## Càlcul II / Continuïtat i derivabilitat (Esquema)

*1 de setembre de 2015*

**ÍNDEX:**

# Índex

# 1 Pas de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}^n$ (1h P)

| $\mathbb{R}$ | $\mathbb{R}^n$ |
|---|---|
| $x = x_1 \in \mathbb{R}$ | $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on $x_j$ s'anomena coordenada $j-$èssima del punt $x$. Casos particulars: <br>• A $\mathbb{R}^2$ els punts normalment es denoten per $(x, y)$. <br>• A $\mathbb{R}^3$ per $(x, y, z)$. |
| $x_1, y_1 \in \mathbb{R}$ producte $x_1 y_1$. | $x, y \in \mathbb{R}^n$ producte escalar $\langle x, y\rangle := x \cdot y := \sum_{j=1}^{n} x_j y_j$. |
| $x_1 \in \mathbb{R}$ norma $\|x_1\| := \lvert x_1\rvert = \sqrt{x_1^2}$. | $x \in \mathbb{R}^n$ norma $\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle}$. La norma és la distància a l'origen (Teorema de Pitàgoras). Mostrar-ho a $\mathbb{R}^2$. |
| Intèrval obert (bola 1-dimensional) de radi $r > 0$ centrat en $y_1$, $\mathcal{B}_r^1(y_1) := (y_1 - r, y_1 + r) = \{x_1 \in \mathbb{R} : \mathrm{dist}(x_1, y_1) < r\}$. | Bola oberta $n$-dimensional de radi $r > 0$ centrada en $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}$, $\mathcal{B}_r^n(y) := \{x \in \mathbb{R}^n : \mathrm{dist}(x, y) < r\}$. (Fer exemples a $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$). |

**Propietats:**

- $\forall \lambda \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n$ es satisfà $||\lambda x|| = |\lambda|||x||$.
- $||x|| \geq 0,\ ||x|| = 0 \iff x = 0$.
- Donats $x, y \in \mathbb{R}^n$ es satisfà $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$, i.e., el producte escalar és simètric.
- Donats $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ es satisfà $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$, i.e., el producte escalar és bilineal.

**Desigualtats:**

1. Cauchy-Schwarz

$$|\langle x, y\rangle| \leq ||x||||y||.$$

*Demostració.* Siguin $t \in \mathbb{R}$, $x, y \in \mathbb{R}^n$ amb $y \neq 0$. Tenim:

$$g(t) = ||x + ty||^2 = ||x||^2 + 2t\langle x, y\rangle + t^2||y||^2 \geq 0.$$

Llavors, per $t_0 = -\dfrac{\langle x, y\rangle}{||y||^2}$ tindrem $g(t_0) = ||x||^2 - \dfrac{\langle x, y\rangle^2}{||y||^2} \geq 0 \iff \langle x, y\rangle^2 \leq ||x||^2||y||^2$. Finalment si $y = 0$ la desigualtat es trivial. $\square$

2. Triangular
$$||x+y|| \leq ||x|| + ||y|| \Longleftrightarrow d(x,y) \leq \mathrm{dist}(x,z) + \mathrm{dist}(z,y)\,.$$

   *Demostració.*
$$||x+y||^2 = ||x||^2 + 2\langle x,y\rangle + ||y||^2 \leq ||x||^2 + 2||x||||y|| + ||y||^2 = (||x|| + ||y||)^2.$$

   D'altra banda:
$$\mathrm{dist}(x,y) = ||x-y|| = ||(x-z)+(z-y)|| \leq ||x-z|| + ||z-y|| = \mathrm{dist}(x,z) + \mathrm{dist}(z,y)\,. \qquad \square$$

3. $|\langle x,y\rangle| \leq \sum_{j=1}^{n} |x_j y_j|$. És consequència inmediata de la desigualtat triangular.

4. $\forall j\ |x_j| \leq ||x||$. És trivial, però important.

De la desigualtat triangular es dedueix també el seguent Corol·lari:

**Corol·lari:** $|\,\|x\| - \|y\|\,| \leq ||x-y||$.

*Demostració.* Aplicant la desigualtat triangular tenim, d'una banda,
$$\|x\| \leq \|y + (x-y)\| \leq \|y\| + \|x-y\| \Longleftrightarrow \|x\| - \|y\| \leq \|x-y\|$$
i també:
$$\|y\| \leq \|x - (x-y)\| \leq \|x\| + \|x-y\| \Longleftrightarrow \|x\| - \|y\| \geq -\|x-y\|.$$
Per tant, es satisfà,
$$-\|x-y\| \leq |\,\|x\| - \|y\|\,| \leq \|x-y\|$$
i aquesta desigualtat és equivalent a $|\,\|x\| - \|y\|\,| \leq \|x-y\|$. $\square$

# 2 Topologia de $\mathbb{R}^n$ (1h P)

**Definició 2.1** (Oberts a $\mathbb{R}^n$)**.** $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ obert $\Longleftrightarrow \forall\, x \in \Omega, \exists\, \epsilon > 0$ tal que $\mathcal{B}^n_\epsilon(x) \subseteq \Omega$.

