant,

$$\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx\right)^2 = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dxdy.$$

Finalment, canviem a polars per obtenir

$$\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right) = \pi \int_0^\infty 2e^{-r^2} dr = \pi,$$

Per tant,

$$\mathcal{L}\left[\frac{1}{\sqrt{t}}\right](s) = \sqrt{\frac{\pi}{s}}.$$

4) No existeixen $\mathcal{L}[\frac{1}{t}]$ ni $\mathcal{L}[e^{t^2}]$ ja que, qualsevol que sigui $s \in \mathbb{R}$, les integrals impròpies

$$\int_0^{+\infty} e^{-st}\frac{1}{t}dt\,, \qquad \int_0^{+\infty} e^{-st}e^{t^2}dt$$

són divergents (en 0 i en $+\infty$ respectivament).

Proposició
Per a qualsevol $a, b \in \mathbb{R}$ i $p \in \mathbb{N}$, es tenen les següents $\mathcal{L}$-transformades:

$$\mathcal{L}[e^{at}] = \frac{1}{s-a}, s > a \qquad \mathcal{L}[t^p] = \frac{p!}{s^{p+1}}, s > 0$$

$$\mathcal{L}[\sin bt] = \frac{b}{s^2+b^2}, s > 0 \qquad \mathcal{L}[\cos bt] = \frac{s}{s^2+b^2}, s > 0$$

Observació: Noti's que $D^p\mathcal{L}[1](s) = (-1)^p\mathcal{L}[t^p](s)$. D'altra banda
$D^p\mathcal{L}[1](s) = (-1)^pD^p\left(\frac{1}{s}\right) = (-1)^p\frac{p!}{s^{p+1}}$. I s'obté la transformada de t^p.
I si usem que $\mathcal{L}[\frac{d^2}{dt^2}\sin bt] = -b^2\mathcal{L}[\sin bt]$, i fem integració dues vegades per parts per arrivar a

$$\mathcal{L}[\frac{d^2}{dt^2}\sin bt] = -b + s^2\mathcal{L}[\sin bt],$$

obtenim la transformada de $\sin bt$.
Exercicis

1) Per a $\alpha > -1$, és: $\mathcal{L}[t^\alpha] = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}, \quad s > 0\,.$

2) $\mathcal{L}[\ln t] = \dfrac{\Gamma'(1) - \ln s}{s}, \quad s > 0.$

*** Existència: Funcions d'ordre exponencial**
Proposició
Sigui $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ contínua a $]0, +\infty[$, i tal que

(i) existeixen γ, M i t_0 tals que:

$$|e^{-\gamma t}f(t)| \leq M \Longleftrightarrow |f(t)| \leq Me^{\gamma t}\,, \quad \text{per a tot} \quad t > t_0$$

Aleshores $\mathcal{L}[f]$ és ben definida per a $s > \gamma$.
Es diu que tota f que cumpleix (i) és "d'ordre exponencial" γ a $+\infty$.
Exemples

(1) La funció e^{at} verifica (i) per a tot $\gamma \geq a$. Doncs, és d'ordre exponencial a, i per tant la proposició anterior garanteix que $\mathcal{L}[e^{at}]$ és ben definida per a $s > a$.

(2) Les funcions polinòmiques verifiquen (i) per a tot $\gamma > 0$. Doncs, les seves $\mathcal{L}$-transformades són ben definides per a $s > 0$.

(3) La funció e^{t^2} NO compleix la condició (i) anterior.

(4) Les funcions e^{t^2}, $\Gamma(t)$, t^t no són d'ordre exponencial.

(5) La funció $f(t)$ definida per $f(p) = p!$, si $p \in \mathbb{N}$, i $f(p) = 0$, si $p \notin \mathbb{N}$, no és d'ordre exponencial, però té $\mathcal{L}$-transformada (que és 0).

