Càlcul II / Integració (Esquema)

1 de setembre de 2015

INDEX:

Aquestes notes estan basades en els tres primers capítols del llibre:
[1] *Càlcul integral per a enginyers*, Edicions UPC. Que podreu trobar gratuitament a internet.

Integració a $\mathbb{R}$

Sigui $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, positiva. Considerem el domini que hi ha entre la gràfica de f i l'intèrval $[a, b]$:

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \quad 0 \leq y \leq f(x)\}.$$

Definirem la integral de f entre a i b a partir de l'àrea d'Ω:

$$\int_a^b f(x)dx \equiv A(\Omega).$$

L'àrea d'Ω la calcularem a partir de les sumes de Riemann:
Donada $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ considerem la partició $x_i = a + (b - a)\frac{i}{N}$. Definim la suma superior i inferior de Riemann com:

$$S_N = \frac{(b-a)}{N}\sum_{i=0}^{N-1} M_i; \quad s_N = \frac{(b-a)}{N}\sum_{i=0}^{N-1} m_i,$$

on M_i i m_i són respectivament el màxim i mímim de f en el sub-intèrval $[x_i, x_{i+1}]$.
És clar que tindrem (vegi's la figura 1.1 de [1]):

$$\int_a^b f(x)dx = A(\Omega) = \lim_{N\to\infty} S_N = \lim_{N\to\infty} s_N.$$

Una vegada tenim la definició d'integral d'una funció positiva en un intèrval, ara ho podem estendre (per una funció positiva) a un domini acotat, diem-n'hi D, de $\mathbb{R}$ de la següent forma:
Busquem un intèrval $[a, b]$ que contingui al domini D i estenem f a $[a, b]$ com:

$$\tilde{f}(x) = f(x) \quad \text{si} \quad x \in D; \quad \tilde{f}(x) = 0 \quad \text{si} \quad x \in [a, b] \setminus D.$$

Llavors definim

$$\int_D f(x)dx = A(\Omega),$$

on $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in D, \quad 0 \leq y \leq f(x)\}$ que resulta té exactament la matexa àrea que $\tilde{\Omega} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \quad 0 \leq y \leq \tilde{f}(x)\}$. Per tant,

$$\int_D f(x)dx = A(\Omega) = A(\tilde{\Omega}) = \int_a^b \tilde{f}(x)dx = \lim_{N\to\infty} S_N = \lim_{N\to\infty} s_N.$$

NOTA: Aquestes definicions s'estenen a "qualsevol" funció real de variable real (NO fa falta que sigui positiva). El que passa és que si f NO es positiva, es perd la interpretació geomètrica.

Integració a $\mathbb{R}^2$

Sigui $f : R \equiv [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, positiva. Considerem el domini que hi ha entre la gràfica de f i el rectangle R

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in R, \quad 0 \leq z \leq f(x, y)\}.$$

Definirem la integral de f a R a partir de del volum de W:

$$\int_R f(x, y)dxdy \equiv V(W).$$

El volum de W el calcularem a partir de les sumes de Riemann:

$$S_N = \frac{(b-a)(d-c)}{N^2}\sum_{i,j=0}^{N-1} M_{ij}; \quad s_N = \frac{(b-a)(d-c)}{N^2}\sum_{i,j=0}^{N-1} m_{ij},$$

on M_{ij} i m_{ij} són respectivament el màxim i mímim de f en el subrectangle

$$R_{ij} \equiv [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}].$$

És clar que tindrem,

$$\int_R f(x,y)dxdy = \lim_{N\to\infty} S_N = \lim_{N\to\infty} S_N.$$

Una vegada tenim la definició d'integral d'una funció positiva en un rectangle, ara ho podem estendre (per una funció positiva) a un domini acotat, diem-n'hi Ω, de $\mathbb{R}^2$ de la següent forma: Busquem un rectangle R que contingui al domini Ω i estenem f a R com:

$$\tilde{f}(x,y) = f(x,y) \quad \text{si} \quad (x,y) \in \Omega; \quad \tilde{f}(x,y) = 0 \quad \text{si} \quad (x,y) \in \mathbb{R} \setminus \Omega.$$

Llavors definim

$$\int_\Omega f(x)dx = A(W),$$

on $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in \Omega, \quad 0 \le z \le f(x,y)\}$ que resulta té exactament el mateix volum que $\tilde{W} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in R, \quad 0 \le z \le \tilde{f}(x,y)\}$. Per tant,

$$\int_\Omega f(x)dx = A(W) = A(\tilde{W}) = \int_R \tilde{f}(x,y)dxdy = \lim_{N\to\infty} S_N = \lim_{N\to\infty} s_N.$$

NOTA: Aquestes definicions s'estenen a "qualsevol" funció real de dues variables (NO fa falta que sigui positiva). El que passa és que si f NO es positiva es perd la interpretació geomètrica.