**Definició 2.2** (Tancats a $\mathbb{R}^n$)**.** $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ tancat $\Longleftrightarrow \Omega^{\complement} \equiv \mathbb{R}^n \setminus \Omega$ és obert.

**Remarca 2.1** (Notació)**.** El conjunt $\Omega^{\complement}$ s'anomena *complementari* de $\Omega$.

**Definició 2.3.** Donat $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ i $a \in \Omega$ direm:

- $a$ és un punt de l'interior de $\Omega \Longleftrightarrow \exists\, \epsilon > 0$ tal que $\mathcal{B}^n_\epsilon(a) \subseteq \Omega$.
- $a$ és un punt de l'exterior de $\Omega \Longleftrightarrow \exists\, \epsilon > 0$ tal que $\mathcal{B}^n_\epsilon(a) \subseteq \Omega^{\complement}$.
- $a$ és un punt de la frontera de $\Omega \Longleftrightarrow \forall\, \epsilon > 0,\ \mathcal{B}^n_\epsilon(a) \cap \Omega \neq \emptyset$ i $\mathcal{B}^n_\epsilon(a) \cap \Omega^{\complement} \neq \emptyset$.

**Definició 2.4.** Donat $A \subseteq \mathbb{R}^n$ definim l'interior ($\mathring{A}$), l'exterior ($\mathrm{ext}A$), i la frontera ($\partial A$), com els conjunts:

- $\mathring{A} = \{x \in \mathbb{R}^n : x$ és punt de l'interior de $A\}$.
- $\mathrm{ext}A = \{x \in \mathbb{R}^n : x$ és punt de l'exterior de $A\}$.

- $\partial A = \{x \in \mathbb{R}^n : x$ és punt de la frontera de $A\}$.

**Definició 2.5** (Clausura o adherència)**.** Donat $A \in \mathbb{R}^n$ la clausura (o adherència) d'$A$ és $\bar{A} = \mathring{A} \cup \partial A$.

**Proposició 2.1.** *Un conjunt $A \subseteq \mathbb{R}^n$ és obert si i només si coincideix amb el seu interior. Anàlogament, un conjunt $A \subseteq \mathbb{R}^n$ és tancat si i només si coincideix amb la seva clausura, i.e.,*

- *$A$ obert $\Longleftrightarrow A = \mathring{A}$.*
- *$A$ tancat $\Longleftrightarrow A = \bar{A}$.*

**Remarca 2.2.** La clausura de $\mathcal{B}_r^n(a)$, que denotarem per $\overline{\mathcal{B}}_r^n(a)$, s'anomena *bola tancada* de $\mathbb{R}^n$ de radi $r$ i centrada en el punt $a$.

**Definició 2.6** (Conjunt acotat)**.** $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ és un conjunt acotat $\Longleftrightarrow \exists\, R > 0$ tal que $\Omega \subseteq \mathcal{B}_R^n(0)$.

**Definició 2.7** (Conjunt compacte)**.** $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ és un conjunt compacte $\Longleftrightarrow$ és tancat i acotat.

**Proposició 2.2** (Unions i interseccions d'oberts i tancats)**.**

*(i) La unió d'oberts és sempre un obert.*

*(ii) La intersecció finita d'oberts és un obert.*

*(iii) La unió finita de tancats és un tancat.*

*(iv) La intersecció de tancats és sempre un tancat.*

**Exemple 2.1.**

1. $\displaystyle\bigcup_{k=2}^{\infty} \mathcal{B}_{1-1/k}^n(0)$ és obert.
2. $\displaystyle\bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{\mathcal{B}}_{1/k}^n(0)$ és tancat. (Es dedueix de 1 i de la propietat $(A \cup B)^{\complement} = A^{\complement} \cap B^{\complement}$).
3. $\displaystyle\bigcup_{k=2}^{\infty} \overline{\mathcal{B}}_{1-1/k}^n(0)$ és obert.
4. $\displaystyle\bigcap_{k=1}^{\infty} \mathcal{B}_{1/k}^n(0)$ és tancat.
5. La frontera de $\mathcal{B}_r^n(0)$ són els punt de $\mathbb{R}^n$ que satisfan $||x|| = r$.
6. $\mathbb{R}^n$ és obert i tancat a la vegada. (Tot punt de $\mathbb{R}^n$ és interior i no té frontera).

**Exemple 2.2** (Exercici 1 de la col·lecció)**.** Digueu quins dels següents conjunts son oberts, tancats o compactes.

(a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\, x^2 + y^2 \leq x,\ \mathrm{e}^{xy} - \sin x \leq y^4 + \mathrm{e}^x\}$.

