Càlcul II / Sèries de Fourier

1 de setembre de 2015

1 Funcions periòdiques contínues a trossos

Considerem un interval $[-T, T] \subset \mathbb{R}$, i funcions reals periòdiques de període $2T$. Quan es considerin funcions definides en $[-T, T]$ se suposaran "prolongades de forma periòdica" a tot $\mathbb{R}$.

En tot el tema indicarem per $CT[-T, T]$ el conjunt d'aquestes funcions "contínues a trossos" en $[-T, T]$, és a dir, contínues en tot punt d'aquest interval llevat, com a màxim, d'un nombre finit de punts on presenten discontinuïtats evitables o de salt.

2 Ortogonalitat del conjunt de funcions $\{\sin \frac{n\pi}{T}x, \cos \frac{m\pi}{T}x\}$

Considerem un interval $[-T, T] \subset \mathbb{R}$, i el conjunt de funcions

$$(*) \qquad 1, \sin \frac{\pi}{T}x, \cos \frac{\pi}{T}x, \sin \frac{2\pi}{T}x, \cos \frac{2\pi}{T}x, \ldots$$

Es verifica:

Proposició

(i) $\displaystyle\int_{-T}^{T} \sin \frac{n\pi}{T}x \sin \frac{m\pi}{T}x dx = 0$, per a tot $n \neq m$.

$\displaystyle\int_{-T}^{T} \cos \frac{n\pi}{T}x \cos \frac{m\pi}{T}x dx = 0$, per a tot $n \neq m$.

$\displaystyle\int_{-T}^{T} \sin \frac{n\pi}{T}x \cos \frac{m\pi}{T}x dx = 0$, per a tot n, m.

(ii) $\displaystyle\int_{-T}^{T} \sin^2 \frac{n\pi}{T}x dx = \int_{-T}^{T} \cos^2 \frac{n\pi}{T}x dx = T$, per a tot $n \neq 0$.

Prova És un exercici senzill d'integració. Per exemple:

$$\int_{-T}^{T} \sin \frac{n\pi}{T}x \sin \frac{m\pi}{T}x dx == \int_{-T}^{T} \frac{1}{2} \left(\cos \frac{n\pi - m\pi}{T}x - \cos \frac{n\pi + m\pi}{T}x \right) dx =$$
$$= \frac{1}{2} \left[\frac{T}{n\pi - m\pi} \sin \frac{n\pi - m\pi}{T}x - \frac{T}{n\pi + m\pi} \sin \frac{n\pi + m\pi}{T}x \right]_{-T}^{T} = 0$$

Corol.lari Si una funció $f \in CT[-T, T]$ verifica:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{T}x + b_n \sin \frac{n\pi}{T}x \right)$$

aleshores els coeficients a_0, a_n, b_n venen determinats per:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T} \int_{-T}^{T} f(x) dx \\ a_n &= \frac{1}{T} \int_{-T}^{T} f(x) \cos \frac{n\pi}{T}x dx \\ b_n &= \frac{1}{T} \int_{-T}^{T} f(x) \sin \frac{n\pi}{T}x dx \end{aligned}$$

Observació Són interessants les consideracions geomètriques que resulten de considerar en $CT[-T,T]$ el producte escalar definit per:

$$< f, g >= \int_{-T}^{T} f(x)g(x)dx \tag{1}$$

i la norma i distància associades

$$\| f \|^2 = < f, f > , \quad d(f,g) = \| f - g \| \, . \tag{2}$$

(1) Observeu que es tracta de la distància "en mitjana quadràtica".

(2) Amb aquesta mètrica, la proposició anterior podríem enunciar-la dient:

  (i') el conjunt (*) és ortogonal.
  (ii') les funcions de (*) tenen norma $\sqrt{T}$ (fora de la funció 1, que té norma $\sqrt{2T}$).