Resumint:
A $\mathbb{R}$ si tenim $f : \Omega \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, amb $f \ge 0$ sabem que $\int_\Omega f$ és l'àrea delimitada per la gràfica de f i el domini Ω. Anàlogament, si tenim $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ amb $f \ge 0$ tindrem que $\int_\Omega f$ és el volum que delimitada per la gràfica de f i el domini Ω

EXERCICI: Quan val $\int_{[0,1]^2} 1 - x$? Val $1/2$ per que el volum sota la gàfica de $1-x$ és la meitat del cub $[0,1]^3$.
Comproveu que s'obté el mateix resultat calculant $\lim_{N\to\infty} S_N$.
Solució: En el nostre cas $x_i = \frac{i}{N}$ i $y_j = \frac{j}{N}$, per tant, $M_{ij} = 1 - x_i = 1 - \frac{i}{N}$. La suma superior de Riemann serà:

$$S_N = \frac{1}{N^2}\sum_{i,j=0}^{N-1}\left(1 - \frac{i}{N}\right) = \frac{1}{N^3}\sum_{i,j=0}^{N-1}(N-i) = \frac{1}{N^3}\sum_{j=0}^{N-1}(1+2+\ldots+N) =$$

$$\frac{1}{N^3}\sum_{j=0}^{N-1}\frac{N(N+1)}{2} = \frac{N+1}{2N^2}(1+\ldots+1) = \frac{N+1}{2N} \longmapsto \frac{1}{2}.$$

Nota:
Donat $[a,b] \subset \mathbb{R}$ tenim que $\int_{[a,b]} 1dx = b - a$ és la la longitut de l'intèrval $[a,b]$. Anàlogament, tenim que per

1. $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ la seva àrea és $A(\Omega) = \int_\Omega 1dxdy$.
2. I generalitzant a $\mathbb{R}^3$: $W \subset \mathbb{R}^3$ el seu volum és $V(W) = \int_W 1dxdydz$.

Propietats de la integral:

- Linealitat
$$\int_\Omega af+bg = a\int_\Omega f + b\int_\Omega g.$$
- Aditivitat. Si $\Omega=\Omega_1\cup\Omega_2$ amb $\Omega_1\cap\Omega_2=\emptyset$, llavors:
$$\int_\Omega f = \int_{\Omega_1} f + \int_{\Omega_2} f.$$
- Monotonia
$$f\le g \Longrightarrow \int_\Omega f \le \int_\Omega g.$$
En particular:
$$\left|\int_\Omega f\right| \le \int_\Omega |f|.$$

Teorema del valor mig $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, amb $f\in\mathcal{C}^0[a,b]$, llavors
$$\int_a^b f(x) = f(c)(b-a), \quad \text{per algun} \quad c\in[a,b].$$
I per tant, tenim les següent acotacions
$$m(b-a)\le \int_a^b f(x) \le M(b-a),$$
on $m=min_{x\in[a,b]}f(x)$ i $M=max_{x\in[a,b]}f(x)$.
El mateix passa en dimensions més altes. Si ara tenim $f:\Omega\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$, Ω acotat i arc-connex, i $f\in\mathcal{C}^0(\bar\Omega)$, llavors
$$\int_\Omega f(x) = f(c)m(\Omega) \quad \text{per algun} \quad c\in\bar\Omega,$$
i on $m(\Omega)$ és la mesura del conjunt Ω (longitut en dimensió 1, àrea en dimensió 2, volum en dimensió 3,....). I per tant, tenim les següent acotacions
$$mm(\Omega)\le \int_\Omega f(x) \le Mm(\Omega),$$
on $m=min_{x\in\Omega}f(x)$ i $M=max_{x\in\Omega}f(x)$.
Exercici: Afiteu superior i inferiorment $\int_{\mathcal{B}^3_R(0)} e^{-||x||^2}$.
Exercici: Demostreu que
$$1/6\le \int_\Omega \frac{dxdy}{y-x+3} \le 1/4,$$
on Ω és el triangle de vèrtexs $(0,0)$, $(1,1)$ i $(1,0)$.