$\triangleleft$ *Solució.* És compacte ja que és la intersecció entre $\overline{\mathcal{B}}_{1/2}^2(1/2, 0)$ i $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \mathrm{e}^{xy} - \sin x \leq y^4 + \mathrm{e}^x\}$. El primer es compacte i el segon tancat.[1] $\triangleright$

[1] Veurem quan estudiem continuïtat,que, "en general", els conjunts definits per desigualtats del tipus $\lessgtr$ són oberts. I els definits per desigualtats del tipus $\substack{\leq \\ \geq}$ són tancats. De moment ho acceptem i ja ho veurem mes endevant.

(b) $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 1,\, \mathrm{e}^{xy}+\mathrm{e}^{yz}+\mathrm{e}^{zx} \geq x+y+z\}$.

$\triangleleft$ *Solució.* Mateix raonament que en el cas anterior. És la intersecció de la bola tancada unitat centrada a l'origen i un tancat, per tant, compacte. $\triangleright$

(c) $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 \leq 0, y \leq 2x\}$.

$\triangleleft$ *Solució.* És tancat ja que és la intersecció de dos tancats, peró no és compacte ja que no està acotat (els punts de la forma $(x,x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$ pertanyen a $C$). $\triangleright$

(d) $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x^2 - y^2 + z^2 < 1,\, xyz > 0\}$.

$\triangleleft$ *Solució.* És la intersecció de dos oberts, per tant, obert. $\triangleright$

(e) $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + \sin y > 0,\, x \neq 0,\, y \neq 0\}$.

$\triangleleft$ *Solució.* És oberta, ja que és la intersecció de tres oberts. $\triangleright$

(f) $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2+y^2 \leq 2\}$.

$\triangleleft$ *Solució.* No és ni obert ni tancat. $\overline{F} = \overline{\mathcal{B}}^2_{\sqrt{2}}(0,0) \setminus \mathcal{B}^2_1(0,0) \supset F$ per tant no és tancat. L'interior de $F$ és $\mathcal{B}^2_{\sqrt{2}}(0,0) \setminus \overline{\mathcal{B}}^2_1(0,0) \subset F$ per tant no és obert. $\triangleright$

(g) $G = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 1,\, \dfrac{x^2+y^2}{x} < 2\right\}$.

$\triangleleft$ *Solució.* És la intersecció d'oberts, per tant, és obert. $\triangleright$

# 3 Continuïtat a $\mathbb{R}^n$ (3h T, 2h P)

Es comença amb la definició norma i distància a $\mathbb{R}^n$ per poder definir bola a $\mathbb{R}^n$ i obert a $\mathbb{R}^n$.

1. Sigui $x = (x_1, \ldots, x_n)$ punt de $\mathbb{R}^n$. La norma d'$x$ es defineix $||x|| := \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}$ i és la distància del punt $x$ a l'origen. (Teorema de Pitàgoras. Mostrar-ho a $\mathbb{R}^2$).
2. Donats $x, y \in \mathbb{R}^n$, la distància de $x$ a $y$ és $\mathrm{dist}(x,y) := ||x-y||$ (Teorema de Pitàgoras. Mostrar-ho a $\mathbb{R}^2$).
3. $\mathcal{B}^n_r(y)$ és la bola $n$-dimensional oberta de radi $r$ centrada en el punt $y$. És el conjunt de punts que estan a distància menor que $r$ del punt $y$.
4. $\Omega$ és un obert de $\mathbb{R}^n$ si per cada punt de $\Omega$, podem trobar un bola oberta centrada en aquest punt i de radi prou petit (que, en general, dependrà del punt) de manera que aquesta estigui totalment continguda en $\Omega$.

**Definició 3.1** (Funció vectorial de diverses variables)**.** $f = (f_1, \ldots, f_m) : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $\Omega$ obert; on $f_j$ són *funcions escalars*, i.e., $f_j : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $\forall\, j = 1, \ldots, m$.

**Exemple 3.1.** $f(x,y,z) = (\sin(xy), z^2 + x + 3y)$. Aquí $\Omega = \mathbb{R}^3$, $f_1(x,y,z) = \sin(xy)$ i $f_2(x,y,z) = z^2+x+3y$.

**Definició 3.2** (Domini i Imatge)**.**

- Domini: $\mathcal{D}(f) = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \in \mathbb{R}^m\}$.

- Imatge: (o Rang) $\mathcal{R}(f) = \{y \in \mathbb{R}^m : \exists\, x \in \mathcal{D}(f) \text{ tal que } y = f(x)\}$.

**Exemple 3.2.** $f(x) = (\ln(||x||), \ln(1 - ||x||))$ amb $x \in \mathbb{R}^n$. Llavors:

1. $\mathcal{D}(f) = \mathcal{B}_1^n(0) \setminus \{0\}$.
2. $\mathcal{R}(f) = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : y_1 \in (-\infty, 0),\ y_2 = \ln(1 - e^{y_1})\}$.