(3) Igualment, el corol·lari anterior es podria escriure:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T} < f, 1 > \\ a_n &= \frac{1}{T} < f, \cos \frac{n\pi}{T} x > \\ b_n &= \frac{1}{T} < f, \sin \frac{n\pi}{T} x > \end{aligned}$$

3 Sèries de Fourier

El corol·lari i les observacions de l'apartat anterior justifiquen les definicions següents:

Definició Essent $f \in CT[-T,T]$ es defineixen els seus *coeficients de Fourier* mitjançant

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T} \int_{-T}^{T} f(x)dx \\ a_n &= \frac{1}{T} \int_{-T}^{T} f(x) \cos \frac{n\pi}{T} x dx \\ b_n &= \frac{1}{T} \int_{-T}^{T} f(x) \sin \frac{n\pi}{T} x dx \end{aligned}$$

$(n = 1, 2, \ldots)$, i la seva *sèrie de Fourier* associada

$$\mathcal{F}[f] = \frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{T} x + b_n \sin \frac{n\pi}{T} x \right)$$

Denotarem per $\mathcal{F}_N[f]$ la suma parcial enèsima d'aquesta sèrie:

$$\mathcal{F}_N[f] = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{T} x + b_n \sin \frac{n\pi}{T} x \right)$$

Exemple Considerem en $[-\pi, \pi]$ la funció esglaó unitat a l'origen:

$$\mathcal{U}(x) = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad x \in [0, \pi] \\ 0, & \text{si} \quad x \in [-\pi, 0[\end{cases}$$

Resulta:

$$\begin{aligned} &a_0 = 1 \\ &a_n = 0 \\ &b_n = \frac{1 - (-1)^n}{n\pi} = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad n = 2p \\ \frac{2}{n\pi}, & \text{si} \quad n = 2p + 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Per tant:

$$\mathcal{F}[\mathcal{U}] = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{p \geq 0} \frac{1}{2p+1} \sin(2p+1)x \, .$$

4 Convergència puntual d'una sèrie de Fourier

Essent f i $\mathcal{F}[f]$ com a l'apartat anterior, el valor de la suma de la sèrie $\mathcal{F}[f]$ en un punt $x_0 \in [-T,T]$ ve donat per

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f](x_0) &= \lim_{N\to\infty} \mathcal{F}_N[f](x_0) = \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_1^\infty \left(a_n \cos\frac{n\pi}{T}x_0 + b_n \sin\frac{n\pi}{T}x_0 \right)\end{aligned}$$

si existeix, és a dir, si aquesta sèrie numèrica és convergent. En general, pot succeir que $\mathcal{F}[f]$ no convergeixi en un punt $x_0 \in [-T,T]$, o que convergeixi cap a un valor diferent de $f(x_0)$. Tanmateix, el següent teorema clarifica la situació en gran part de casos:

Teorema (Dirichlet). Essent $f \in CT[-T,T]$, suposem que $f' \in CT[-T,T]$, és a dir, que l'interval $[-T,T]$ pot dividir-se en un nombre finit de subintervals, de tal manera que f és de classe C^1 en l'interior de cadascun, i en els punts frontera f i/o f' presenten discontinuïtat evitables o de salt. Aleshores:

(i) si $x_c \in]-T,T[$ és un punt de continuïtat de f, es verifica

$$\mathcal{F}[f](x_c) = f(x_c)$$

(ii) si $x_d \in]-T,T[$ és un punt de discontinuïtat de f, es verifica

$$\mathcal{F}[f](x_d) = \frac{1}{2}\left(f(x_d^+) + f(x_d^-)\right)$$

on $f(x_d^+)$ i $f(x_d^-)$ indiquen els límits laterals de f en x_d.

(iii) per a $x_0 = \pm T$, es verifica

$$\mathcal{F}[f](\pm T) = \frac{1}{2}\left(f((-T)^+) + f(T^-)\right)$$

Exemple Continuant l'exemple de l'apartat anterior, en el punt $x_c = \frac{\pi}{2}$ resulta:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[\mathcal{U}]\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{p=0}^\infty \frac{1}{2p+1}\sin(2p+1)\frac{\pi}{2} = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{p=0}^\infty \frac{(-1)^p}{2p+1} = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\arctan 1 = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\frac{\pi}{4} = 1\end{aligned}$$

que coincideix amb $f(x_c)$. Per a $x_d = 0$ resulta:

$$\mathcal{F}[\mathcal{U}](0) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_0^\infty \frac{1}{2p+1}\sin 0 = \frac{1}{2}$$

que coincideix amb

$$\frac{1}{2}\left(f(0^+) + f(0^-)\right) = \frac{1}{2}(1+0) = \frac{1}{2}.$$

Exercici Mitjançant la sèrie de Fourier en $[-\pi,\pi]$ de la funció $f(x) = x^2\mathcal{U}(x)$, demostreu les següents igualtats:

$$\begin{aligned}\frac{\pi^2}{12} &= 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots \\ \frac{\pi^2}{6} &= 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots \\ \frac{\pi^2}{8} &= 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots \\ \frac{\pi^2}{24} &= \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \dots\end{aligned}$$