PRINCIPI DE CAVALIERI

Donat $W = \{(x, y, z) : x \in [a, b]\} \subset \mathbb{R}^3$, sigui $\Omega(x_0) \subset \mathbb{R}^2$ la secció que s'obté al tallar W amb el pla $x = x_0$ (vegi's la figura 2.1 de [1]). Diem $A(x_0)$ a l' àrea de $\Omega(x_0)$, llavors el volum de W és

$$V(W) = \int_a^b A(x)dx.$$

Exemple:(Volum d'un con)
$W = \{z^2 = x^2 + y^2, z \in I = [0, H]\}$. Llavors

$$V(W) = \int_0^H A(z)dz = \int_0^H \pi z^2 dz = \pi H^3/3.$$

Exemple:(Volum d'un el.lipsoïde)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1.$$

Al tallar amb plans z constant s'obtenen el.lipses de la forma $\frac{x^2}{a^2\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)} + \frac{y^2}{b^2\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)} \leq 1.$
Com calculem l'àrea d'una el.lipse? Doncs, aplicant Cavalieri en dimensió 2, i.e., tallant amb rectes perpendiculars als eixos calculant la longitut del segment intersecció i despres integrant respecte de la variable que parametritza aquestes rectes.
En aquest cas la longitut és $L(x) = 2b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2}}$ i per tant $A(z) = \int_{-a}^{a} L(x)dx = \pi ab\left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right)$, així doncs, $V = \int_{-c}^{c} A(z)dz = \frac{4}{3}\pi abc.$

A PROBLEMES: Fer els exercicis 3(c) i 3(d).

TEOREMA DE TONELLI:

$W = \{(x, y, z) : x \in [a, b], y \in [c, d], z \in [0, f(x, y)]\}$, amb $f \geq 0$.
Sabem que el volum de W és $\int_R f(x, y)dxdy$ on $R = [a, b] \times [c, d]$.
Tenim $A(x) = \int_c^d f(x, y)dy$ i per tant,

$$V(W) = \int_a^b A(x)dx = \int_a^b \int_c^d f(x, y)dydx,$$

és a dir, el volum sota la gràfica d'una funció positiva es calcula mitjançant una integral iterada! Apliquem ara el Principi de Cavalieri amb plans de la forma $y = y_0$, llavors aplicat en aquest mateix exemple tindrem

$$V(W) = \int_c^d A(y)dy = \int_c^d \int_a^b f(x, y)dxdy,$$

és a dir, que si tenim una funció positiva es satisfarà

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y)dydx = \int_c^d \int_a^b f(x, y)dxdy,$$

aquest és el *Teorema de Tonelli.* De fet, resulta que aquest resultat és cert per "totes" les funcions *Teorema de Fubini.* Així, tindrem

$$\int_R f(x, y)dxdy = \int_a^b \int_c^d f(x, y)dydx = \int_c^d \int_a^b f(x, y)dxdy,$$

on $R = [a, b] \times [c, d]$.

Aplicacions:

1. Per $\Omega = \{(x,y) : x \in [a,b], y \in I_x = [\phi_1(x), \phi_2(x)]\}$ amb $\phi_1 \leq \phi_2$ (vegi's figura 2.3 de [1]) tenim

$$\int_\Omega f(x,y)dxdy = \int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)dydx.$$

2. Per $\Omega = \{(x,y) : y \in [c,d], x \in \bar{I}_y = [\phi_1(y), \phi_2(y)]\}$ amb $\phi_1 \leq \phi_2$ (vegi's figura 2.5 de [1]) tenim

$$\int_\Omega f(x,y)dxdy = \int_c^d \int_{\phi_1(y)}^{\phi_2(y)} f(x,y)dxdy.$$

3. Per $W = \{(x,y,z) : x \in [a,b], y \in I_x = [\phi_1(x), \phi_2(x)], z \in I_{x,y} = [\psi_1(x,y), \psi_2(x,y)]\}$ amb $\phi_1 \leq \phi_2$ i $\psi_1 \leq \psi_2$ tenim

$$\int_W f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b \int_{\phi_1 x}^{\phi_2(x)} \int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)dzdydx.$$