**Definició 3.3** (Gràfica)**.** $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $\mathcal{G}(f) = \{(x, f(x)) : x \in \mathcal{D}(f)\} \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$.

**Exemple 3.3.**

1. $f : \mathcal{B}_1^2(0,0) \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ donada per $(x,y) \in \mathcal{B}_1^2(0,0) \mapsto a^2x^2 + b^2y^2$ amb $a \neq b$. La seva gràfica és un paraboloïde el·líptic.
2. $f : \mathcal{B}_1^2(0,0) \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ donada per $(x,y) \in \mathcal{B}_1^2(0,0) \mapsto a^2x^2 - b^2y^2$. La seva gràfica és una "sella".

**Definició 3.4** (Conjunts de nivell)**.** Sigui $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $c \in \mathcal{R}(f)$. Llavors, el conjunt de nivell es defineix com $L_c(f) := \{x \in \mathcal{D}(f) : f(x) = c\}$.

**Remarca 3.1.** Quan $n = 2$ i $m = 1$ els conjunts de nivell s'anomenen *corbes de nivell*, quan $n = 3$ i $m = 1$ s'anomenen *superfícies de nivell*. En general, quan $m = 1$ s'anomenen *hipersuperfícies de nivell*.

**Exemple 3.4.**

1. Les corbes de nivell de $f(x,y) = x^2 - y^2$ són hipèrboles.
2. Les superfícies de nivell de $f(x,y,z) = 3x^2 + y^2 + 4z^2$ són el·lipsoides.

*Límits de funcions d'una variable.* Abans d'introduir el concepte de límit per a funcions definides en dominis de $\mathbb{R}^n$ (Definició 3.5), recordem el concepte de límit en dimensió 1: donada una funció $f : (A,B) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i $a \in (A,B)$, llavors:

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \iff \forall\, \epsilon > 0, \exists\, \delta = \delta(\epsilon) > 0 \text{ tal que } x \in (a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\} \implies f(x) \in (L-\epsilon, L+\epsilon).$$

És a dir, donat un intèrval de radi $\epsilon$ centrat en el punt $L$, sempre podem trobar un intèrval de radi $\delta = \delta(\epsilon)$ centrat en el punt $a$, de manera que si un punt pertany a aquest intèrval i NO és $a$, llavors la seva imatge pertany a l'intèrval de radi $\epsilon$ centrat en el punt $L$. Dit d'una altra manera, si $x$ està a distància d'$a < \delta$, pero estrictament positiva, llavors $f(x)$ està a distància d'$L < \epsilon$.

**Exemple 3.5.** $\lim_{x\to 1} x^2 = 1$. Fixem $\epsilon > 0$, llavors per $|x-1| < \delta$ tenim

$$|x^2 - 1| = |x-1||x+1| < \delta|x+1| < 3\delta = \epsilon,$$

per tant, només cal triar $\delta(\epsilon) = \epsilon/3$.

**Definició 3.5** (Límit en $\mathbb{R}^n$)**.** Sigui $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, funció vectorial, $f = (f_1, \ldots, f_m)$, $\Omega$ obert i $a \in \overline{\Omega}$. Llavors:

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \iff \forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, \delta = \delta(\epsilon) > 0 \text{ tal que } x \in \mathcal{B}_\delta^n(a) \setminus \{a\} \implies f(x) \in \mathcal{B}_\epsilon^m(L)\,.$$

**Remarca 3.2.** Notem que el valor de $f(a)$ *no* juga cap paper en la definició 3.5. Modificar el seu valor no afecta ni l'existència ni el valor del límit. De fet no cal ni tan sols que $f$ estigui definida en $a$!

**Exemple 3.6.** $\lim\limits_{(0,0)} \dfrac{\sin(x^2y^2)}{x^2+y^4} = 0$ [2]. Efectivament, fixem $\epsilon > 0$, llavors per $(x,y) \in \mathcal{B}^2_\delta(0,0)$ tenim,

$$\operatorname{dist}\left(\frac{\sin(x^2y^2)}{x^2+y^4}, 0\right) = \left|\frac{\sin(x^2y^2)}{x^2+y^4}\right| \leq \frac{x^2y^2}{x^2+y^4} \leq y^2 \leq \operatorname{dist}^2((x,y),(0,0)) < \delta^2.$$

Triem doncs $\delta = \sqrt{\epsilon}$.

**Exercici 3.1.** Usant la definició 3.5 veure que la funció $f(x,y) = \dfrac{x^2\cos(y) + xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ tendeix a zero a l'origen.