5 Integració i derivació de sèries de Fourier

Amb hipòtesis adequades, les sèries de Fourier poden integrar-se i derivar-se "terme a terme", de forma anàloga a les sèries de potències:

Teorema Essent, com a 19.3, $f \in CT[-T,T]$ amb

$$\mathcal{F}[f] = \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1}\left(a_n \cos\frac{n\pi}{T}x + b_n \sin\frac{n\pi}{T}x\right)$$

(1) La integral en tot interval $[\alpha,\beta]$ pot obtenir-se integrant "terme a terme" la seva sèrie de Fourier:

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta f(x)dx &= \int_\alpha^\beta \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1}\int_\alpha^\beta \left(a_n \cos\frac{n\pi}{T}x + b_n \sin\frac{n\pi}{T}x\right) = \\ &= \frac{a_0}{2}(\beta-\alpha) + \sum_{n\geq 1}\frac{T}{n\pi}\left[a_n \sin\frac{n\pi}{T}x - b_n \cos\frac{n\pi}{T}x\right]_\alpha^\beta\end{aligned}$$

Igualment, per a la seva funció integral resulta:

$$\int_0^x f(t)dt = \frac{a_0}{2}x + \sum_{n\geq 1}\frac{T}{n\pi}\left(a_n \sin\frac{n\pi}{T}x - b_n \cos\frac{n\pi}{T}x + b_n\right)$$

(2) Si $f \in C^0(\mathbb{R})$ i $f' \in CT[-T,T]$, aleshores la sèrie de Fourier de f' pot obtenir-se derivant "terme a terme" la de f:

$$\mathcal{F}[f'] = \sum_{n\geq 1}\frac{n\pi}{T}\left(b_n \cos\frac{n\pi}{T}x - a_n \sin\frac{n\pi}{T}x\right)$$

Observacions

(1) La funció integral $\int_0^x f(t)dt$ NO té període $2T$, fora que $\int_{-T}^T f = a_0 = 0$.

Igualment, el terme $\frac{a_0}{2}x$ de l'expressió trobada a (1) NO és periòdic. Per tant, només si $a_0 = 0$ aquesta expressió pot dir-se'n la sèrie de Fourier de la funció integral $\int_0^x f(t)dt$.

(2) La derivació "terme a terme" NO és vàlida, en general, si f no és contínua en $\mathbb{R}$. Així, a l'exemple de l'esglaó unitat és clar que $\mathcal{U}'(x) = 0$ $(x \neq k\pi)$, mentre que al derivar "terme a terme" $\mathcal{F}[\mathcal{U}]$ resulta $\frac{2}{\pi}\sum_{p\geq 0}\cos(2p+1)x$.

Exemple Considerem en $[-\pi,\pi]$ la funció "signe":

$$\text{sig }(x) = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad x \in [0,\pi] \\ -1, & \text{si} \quad x \in [-\pi, 0] \end{cases}$$

És immediat (per càlcul directe, o bé a partir de l'exemple de l'esglaó unitat, observant que sig $(x) = 2\mathcal{U}(x) - 1$) que

$$\mathcal{F}[\text{sig }] = \frac{4}{\pi}\sum_{p\geq 0}\frac{1}{2p+1}\sin(2p+1)x$$

Per a aplicar (1) del teorema anterior, d'una banda calculem directament la sèrie de Fourier de la seva funció integral

$$\int_0^x \text{sig }(t)dt = |x|, \quad x \in [-\pi,\pi]$$

$$\mathcal{F}[|x|] = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{p\geq 0}\frac{\cos(2p+1)x}{(2p+1)^2}$$

D'una altra, integrem "terme a terme" $\mathcal{F}[\text{sig}\ ]$:

$$-\frac{4}{\pi}\sum_{p\geq 0}\left(\frac{\cos(2p+1)x}{(2p+1)^2}-\frac{1}{(2p+1)^2}\right)$$

Igualant ambdues expressions segons (1) del teorema anterior, resulta

$$\sum_{p\geq 0}\frac{1}{(2p+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$$

com a l'exercici anterior s'obté per altres mètodes.