Exemples:

1. $\Omega = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq x^2\}$. Escriviu les dues integrals iterades.
2. Ω domini limitat per les corbes $y = x^2$ i $x = y^2$. Escriviu les dues integrals iterades.
3. Calculeu $\int_0^1 \int_y^1 e^{y/x} dxdy$.
4. Calculeu $\int_\Omega x^2 \sin(xy)dxdy$ on $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1, y \leq x \leq 1\}$.
5. Calculeu $\int_W xyzdxdxydz$ on W és el conjunt limitat per les superficies $y = x^2$, $x = y^2$, $z = xy$ i $z = 0$.

A PROBLEMES: Fer els exercicis 8(b), 8(c), 8(e), 11(e), 11(g), 14(a), 14(c) i 15(e).

CANVIS DE VARIABLE

$T : \Omega^* \subset \mathbb{R}^n \to \Omega \subset \mathbb{R}^n; x^* \to x$ de classe $\mathcal{C}^1$ amb inversa també $\mathcal{C}^1$ és un *canvi de variable.*

Teorema:(canvi de variable)

$$\int_\Omega f(x) = \int_{\Omega^*} f(T(x^*)) \left| detJT(x^*) \right| .$$

Exemples:

1. Polars: $T(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta) \Longrightarrow JT(r, \theta) = r$.

   I la fórmula del canvi de variable queda:

   $$\int_\Omega f(x, y)dxdy = \int_{\Omega^*} f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdrd\theta.$$

   Exercici: Calculeu l'àrea d'una rosa de 4 pètals. (En polars l'equació de la vora del domini és $r = a^2 \sin(4\theta)$).

   Exercici: Calculeu $\int_\Omega xy$, Ω intersecció amb el primer quadrant de la corona circular de centre $(0, 0)$ i radi interior 1 i radi exterior 2. (Solució: $\frac{15}{8}$.)

2. Cilíndriques: $T(r, \theta, z) = (r\cos\theta, r\sin\theta, z) \Longrightarrow JT(r, \theta) = r$.

   I la fórmula del canvi de variable queda:

   $$\int_\Omega f(x, y, z)dxdydz = \int_{\Omega^*} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)rdrd\theta dz.$$

   Exercici: Calculeu el volum comprès entre el con $z^2 = x^2 + y^2$ i el paraboloide $z = x^2 + y^2$, per $z > 0$.

   Exercici: Part de l'esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ que és exterior al cilindre $x^2 + y^2 = b^2$ $(a > b > 0)$. (Solució: $\frac{4\pi}{3}(a^2 - b^2)^{3/2}$.)

3. Esfèriques: $T(r, \theta, \varphi) = (r\cos\theta\cos\varphi, r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\varphi) \Longrightarrow JT(r, \theta, \varphi) = r^2\cos\varphi$.

   I la fórmula del canvi de variable queda:

   $$\int_\Omega f(x, y, z)dxdydz = \int_{\Omega^*} f(r\cos\theta\cos\varphi, r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\varphi)r^2\cos\varphi drd\theta d\varphi.$$

   Exercici: Calculeu el volum de $\mathcal{B}^3_R(0)$.

   Exercici: Sigui Ω el domini tallat sobre la bola $r \le a$ pel con $\alpha \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$ $(a > 0,\ 0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2})$. Calculeu el seu volum. (Solució: $\frac{2\pi a^3}{3}(1 - \sin\alpha)$.)

4. Altres canvis: Fer els exercicis 18(a), 18(d) i 18(g).

A PROBLEMES: Fer els exercicis

1. de polars 16(c), 16(d), 16(g), 17(c).
2. de cilíndriques 19(b) i 19(e)
3. d' esfèriques 20(c), 21(b) i 21(c).
4. de d'altres canvis 18(a) i 18(f). Nota: No s'ha de dir el canvi. L'han de pensar els alumnes.