$\triangleleft$ *Solució.* Es comprova que la definició es satisfà agafant, per exemple, $\delta(\epsilon) = \epsilon/2$. $\triangleright$

Recordem també que la relació $|ab| \leq \frac{1}{2}(a^2+b^2)$ pot ser molt útil per a calcular límits. Ho il·lustrem amb l'exemple següent:

**Exemple 3.7.** Considerem la funció $f(x,y) = \dfrac{x^2y^3}{x^4+y^4}$ i volem veure que el seu límit a l'origen és zero. Així, usem que $2x^2y^2 \leq x^4 + y^4$ per a obtenir l'acotació,

$$|f(x,y)| \leq \frac{|y|}{2} \leq \frac{\delta}{2} = \epsilon.$$

**Exemple 3.8** (una mica més complicat)**.** Sigui la funció $f(x,y) = \dfrac{x^4y}{x^6+y^2}$. Ara usem la descomposició

$$x^4|y| = |x|^{7/2}|x|^{1/2}|y| \leq \frac{1}{2}\left(|x|^7 + |x|y^2\right).$$

Llavors tindrem

$$|f(x,y)| \leq \frac{|x|^7}{2(x^6+y^2)} + \frac{|x|y^2}{2(x^6+y^2)} \leq |x| \leq \delta = \epsilon,$$

on hem usat $\dfrac{1}{x^6+y^2} \leq \dfrac{1}{x^6}$ i $\dfrac{1}{x^6+y^2} \leq \dfrac{1}{y^2}$.

**Exemple 3.9.** Demostrem que $\lim\limits_{(0,0)} \left(1 + y^{1/3} - (7x^3 + 32y^4)^{1/5}\right) = 1$. En efecte, Fixem-nos que tenim $7x^3 + 32y^4 \leq 32||(x,y)||$ i a més, per $0 < z < 1$ tenim $z^{1/3} \leq z^{1/5}$. Així doncs,

$$\left|y^{1/3} - \left(7x^3 + 32y^4\right)^{1/5}\right| \leq ||(x,y)||^{1/3} + 2||(x,y)||^{1/5} \leq 3||(x,y)||^{1/5} \leq 3\delta^{1/5} = \epsilon.$$

**Remarca 3.3.** A $\mathbb{R}$ el límit de $f(x)$ en $x = a$ existeix si i només si els límits laterals,

$$\lim_{x\to a^+} f(x) \quad \text{i} \quad \lim_{x\to a^-} f(x)$$

existeixen tots dos i coincideixen. En canvi, a $\mathbb{R}^n$ hi ha infinites maneres d'arribar a $x = a$ (per rectes, paràboles, etc.) Així doncs, si el límit de $f$ en $x = a$ existeix, llavors per a tota corba a $\mathbb{R}^n$,

$$\begin{array}{rcl} \sigma : (A,B) \subseteq \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ t & \longrightarrow & \sigma(t) = (\sigma_1(t), \ldots, \sigma_n(t)), \end{array} \text{ el límit } \lim_{t\to 0} f(\sigma(t)) \text{ existeix i val el mateix.}$$

Per contra, si per a dues corbes $\sigma_1$ i $\sigma_2$ de $\mathbb{R}^n$ tal que $\sigma_1(0) = \sigma_2(0)$, $\lim\limits_{t\to 0} f(\sigma_1(t)) \neq \lim\limits_{t\to 0} f(\sigma_2(t))$, el límit $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ no existeix.

[2] En general, quan estigui clar respecte de quines variables prenem els límits, indicarem només el punt cap al que hi tendeixen. Així, escrivim $\lim_{(0,0)}$ en comptes de $\lim_{(x,y)\to(0,0)}$.

**Exemple 3.10** (És essencialment l'exercici 9 de la col·lecció de problemes)**.** Discutiu el límit a l'origen de

$$f(x,y) = \frac{x^2y}{x^4+y^2}, \quad \text{i} \quad f(x,y) = \frac{xy^2}{x^4+y^2}.$$

◁ *Solució.* La primera funció NO té límit a l'origen (només cal pendre la paràbola $y = x^2$. En canvi, per a la segona tenim $\dfrac{|x|y^2}{x^4+y^2} \leq |x|$, per tant a l'origen el límit és zero. ▷

**Exemple 3.11.** Considereu la funció $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x^2+y}$, si $x^2+y \neq 0$ i $f(x,y) = 0$, si $x^2+y = 0$. Per a estudiar el seu límit quan $(x_1,x_2) \to (0,0)$, triem les corbes $\sigma_1(t) = (t,t)$ i $\sigma_2(t) = (t, -t^2+t^6)$. Aleshores,

$$\lim_{t\to 0} f(\sigma_1(t)) = 0, \qquad \lim_{t\to 0} f(\sigma_2(t)) = 1$$

i, per tant, es conclou que el $\lim\limits_{(0,0)} f(x_1,x_2)$ no existeix.