Linealitat
De la linealitat de la integració és dedueix immediatament:
Proposició
Si $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$i $\mathcal{L}[g(t)] = G(s)$, aleshores:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f(t) + g(t)] &= F(s) + G(s) \\ \mathcal{L}[\lambda f(t)] &= \lambda F(s) \end{aligned}$$

per a tot $\lambda \in \mathbb{R}$.
Exemple
Per a tot $b \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\sinh bt] &= \frac{b}{s^2 - b^2}\,, \qquad s > |b| \\ \mathcal{L}[\cosh bt] &= \frac{s}{s^2 - b^2}\,, \qquad s > |b| \end{aligned}$$

Canvi d'escala
Un simple canvi de variables demostra que:
Proposcició
Si $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, aleshores per a tot $a > 0$:

$$\mathcal{L}[f(at)] = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right) .$$

Exemple
Segons (10.5), és clar que $\mathcal{L}[2^p t^p] = 2^p \frac{p!}{s^{p+1}}$. Vegem com el mateix resultat pot obtenir-se per la propietat anterior:

$$\mathcal{L}[2^p t^p] = \mathcal{L}[(2t)^p] = \frac{1}{2}\mathcal{L}[t^p]\left(\frac{s}{2}\right) = \frac{1}{2}\frac{p!}{(s/2)^{p+1}} = 2^p \frac{p!}{s^{p+1}} .$$

Teoremes de translació
És igualment trivial que:
Proposició
Si $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, aleshores:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[e^{-at} f(t)] &= F(s + a)\,, \quad \text{per a tot} \quad a \in \mathbb{C} \\ \mathcal{L}[f(t - a)\mathcal{U}(t - a)] &= e^{-as} F(s)\,, \quad \text{per a tot} \quad a > 0 \end{aligned}$$

Observació
A la proposició anterior, $\mathcal{U}(t - a)$ és la funció *esgraó unitari en* a, definida per

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(t - a) &= 0\,, \quad \text{si} \quad t < a \\ \mathcal{U}(t - a) &= 1\,, \quad \text{si} \quad t > a \end{aligned}$$

Per conveni, fins i tot si f només està definida en $]0, +\infty[$, se suposa:

$$f(t - a)\mathcal{U}(t - a) = 0\,, \quad \text{si} \quad t < a$$

Exemple

(1) $\mathcal{L}[e^{-t}\sqrt{t}] = \mathcal{L}[\sqrt{t}](s + 1) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{s+1}^3}$.

(2) Sigui $f(t) = \sqrt{t - 1}$, la qual suposarem perllongada per 0 si $t < 1$. Podem escriure, doncs: $f(t) = \sqrt{t - 1}\mathcal{U}(t - 1)$. Per tant:

$$\mathcal{L}[\sqrt{t - 1}] \equiv \mathcal{L}[\sqrt{t - 1}\mathcal{U}(t - 1)] = e^{-s}\mathcal{L}[\sqrt{t}] = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{e^{-s}}{\sqrt{s}^3}$$

(3) Considerem $f(t)$ definifa per:

$$\begin{aligned} f(t) &= \sin t\,, && \text{si } 0 < t < 2\pi \\ f(t) &= 0\,, && \text{si } t > 2\pi \end{aligned}$$

Per a calcular $\mathcal{L}[f]$ observem que:

$$f(t) = \sin t - \sin t\mathcal{U}(t-2\pi) = \sin t - \sin(t-2\pi)\mathcal{U}(t-2\pi)$$

Per tant:

$$\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[\sin t] - e^{-2\pi s}\mathcal{L}[\sin t] = (1-e^{-2\pi s})\frac{1}{s^2+1}$$

Exercici Proveu que:

$$\mathcal{L}\left[\frac{\cos bt}{\sqrt{t}}\right] = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{\sqrt{s^2+b^2}+s}{s^2+b^2}}$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{\sin bt}{\sqrt{t}}\right] = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{\sqrt{s^2+b^2}-s}{s^2+b^2}}$$

HINT: useu que $\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ i $\sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$. A més s'ha d'usar que

$$\left(\sqrt{s+ib} \pm \sqrt{s-ib}\right)^2 = 2s \pm 2\sqrt{s^2+b^2}.$$

Transformades de derivades i integrals
Operant per parts, es demostra fàcilment:
Proposició
Essent $f : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ k vegades derivable en $[0,+\infty[$, aleshores

$$\mathcal{L}[D^k f](s) = s^k F(s) - s^{k-1}f(0) - s^{k-2}f'(0) - \ldots - D^{k-1}f(0),$$

on $F \equiv \mathcal{L}[f]$.
Exemple Es pot calcular $\mathcal{L}[\sin bt]$, $\mathcal{L}[\cos bt]$ aplicant la proposició anterior per a $k=2$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[-b^2\sin bt] &= s^2\mathcal{L}[\sin bt] - b \\ \mathcal{L}[-b^2\cos bt] &= s^2\mathcal{L}[\cos bt] - s \end{aligned}$$