6 Convergència en mitjana quadràtica

Hem comentat a l'apartat anterior que no sempre la sèrie de Fourier $\mathcal{F}[f]$ convergeix en cada punt a f, és a dir, que el límit

$$\lim_{N\to\infty}|f(x_0)-\mathcal{F}_N[f](x_0)|$$

no sempre és 0.

Tanmateix, la sèrie $\mathcal{F}[f]$ sempre convergeix cap a f "en mitjana quadràtica":

Teorema (**Parseval**). Essent $f\in CT[-T,T]$, es verifica:

(i) $\lim_{N\to\infty}\displaystyle\int_{-T}^{T}(f(x)-\mathcal{F}_N[f](x))^2dx=0$

o equivalentment

(ii) $\displaystyle\frac{1}{T}\int_{-T}^{T}(f(x))^2dx=\frac{1}{T}\lim_{N\to\infty}\int_{-T}^{T}\left(\mathcal{F}_N[f](x)\right)^2dx=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2+\sum_{n=1}^{\infty}b_n^2$

Per tant, $\lim a_n=\lim b_n=0$.

Exemple En l'exemple de l'esglaó unitat, tindríem:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\mathcal{U}(x))^2dx=\frac{1}{2\pi}\pi=\frac{1}{2}$$
$$\frac{a_0^2}{4}+\frac{1}{2}\sum a_n^2+\frac{1}{2}\sum b_n^2=\frac{1}{4}+0+\frac{1}{2}\frac{4}{\pi^2}\left(1+\frac{1}{3^2}+\dots\right)=$$
$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\frac{4}{\pi^2}\frac{\pi^2}{8}=\frac{1}{2}$$

(Per a la penúltima igualtat hem utilitzat el resultat de l'exercici anterior.)

Observació Amb la mètrica introduïda a (2), el teorema anterior s'enunciaria dient:

(i') $\lim_{N\to\infty}\parallel f-\mathcal{F}_N[f]\parallel=0$.

(ii') $\displaystyle\frac{1}{T}\parallel f\parallel^2=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2+\sum_{n=1}^{\infty}b_n^2$.

7 Interpretació com a millor aproximació en mitjana quadràtica

A l'apartat anterior hem enunciat que f pot ser aproximada en mitjana quadràtica per $\mathcal{F}_N[f]$ tant com vulguem prenent N prou gran. Anem a veure ara que per a cada N fix, $\mathcal{F}_N[f]$ és la millor aproximació de f en mitjana quadràtica d'entre totes les funcions que són combinació lineal de les primeres $2N+1$ del conjunt (*).

Definició Essent $(\alpha,\beta)\equiv(\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_N,\beta_1,\dots,\beta_N)\in\mathbb{R}^{2N+1}$, definim:

$$
\begin{aligned}
F_{\alpha,\beta}(x) &= \frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{N}\Big(\alpha_n\cos\frac{n\pi}{T}x+\beta_n\sin\frac{n\pi}{T}x\Big)\\
S_N &= \{F_{\alpha,\beta};(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^{2N+1}\}
\end{aligned}
$$

Proposició Essent $f\in CT[-T,T]$, designem per $E(\alpha,\beta)$ l'error quadràtic mig comès en aproximar-la per una funció $F_{\alpha,\beta}$ de S_N:

$$E(\alpha,\beta)=\int_{-T}^{T}(f(x)-F_{\alpha,\beta}(x))^2\,dx\,.$$

Aleshores, aquest error $E(\alpha,\beta)$ és mínim per a

$$(\alpha,\beta)=(a_0,a_1,\dots,a_N,b_1,\dots,b_N)$$

els coeficients de Fourier de f. És a dir, per a

$$F_{\alpha,\beta}=\mathcal{F}_N[f]\,.$$

Prova: És fàcil calcular les derivades parcials de $E(\alpha,\beta)$. Per exemple:

$$
\begin{aligned}
D_{2N+1}E(\alpha,\beta) &= \int_{-T}^{T}2\,(f(x)-F_{\alpha,\beta}(x))\sin\frac{N\pi}{T}x\,dx=\\
&= 2\int_{-T}^{T}f(x)\sin\frac{N\pi}{T}x\,dx-2\int_{-T}^{T}F_{\alpha,\beta}(x)\sin\frac{N\pi}{T}x\,dx=\\
&= 2b_NT-2\beta_NT\,.
\end{aligned}
$$