A PROBLEMES: Fer els exercicis 23(a), 23(e), 23(f), 23(j) i 23(l).

APLICACIONS

Ja hem vist que la integral ens permet calcular l'àrea d'un placa D i volum d'un cos W usant les fórmules:

$$A(D) = \int_D 1dxdy, \quad V(W) = \int_W 1dxdydz.$$

Anem a veure d'altres aplicacions de la integral.

Mitjana d'una funció:

Per una funció $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, definim la seva mitjana $v_m(f)$ com:

$$v_m(f) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

Per una funció $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definim la seva mitjana $v_m(f)$ com:

$$v_m(f) = \frac{1}{A(D)}\int_D f(x,y)dxdy.$$

Per una funció $f : W \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, definim la seva mitjana $v_m(f)$ com:

$$v_m(f) = \frac{1}{V(W)}\int_W f(x,y,z)dxdydz.$$

Exercici: Sigui $f(x,y,z)$ la distància al quadrat del punt (x,y,z) al punt $(0,0,c)$. Calculeu la mitjana de
f sobre la bola de radi R centrada a l'origen de coordenades.
SOLUCIÓ: $v_m(f) = \frac{3}{5}R^2 + c^2$.

A PROBLEMES: Fer l'exercici 24.

Massa d'un cos:

Donats $D \subset \mathbb{R}^2$ i $W \subset \mathbb{R}^3$ conjunts del pla i de l'espai, amb densitats $\rho(x,y)$ i $\rho(x,y,z)$ respectivament. Llavors, la massa de D i W es defineix com

$$m(D) = \int_D \rho(x,y)dxdy, \quad m(W) = \int_W \rho(x,y,z)dxdydz.$$

Exercici: Calculeu la massa d'una placa quadrada de costat a, on la seva dentitat en cada punt és igual al quadrat de la seva distància a un vèrtex.
SOLUCIÓ: $m = \frac{2}{3}a^4$.

Centre de masses:

Donades n masses puntuals $m_1, m_2, \ldots, m_n$ situades en els punt $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de la recta real. El seu *centre de masses* (CM) es troba en el punt

$$\bar{x} = \frac{m_1x_1 + \ldots + m_nx_n}{m_1 + \ldots + m_n}.$$

Passant al continu, tenim que:
Per un intèrval I de densitat $\rho(x)$ el seu CM és

$$\bar{x} = \frac{\int_I x\rho(x)dx}{m(I)}.$$

Per una placa $D \subset \mathbb{R}^2$ de densitat $\rho(x,y)$ el seu CM és

$$(\bar{x},\bar{y}) = \frac{\int_D (x,y)\rho(x,y)dxdy}{m(D)}.$$

Per un cos $W \subset \mathbb{R}^3$ de densitat $\rho(x,y,z)$ el seu CM és

$$(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) = \frac{\int_W (x,y,z)\rho(x,y,z)dxdydz}{m(W)}.$$

Nota: Quan la densitat és uniforme, i.e., NO depèn del punt, llavors el CM s'anomena *centre geomètric* CG, i tindrem:
Per una placa $D \subset \mathbb{R}^2$ el seu CG és

$$(\bar{x},\bar{y}) = \frac{\int_D (x,y)dxdy}{A(D)}.$$

Per un cos $W \subset \mathbb{R}^3$ el seu CG és

$$(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) = \frac{\int_W (x,y,z)dxdydz}{V(W)}.$$

Propietats del CM i CG:

1. Si dividim un cos en dues o més parts, el seu CM és el mateix que el que s'obtindria si les masses fossin puntuals i estiguessin concentrades en els CM corresponents.

   Així, per exemple, si tenim $W = W_1 \cup W_2$, on $(\bar{x}_1,\bar{y}_1,\bar{z}_1)$ i $(\bar{x}_2,\bar{y}_2,\bar{z}_2)$ són respectivament els CM de W_1 i W_2, llavors:

$$(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) = \frac{(\bar{x}_1,\bar{y}_1,\bar{z}_1)m(W_1) + (\bar{x}_2,\bar{y}_2,\bar{z}_2)m(W_2)}{m(W)}.$$

2. Si un cos té una simetria (pla , recta, punt,...) respecte la densitat, llavors el CM li pertany. En particular, si un cos té una simetria, llavors el CG li pertany.