**Proposició 3.1.** *Donat $p : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$; $x \mapsto p(x)$ un monomi*[3] *de grau $m$ i coeficient* 1*. Llavors, si $n > 1$*

$$\lim_{x\to 0} \frac{p(x)}{\|x\|^k} = \begin{cases} 0, & \text{si } m > k, \\ \nexists, & \text{si } m \leq k. \end{cases}$$

*Demostració.* Com $|x_j| \leq \|x\|$, $\forall\, j = 1,\ldots,n$ tenim que $\dfrac{|p(x)|}{\|x\|^k} \leq \|x\|^{m-k} \leq \delta^{m-k}$. Doncs si $m > k$ ja està. D'altra banda:

- Si $m < k$ prenem la recta $\sigma(t) = t(1,\ldots,1)$. Clarament,

$$\lim_{t\to 0} \frac{p(\sigma(t))}{\|\sigma(t)\|^k} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{n^{k/2}} t^m |t|^{-k}$$

  i aquest últim límit no existeix.

- Si $m = k$ :
  - Per $\sigma(t) = t(1,\ldots,1)$ tenim $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{p(\sigma(t))}{\|\sigma(t)\|^k}$ només existeix si $k$ és parell, i en aquest cas val $1/n^{k/2}$.
  - En canvi, per $\bar{\sigma}(t) = t(1,0,\ldots,0)$ s'obté: $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{p(\bar{\sigma}(t))}{||\bar{\sigma}(t)||^k} = 0$ o bé no existeix.

  Per tant, en aquest cas, el límit tampoc no existeix. □

**Definició 3.6** (Continuïtat)**.** Sigui $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m) : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, amb $\Omega$ obert i $a \in \Omega$. Tenim:

(1) $f$ contínua en $x = a \iff \lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

(2) $f$ contínua en $\Omega \iff f$ és contínua per a cada $x \in \Omega$.

[3] És a dir $p(x)$ és una funció de la forma, $p(x) = \alpha x_1^{m_1} x_2^{m_2} \cdots x_n^{m_n}$, on $\alpha \in \mathbb{R}$ i els exponents $m_1, m_2, \ldots, m_n$ són enters no negatius amb $m_1 + m_2 + \cdots + m_n = m$.

**Criteris de continuïtat.** Amb la suma, el producte y la composició de funcions contínues s'obtenen funcions contínues.

**Proposició 3.2** (Propietats de les funcions contínues)**.**

*(i)* $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *amb* $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}^n$ *i* $f$ *contínua a tot* $\mathbb{R}^n$*. Llavors l'anti-imatge d'un obert de* $\mathbb{R}^m$ *és un obert de* $\mathbb{R}^n$ *i l'anti-imatge d'un tancat de* $\mathbb{R}^m$ *és un tancat de* $\mathbb{R}^n$*.*

*(ii)* $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *amb* $f$ *contínua. Llavors la imatge d'un compacte de* $\mathbb{R}^n$ *és un compacte de* $\mathbb{R}^m$*.*

**Exemple 3.12.** El conjunt $A = \{x \in \mathbb{R}^n : 1 < ||x||^3 < 2\}$ és obert. En efecte, si considerem la funció $f(x) = ||x||^3$ llavors $A$ és l'anti-imatge de $(1, 2)$ que és un obert de $\mathbb{R}$.

**Exemple 3.13.** $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$; $f(x) = E(x)$ funció part entera de $x$ que, recordem, es definex com

$$E(x) := \sup \{z \in \mathbb{Z} : z \leq x\} .$$

Llavors si triem $\Omega = \{1\}$ resulta que $f^{-1}(\Omega) = [1, 2)$ no és tancat i, per tant, $E(x)$ no és contínua en $\mathbb{R}$.

**Exemple 3.14.** La funció

$$f(x) = \begin{cases} x, & x < 1 \\ 2, & x \geq 1 \end{cases}$$

no és contínua en $\mathbb{R}$, ja que $f([0, 2]) = [0, 1) \cup \{2\}$ no és tancat i, per tant, tampoc no és compacte.

**Remarca 3.4.** La Proposició 3.2*(i)* justifica el que vàrem fer per resoldre l'Exemple 2.2.

**Exercici 3.2** (Exercici 2 de la col·lecció)**.** Doneu el domini de definció de les següents funcions:

(a) $f(x, y) = \dfrac{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}{x^2 + y^2 - 4}$.

$\triangleleft$ *Solució.* $\mathcal{D}(f) = \mathcal{B}^2_3(0, 0) \setminus \partial\mathcal{B}^2_2(0, 0)$. $\triangleright$

(b) $f(x, y) = \sqrt{16 - 4x^2 - y^2}$.

$\triangleleft$ *Solució.* $\mathcal{D}(f)$ és la clausura de l'el·lipse $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{16} \leq 1$. $\triangleright$

(c) $f(x, y) = \left(\ln(xy), \sqrt{4 - x^2 - y^2}\right)$.

$\triangleleft$ *Solució.* $\mathcal{D}(f) = \overline{\mathcal{B}}^2_2(0, 0) \cap (\{(x, y) : x > 0, y > 0\} \cup \{(x, y) : x < 0, y < 0\})$. $\triangleright$

(d) $f(x, y) = \arcsin\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

$\triangleleft$ *Solució.* $\mathcal{D}(f) = \left\{(x, y) : -1 \leq \dfrac{y}{x} \leq 1\right\}$. $\triangleright$

(e) $f(x, y) = \arctan\left(\dfrac{1}{x^2 + y^2}\right)$.