Corol.lari
Si $\mathcal{L}[f] = F(s)$, aleshores:

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right] = \frac{F(s)}{s}$$

Exemple $\mathcal{L}\left[\int_0^t e^{-\tau}\sqrt{\tau}d\tau\right] = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{1}{s\sqrt{s+1}^3}$.
Transformada del producte i divisió per un monomi
Derivant respecte al paràmetre subintegral s, resulta:
Proposició Si $\mathcal{L}[f] = F(s)$, aleshores:

$$\mathcal{L}[t^p f(t)] = (-1)^p D^p F(s)\,.$$

Es veu derivant p vegades $F(s)$.
Corol.lari Si existeix $\lim\limits_{0^+} \dfrac{f(t)}{t}$, aleshores:

$$\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int_s^{+\infty} F(\sigma)d\sigma\,.$$

es veu derivant $\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right](s)$ i desprès integrant.
Exemples

(1) $\mathcal{L}[t^2 \sin bt] = (-1)^2 D^2 \frac{b}{s^2+b^2} = D\frac{-2bs}{(s^2+b^2)^2} = \frac{6bs^2-2b^3}{(s^2+b^2)^3}$

(2) $\mathcal{L}\left[\frac{\sin bt}{t}\right] = \int_s^{+\infty} \frac{b}{\sigma^2+b^2} d\sigma = \left[-\arctan\frac{b}{\sigma}\right]_s^{+\infty} = \arctan\frac{b}{s}$

Transformada de la convolució

Definició Essent $f, g :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, se'n diu el seu producte de convolució, $f * g$, la funció definida mitjançant

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau\,, \quad t > 0$$

si aquesta integral existeix.

Exemple

(1) Per a tot $t > 0$, fent el canvi $z = \tau/t$, resulta:

$$\frac{1}{\sqrt{t}} * \frac{1}{\sqrt{t}} = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\tau}}\frac{1}{\sqrt{t-\tau}}d\tau = B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \pi\,, \quad t > 0$$

(2) Anàlogament:

$$t^{p-1} * t^{q-1} = B(p,q)t^{p+q-1},$$

on $B(x,y) \equiv \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$ és la funció Beta d'Euler.

Observació Es demostra que el producte de convolució és commutatiu i associatiu.

Teorema Si f, g, i també $|f|$ i $|g|$, tenen $\mathcal{L}$-transformada, aleshores també en té la seva convolució $f * g$, i resulta:

$$\mathcal{L}[f * g] = \mathcal{L}[f]\mathcal{L}[g]$$

Exemple Verifiquem aquesta fórmula per a $f(t) = t^{p-1}$, $g(t) = t^{q-1}$:

$$\mathcal{L}[t^{p-1} * t^{q-1}] = \mathcal{L}[B(p,q)t^{p+q-1}] =$$
$$= B(p,q)\frac{(p+q-1)!}{t^{p+q}} = \frac{(p-1)!(q-1)!}{t^{p+q}}$$
$$\mathcal{L}[t^{p-1}]\mathcal{L}[t^{q-1}] = \frac{(p-1)!}{t^p}\frac{(q-1)!}{t^q}$$

*** Transformada d'una funció periòdica**

És fàcil demostrar que per a funcions periòdiques, el càlcul de la $\mathcal{L}$-transformada es redueix a una integral pròpia:

Proposició Sigui $f :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ T-periòdica (és a dir: $f(t+T) = f(t)$, per a tot $t > 0$), contínua a trossos en $[0, T]$. Aleshores f té $\mathcal{L}$-transformada i ve donada per:

$$\mathcal{L}[f](s) \equiv F(s) = \frac{1}{1-e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} f(t)dt$$