Aplicació: Calcular el CM d'un cilindre d'alçada h i base circular de radi R, si la seva densitat en cada punt és proporcional a la seva distància a la base.
SOLUCIÓ: $(0,0,\frac{2h}{3})$.

Aplicació: Calculeu el centre geomètric del triangle de vèrtex $(0,0)$, $(1,0)$ i $0,1)$ on se li ha extret un quart de disc centrat de radi $1/2$ centrat a l'origen.

A PROBLEMES: Fer els exercicis 25(a), 25(b), 26(a), 26(c) i 28.

Segon Teorema de Pappus-Guldin:
El volum de revolució d'un cos generat per una placa plana uniforme al girar al voltant d'un eix contingut en el maix pla que conté la placa i que no talla la placa, és igual al producte de l'àrea de la placa per la longitud de la circumferència que descrita pel seu CG al girar al voltant de l'eix de revolució.
És a dir, si diem r a l'eix de revolució, $d(r, CG)$ a la distància del CG a l'eix r, W al cos de revolució i D a la placa plana, tindrem

$$V(W) = 2\pi d(r, CG)A(D).$$

Exercici 1: En el pla (x,y) consideren una circumferència de radi r centrada en el punt $(R,0)$, $R > r)$, al fer-la girar al voltant de l'eix OY obtenim un tor de revolució. Calculeu el seu volum.
SOLUCIÓ: $V = 2\pi^2 r^2 R$.
Exercici 2: Calculeu el CG d'un quart de disc de radi R centrat a l'origen.
SOLUCIÓ: $(\frac{4R}{3\pi}, \frac{4R}{3\pi})$.

Moment d'inèrcia:
Donat un eix r i n masses puntuals $m_1, m_2, \ldots, m_n$ situades a distància $d_1, d_2, \ldots, d_n$ de l'eix r,

el seu moment d'inèrcia respecte l'eix r es defineix compr

$$I_r = m_1 d_1^2 + \ldots + m_n d_n^2.$$

Passant al continu, tenim que:
Per una placa $D \subset \mathbb{R}^2$ de densitat $\rho(x, y)$ el seu moment d'inèrcia respecte l'eix r és

$$I_r = \int_D d^2((x, y), r)\rho(x, y)dxdy.$$

Per un cos $W \subset \mathbb{R}^3$ de densitat $\rho(x, y, z)$ el seu moment d'inèrcia respecte l'eix r és

$$I_r = \int_W d^2((x, y, z), r)\rho(x, y, z)dxdxydz,$$

on $d((x, y), r)$ (resp. $d((x, y, z), r)$) és la distància del punt (x, y) (resp. (x, y, z)) a l'eix r.
En particular, pels eixos de coordenades tenim

$$I_x = \int_D y^2\rho(x, y)dxdy, \quad I_y = \int_D x^2\rho(x, y)dxdy.$$

$$I_x = \int_W (y^2 + z^2)\rho(x, y, z), \quad I_y = \int_W (x^2 + z^2)\rho(x, y, z), \quad I_z = \int_W (x^2 + y^2)\rho(x, y, z).$$

Exemple: Calculeu el moment d'inèrcia de la bola unitat de $\mathbb{R}^3$ centrada a l'origen respecte d'un diàmetre, si la densitat en un punt és igual la deva distància al centre de la bola.
SOLUCIÓ: $I = \frac{4\pi}{9}$.
Teorema de Steiner:
"El moment d'inèrcia d'un cos respecte un eix és la suma del moment d'inèrcia respecte de l'eix paral.lel que passa pel CM del cos i el moment que tindria si tota la seva massa estigués concentrada en el CM."
És a dir, si diem W al cos, i s és l'eix paral.lel a r que passa pel CM del cos, llavors:

$$I_r = I_s + m(W)d^2(CM, r).$$

Aplicació: Considereu el cilindre $W = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq R^2, -h/2 \leq z \leq h/2\}$, amb densitat igual a 1, i sigui r un eix situat en el pla $z = h/2$ que passa pel punt $(0, 0, h/2)$. Calculeu I_r
SOLUCIÓ: $I_r = V(W)\left(\frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{3}\right)$.

A PROBLEMES: Fer els exercicis 34(c) i 34(d).