$\triangleleft$ *Solució.* $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. $\triangleright$

(f) $f(x, y) = \sqrt{y - xy - 1}$. *Indicació*: Determineu el conjunt $y - xy - 1 = 0$.

$\triangleleft$ *Solució.* $\mathcal{D}(f) = \left\{(x,y) : x < 1, y \geq \dfrac{1}{1-x}\right\} \bigcup \left\{(x,y) : x > 1, y \leq \dfrac{1}{1-x}\right\}$. $\triangleright$

(g) $f(x,y,z) = \dfrac{x}{\sqrt{9 - x^2 - y^2 - z^2}}$.

$\triangleleft$ *Solució.* $\mathcal{D}(f) = \mathcal{B}_3^3(0,0)$. $\triangleright$

**Exercici 3.3** (Exercici 3 de la col·lecció)**.** Trobeu les corbes de nivell de les següents funcions i digueu quina és la seva imatge.

(a) $f(x,y) = x^2 + y^2$.

$\triangleleft$ *Solució.* Les corbes de nivell són circumferències i $\mathcal{R}(f) = [0,\infty)$. $\triangleright$

(b) $f(x,y) = 4x^2 + y^2$.

$\triangleleft$ *Solució.* Les corbes de nivell són el·lipses i $\mathcal{R}(f) = [0,\infty)$. $\triangleright$

(c) $f(x,y) = x^2 - y$.

$\triangleleft$ *Solució.* Les corbes de nivell són paràboles i $\mathcal{R}(f) = \mathbb{R}$. $\triangleright$

(d) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$, definida per a $(x,y) \neq (0,0)$. *Indicació:* Aïlleu $y$ en termes de $x$ sobre cada corba de nivell.

$\triangleleft$ *Solució.* Despres d'aïllar $y$ (resolent una equació de segon grau) les corbes de nivell surten rectes. Per a veure la imatge, fixem-nos en que $(x-y)^2 \geq 0 \iff x^2 + y^2 \geq 2xy \iff f(x,y) \leq 1/2$. D'altra banda, $(x+y)^2 \geq 0 \iff x^2 + y^2 \geq -2xy \iff f(x,y) \geq -1/2$. Per tant $\mathcal{R}(f) = [-1/2, 1/2]$. $\triangleright$

(e) $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, definida per a $(x,y) \neq (0,0)$. *Indicació:* Feu com a l'apartat *(d)*.

$\triangleleft$ *Solució.* Les corbes de nivell són les rectes $y = \pm\sqrt{\dfrac{1-k}{1+k}}x$, i per tant, $\mathcal{R}(f) = [-1,1]$. $\triangleright$

(f) $f(x,y) = (x^2+y^2)\,\mathrm{e}^{-x^2-y^2}$. *Indicació:* Relacioneu els valors de $f$ amb els de la funció $h(z) = z\mathrm{e}^{-z}$.

$\triangleleft$ *Solució.* De la gràfica de $h$ es dedueix que les corbes de nivell són circumferències i $\mathcal{R}(f) = (-\infty, \mathrm{e}^{-1}]$, ja que $h$ té un ùnic màxim absolut en $z = 1$. $\triangleright$

**Exercici 3.4** (Exercici 8 de la col·lecció)**.** Per a les següents funcions, trobeu valors per a $\delta(\epsilon)$ ("els millors que pogueu") tals que si $\sqrt{x^2+y^2} \leq \delta(\epsilon)$, llavors $|f(x,y) - f(0,0)| \leq \epsilon$. *Indicació:* Recordeu que $|x| \leq \sqrt{x^2+y^2}$.

(a) $f(x,y) = \sqrt[3]{xy}$.

$\triangleleft$ *Solució.* $\delta(\epsilon) = \epsilon^{3/2}$. $\triangleright$

(b) $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ i $f(0,0) = 0$.

$\triangleleft$ *Solució.* $\delta(\epsilon) = \epsilon$. $\triangleright$

(c) $f(x,y) = \dfrac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}$.

◁ *Solució.* $\delta(\epsilon) = \sqrt{\epsilon/2}$. ▷

**Exercici 3.5** (Exercici 11 de la col·lecció)**.** Calculeu (si existeixen) els següents límits.

(a) $\displaystyle\lim_{(0,1)} \frac{\arccos(x/y)}{1+xy}$.

◁ *Solució.* $\pi/2$. ▷

(b) $\displaystyle\lim_{(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$.

◁ *Solució.* No existeix (es comprova per rectes). ▷

(c) $\displaystyle\lim_{(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2}$.

◁ *Solució.* 0. ▷

(d) $\displaystyle\lim_{(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

◁ *Solució.* No existeix (es comprova per rectes). ▷

(e) $\displaystyle\lim_{(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^4+y^4}$.