Exemple

$$\mathcal{L}[|\sin x|] = \frac{1}{1-e^{-s\pi}} \int_0^\pi e^{-st} \sin t dt = \frac{1+e^{-\pi s}}{1-e^{-\pi s}}\frac{1}{s^2+1}$$

*** Transformada per desenvolupament en sèrie**

Donada una funció suma d'una sèrie de potències

$$(*) \qquad f(t) = \sum_0^\infty a_p t^p = a_0 + a_1 t + \ldots + a_p t^p + \ldots$$

és plantegen criteris sobre el coeficient a_p per tal que f tingui $\mathcal{L}$-transformada, i pugui ésser obtinguda "terme a terme", és a dir, per tal que

$$(**) \qquad F(s) \equiv \mathcal{L}[f(t)] = \sum_0^\infty a_p \mathcal{L}[t^p] = \sum_0^\infty a_p \frac{p!}{s^{p+1}} =$$
$$= \frac{a_0}{s} + \frac{a_1}{s^2} + \frac{2!a_2}{s^3} + \ldots + \frac{p!a_p}{s^{p+1}} + \ldots$$

Proposició Amb les notacions anteriors:

(1) Una condició necessària per a (**) és que la sèrie (*) convergeixi per a tot $t \in \mathbb{R}$ (radi de convergència $r = +\infty$), és a dir:

$$\limsup \sqrt[p]{|a_p|} = 0$$

(2) Aleshores, una condició suficient per a que f sigui d'ordre exponencial i es verifiqui (**), és que aquesta sèrie convergeixi per a algun valor de $s > 0$, és a dir:

$$\limsup \sqrt[p]{p!|a_p|} = L \neq +\infty$$

Observacions Recordem que les condicions (1) i (2) anteriors es compleixen, respectivament, si:

(1') $\lim \left| \dfrac{a_{p+1}}{a_p} \right| = 0$

(2') $\lim (p+1) \left| \dfrac{a_{p+1}}{a_p} \right| = L \neq +\infty$

Exemples

(1) La funció $f(t) = \dfrac{1}{1+t}$, $t \geq 0$ té com $\mathcal{L}$-transformada

$$F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} \frac{dt}{1+t}, \quad s > 0$$

Però no podem procedir $\mathcal{L}$-transformant "terme a terme" el desenvolupament en sèrie de $f(t)$

$$f(t) = 1 - t + t^2 - \ldots + (-1)^p t^p + \ldots$$

ja que resultaria

$$\frac{1}{s} - \frac{1!}{s^2} + \frac{2!}{s^3} - \ldots + (-1)^p \frac{p!}{s^{p+1}} + \ldots$$

que no convergeix per a cap $s > 0$ (i per tant, no pot representar $F(s)$).

Observem que, en efecte, no es compleix la condició necessària (1) de la proposició anterior, ja que el desenvolupament en sèrie de $f(t)$ té radi de convergència $r = 1$.

(2) El desenvolupament en sèrie de la funció

$$f(t) = e^{t^2} = 1 + t^2 + \frac{t^4}{2!} + \ldots + \frac{t^{2p}}{p!} + \ldots$$

és vàlid per a tot $t \in \mathbb{R}$, però e^{t^2} no té $\mathcal{L}$-transformada.

En efecte, la sèrie que resultaria de $\mathcal{L}$-transformar "terme a terme" la anterior

$$\frac{1}{s} + \frac{2!}{s^3} + \frac{1}{2!}\frac{4!}{s^5} + \ldots + \frac{1}{p!}\frac{(2p)!}{s^{2p+1}} + \ldots$$

no convergeix per a cap $s > 0$.