Així, doncs:

$$
\begin{array}{ll}
dE(\alpha,\beta)=2T & (a_0-\alpha_0,\ \ a_1-\alpha_1,\ \dots,a_N-\alpha_N,\ \ b_1-\beta_1,\ \dots,b_N-\beta_N)\\
d^2E(\alpha,\beta)=-2T & \mathrm{Id}
\end{array}
$$

Per tant, $dE(\alpha,\beta)$ només s'anul·la per a $(\alpha,\beta)=(a_0,a_1,\dots,a_N,b_1,\dots,b_N)$, que és un mínim.

Observacio Amb la mètrica introduïda a (2), la proposició anterior és immediata ja que $E(\alpha,\beta)=(d(f,F_{\alpha,\beta}))^2$, i $\mathcal{F}_N[f]$ no és més que la projecció ortogonal de f sobre el subespai S_N, i per tant el punt de S_N més pròxim a f.

8 Cas particular de funcions parelles i imparelles: desenvolupaments en sèrie de sinus i de cosinus

Proposició Sigui $f\in CT[-T,T]$

(1) Si f és parella, és a dir, si $f(-x)=f(x)$ per a tot $x\in[-T,T]$, aleshores els seus coeficients de Fourier verifiquen:

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\,dx\\
a_n &= \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos\frac{n\pi}{T}x\,dx\\
b_n &= 0
\end{aligned}
$$

Doncs, la seva sèrie de Fourier és un *desenvolupament en sèrie de cosinus*:

$$\mathcal{F}[f]=\frac{a_0}{2}+\sum_{n\geq1}a_n\cos\frac{n\pi}{T}x\,.$$

(2) Si f és imparella, és a dir, si $f(-x) = -f(x)$ per a tot $x \in [-T, T]$, aleshores els seus coeficients de Fourier verifiquen:

$$a_0 = a_n = 0$$
$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin\frac{n\pi}{T}x\,dx$$

Doncs, la seva sèrie de Fourier és un *desenvolupament en sèrie de sinus*:

$$\mathcal{F}[f] = \sum_{n\geq 1} b_n \sin\frac{n\pi}{T}x\,.$$

9 Cas particular de desenvolupaments en mig interval

Si la funció f donada només és definida en $[0, T]$, es poden considerar diverses formes de prolongar-la a $[-T, 0]$. Per exemple:

(i) Mitjançant $f(-x) = f(x)$: en aquest cas resulta una funció parella en $[-T, T]$, i la seva sèrie de Fourier serà com a (1) de l'apartat anterior.

(ii) Mitjançant $f(-x) = -f(x)$: en aquest cas resulta una funció imparella en $[-T, T]$, i la seva sèrie de Fourier serà com a (2) de l'apartat anterior.

(iii) Mitjançant $f(-x) = f(-x+T)$: en aquest cas resulta una funció periòdica, de període T. Aleshores, la seva sèrie de Fourier ve donada per:

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\,dx$$
$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos\frac{2n\pi}{T}x\,dx$$
$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin\frac{2n\pi}{T}x\,dx$$

10 Forma exponencial complexa d'una sèrie de Fourier

Una simple transformació formal permet escriure

$$\mathcal{F}[f] = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{i\frac{n\pi}{T}x}$$

essent

$$c_0 = \frac{a_0}{2}$$
$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n), \quad \text{si} \quad n > 0$$
$$c_n = \frac{1}{2}(a_n + ib_n), \quad \text{si} \quad n < 0$$

o també

$$c_n = \frac{1}{2T}\int_{-T}^T f(x)e^{-i\frac{n\pi}{T}x}dx$$