(3) El desenvolupament en sèrie de

$$f(t) = \frac{\sin\sqrt{t}}{\sqrt{t}} = 1 - \frac{t}{3!} + \frac{t^2}{5!} - \ldots + (-1)^p \frac{t^p}{(2p+1)!} + \ldots$$

és vàlid per a tot $t \in \mathbb{R}$. A més,

$$\lim (p+1) \frac{(1/(2p+3)!)}{(1/(2p+1)!)} = \lim \frac{(p+1)}{(2p+3)(2p+2)} = 0$$

Per tant, és $\mathcal{L}$-transformable, i:

$$\mathcal{L}\left[\frac{\sin\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\right] = \frac{1}{s} - \frac{1}{3!}\frac{1}{s^2} + \frac{1}{5!}\frac{2!}{s^3} - \ldots + (-1)^p \frac{1}{(2p+1)!}\frac{p!}{s^{p+1}} + \ldots$$

(4) Aplicant l'exemple (2) de la secció "transformada del producte i divisió per un monomi", obtenim:

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t \frac{\sin b\tau}{\tau}d\tau\right] = \frac{1}{s}\arctan\frac{b}{s}$$

Podem reobtenir el mateix resultat per desenvolupament en sèrie:

$$f(t) = \int_0^t \frac{\sin b\tau}{\tau}d\tau = bt - \frac{b^3t^3}{3!3} + \ldots + (-1)^p\frac{b^{2p+1}t^{2p+1}}{(2p+1)!(2p+1)} + \ldots$$

vàlid per a tot $t \in \mathbb{R}$. Si $\mathcal{L}$-transformem "terme a terme":

$$\begin{aligned} &b\frac{1}{s^2} - \frac{b^3}{3!3}\frac{3!}{s^4} + \ldots + (-1)^p\frac{b^{2p+1}}{(2p+1)!(2p+1)}\frac{(2p+1)!}{s^{2p+2}} + \ldots = \\ &= \frac{1}{s}\left(\frac{b}{s} - \frac{(b/s)^3}{3} + \ldots + (-1)^p\frac{(b/s)^{2p+1}}{2p+1} + \ldots\right) = \frac{1}{s}\arctan\frac{b}{s} \end{aligned}$$

Observem que, de fet es compleix la condició suficient (2) de la proposició anterior, ja que aquesta darrera sèrie convergeix per a $|s| > b$.

Transformada inversa
Les propietats següents resulten molt útils per a les aplicacions:
Proposició Si $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, aleshores:

$$\begin{aligned} \lim_{0^+} f(t) &= \lim_{+\infty} sF(s) \\ \lim_{+\infty} f(t) &= \lim_{0} sF(s) \end{aligned}$$

si existeixen els límits en qüestió.

Es veu, a partir de la fórmula $\mathcal{L}\left[Df\right](s) = sF(s) - f(0)$.

Antitransformades de fraccions racionals

Pot ser calculada a partir del desenvolupament en sèrie de $F\left(\frac{1}{s}\right)$. Sovint és més útil procedir per descomposició en fraccions simples i aplicar després taules de $\mathcal{L}$-transformades; com en els exemples següents:

Exemples

(1)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-1)(s+2)(s+4)}\right] &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1/15}{s-1} + \frac{-1/6}{s+2} + \frac{1/10}{s+4}\right] = \\ &= \frac{1}{15}e^t - \frac{1}{6}e^{-2t} + \frac{1}{10}e^{-4t} \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+1}{s^2(s+2)^3}\right] &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-1/16}{s} + \frac{1/8}{s^2} + \frac{1/16}{s+2} + \frac{-1/4}{(s+2)^3}\right] = \\ &= -\frac{1}{16} + \frac{1}{8}t + \frac{1}{16}e^{-2t} - \frac{1}{8}t^2e^{-2t} \end{aligned}$$

3)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3s-2}{s^3(s^2+4)}\right] &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1/8}{s} + \frac{3/4}{s^2} + \frac{-1/2}{s^3} + \frac{(-s/8)+(-3/4)}{s^2+4}\right] = \\ &= \frac{1}{8} + \frac{3}{4}t - \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{8}\cos 2t - \frac{3}{8}\sin 2t \end{aligned}$$

Observacio En certs casos, hi ha alternatives més directes:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s^2+1)^2}\right] &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\frac{s}{s^2+1}\right] = (\sin t)*(\cos t) = \int_0^t \sin\tau\cos(t-\tau)d\tau = \\ &= \int_0^t \frac{\sin t+\sin(2t-\tau)}{2}d\tau = \frac{1}{2}\sin t[\tau]_0^t - \frac{1}{4}[\cos(2\tau-t)]_0^t = \frac{1}{2}t\sin t\,.\end{aligned}$$

O també:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s^2+1)^2}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[-\frac{1}{2}D\frac{1}{s^2+1}\right] = \frac{1}{2}t\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right] = \frac{1}{2}t\sin t\,.$$

Exemple: Com calculem $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s^2+4)^2}\right]$?
Tenim que

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s^2+4)^2}\right] = \sin(2t)*\sin(2t) = \int_0^t \sin(2\tau)\sin(2(t-\tau))d\tau.$$

Ara usem que $\sin(2\tau)\sin(2(t-\tau)) = \frac{1}{2}[\cos(4\tau-2t)-\cos(2t)]$. Per tant,

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s^2+4)^2}\right] = \frac{1}{4}\sin(2t) - \frac{1}{2}t\cos(2t).$$

*** Funció impuls unitari o Delta de Dirac, δ. La seva transformada.**

La *delta de Dirac* δ, és una "funció generalitzada" (o "distribució") molt útil per a modelitzar accions intenses instantànies (o de durada molt curta), com ara cops mecànics, impulsos elèctrics, etc. Resulta, doncs, intuïtiva la caracterització de δ mitjançant les dues propietats següents

$$\delta(0) = +\infty, \qquad \delta(t) = 0, \quad \text{si} \quad t \neq 0 \tag{1}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)dt = 1 \qquad \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)f(t)dt = f(0) \quad \forall\text{"}f \in \mathcal{C}^1\text{"}.$$

Fins ara ens hem referit a "impulsos" en l'instant $t = 0$. Per traslació es generalitza a $t = t_0$ qualsevol:

$$\delta(t-t_0) = +\infty, \quad \text{si } t = t_0; \qquad \delta(t-t_0) = 0, \quad \text{si } t \neq t_0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-t_0)dt = 1 \qquad \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-t_0)f(t)dt = f(t_0) \quad \forall\text{"}f \in \mathcal{C}^1\text{"}.$$

Propietat: $\mathcal{U}'(t-t_0) = \delta(t-t_0)$.
Exercici: Comproveu que $\mathcal{L}[\delta(t-a)] = e^{-as}$.

Taula de $\mathcal{L}$-transformades

Definició	
$f(t), \quad t > 0$	$F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt$
Propietats	
$f_1(t) + f_2(t)$	$F_1(s) + F_2(s)$
$\lambda f(t)$	$\lambda F(s)$
$f(at), \quad a > 0$	$(1/a)F(s/a)$
$e^{-at} f(t)$	$F(s+a)$
$f(t-a)\mathcal{U}(t-a), \quad a > 0$	$e^{-as}F(s)$
$D^N f(t)$	$s^N F(s) - s^{N-1}f(0) - s^{N-2}f'(0) - \ldots - D^{N-1}f(0)$
$t^N f(t)$	$(-1)^N D^N F(s)$
$\int_0^t f(\tau)d\tau$	$F(s)/s$
$f(t)/t$	$\int_s^{+\infty} F(\sigma)d\sigma$
$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$	$F_1(s)F_2(s)$
$f(t+T) = f(t)$	$F(s) = 1/(1-e^{-sT}) \int_0^T e^{-st} f(t)dt$
$\lim_{0^+} f(t) = \lim_{+\infty} sF(s)$; $\lim_{+\infty} f(t) = \lim_{0^+} sF(s)$	
Exemples	
$\delta(t)$	1
$\delta(t-a)$	e^{-as}
1	$1/s$
e^{at}	$1/(s-a)$
t^N	$N!/s^{N+1}$
t^α	$\Gamma(\alpha+1)/s^{\alpha+1}$
$\sin bt$	$b/(s^2+b^2)$
$\cos bt$	$s/(s^2+b^2)$
$\sinh bt$	$b/(s^2-b^2)$
$\cosh bt$	$s/(s^2-b^2)$
$(\sin bt - bt\cos bt)/(2b^3)$	$1/(s^2+b^2)^2$
$(bt\cosh bt - \sinh bt)/(2b^3)$	$1/(s^2-b^2)^2$
$(\sin bt)/t$	$\arctan(b/s)$
$\ln t$	$(\Gamma'(1) - \ln s)/s$