◁ *Solució.* No existeix (es comprova per rectes). ▷

(f) $\displaystyle\lim_{(0,0)} \frac{\sin(xy)}{x^2+y^2}$.

◁ *Solució.* No existeix (es comprova per rectes). ▷

(g) $\displaystyle\lim_{(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

◁ *Solució.* 0. ▷

(h) $\displaystyle\lim_{(0,0)} xy\ln(x^2+y^2)$. *Indicació:* Proveu primer que $\displaystyle\lim_{z\to 0^+} z^a \ln(z) = 0$, si $a > 0$ —per molt petit que sigui—i feu una identificació adequada de $z$ i una bona tria del valor de $a$.

◁ *Solució.* 0. ▷

(i) $\displaystyle\lim_{(0,0,0)} \frac{xyz}{x^2+y^2+z^2}$.

◁ *Solució.* 0. ▷

(j) $\displaystyle\lim_{(0,0)} \frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$, definida si $x, y > 0$ i $x \neq y$.

◁ *Solució.* 0. ▷

(k) $\displaystyle\lim_{(1,1)} \tan\left(\frac{\pi}{x^2+y^2}\right)$.

◁ *Solució.* No existeix. ▷

**A problemes, fer els exercicis 13 i 14 de la col·lecció:**

**Exercici 3.6** (Problema 13 de la col·lecció)**.** Sigui $f(x,y) = \dfrac{\cos(xy)-1}{x^2y^2}$, si $xy \neq 0$ i $f(x,y) = a$ si $xy = 0$.

(a) Per a quin valor de $a \in \mathbb{R}$ és $f$ contínua en $(0,0)$?
$\triangleleft$ *Solució.* $a = 1/2$. Per Taylor d'una variable. $\triangleright$

(b) Per a aquest valor de $a$ discutiu la continuïtat de $f$ en $\mathbb{R}^2$.
$\triangleleft$ *Solució.* Contínua a tot $\mathbb{R}^2$. $\triangleright$

**Exercici 3.7** (Problema 14 de la col·lecció)**.** Per a les següents funcions definides a trossos discutiu la seva continuïtat en $\mathbb{R}^2$.

(a) $f(x,y) = \dfrac{\sin(xy)}{xy}$ si $xy \neq 0$ i $f(x,y) = 1$ si $xy = 0$.
$\triangleleft$ *Solució.* Contínua a tot $\mathbb{R}^2$. $\triangleright$

(b) $f(x,y) = \max\{x,y\}$ si $x > 0$ i $f(x,y) = 0$ si $x \leq 0$.
$\triangleleft$ *Solució.* Contínua a $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,y) : y \geq 0\}$. $\triangleright$

(c) $f(x,y) = x$ si $|x| \leq |y|$ i $f(x,y) = y$ si $|x| > |y|$.
$\triangleleft$ *Solució.* Contínua a $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,-x) : x \in \mathbb{R}\}$. $\triangleright$

(d) $f(x,y) = x$ si $x^2+y^2 \leq 1$ i $f(x,y) = y$ si $x^2+y^2 > 1$.
$\triangleleft$ *Solució.* És discontínua a $\partial\mathcal{B}_1^2(0,0) \setminus \{(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}), (-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})\}$. $\triangleright$

# 4 Derivabilitat a $\mathbb{R}^n$ (2h T, 2h P)

Sigui $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funció escalar, i sigui $a \in \Omega$.

**Notació** (Derivada parcial)**.**

- Newton-Lagrange (1671): $f_{x_j}(a)$
- Leibniz (1684): $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a) \equiv \partial_{x_j} f(a) \equiv \partial_j f(a)$
- Arbogast (1800): $D_{x_j} f(a) \equiv D_j f(a)$

**Definició 4.1** (Derivada parcial)**.** Sigui $\tilde{f} : \mathcal{B}_\epsilon^1(a_j) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x_j \to \tilde{f}(x_j) := f(a_1, \ldots, x_j, \ldots, a_n)$. Definim la derivada parcial de $f$ respecte $x_j$ en el punt $a$ com:

$$\partial_j f(a) := \tilde{f}'(a_j),$$

on $\tilde{f}'(a_j)$ és la derivada d'una funció real d'una variable (vegi's Càlcul I).

**Remarca 4.1.** Aquesta definició és equivalent a:

$$\partial_j f(a) := \lim_{t\to 0} \frac{f(a_1, \ldots, a_j + t, \ldots, a_n) - f(a)}{t}.$$

**Exemple 4.1.** $f(x,y) = \dfrac{y-\sin(y)}{x^2+y^2}$, $\quad f(0,0)=0$. Llavors:

1. $\partial_1 f(0,0) = \lim_{t\to 0} \dfrac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{0}{t^3} = 0.$

2. $\partial_2 f(0,0) = \lim_{t\to 0} \dfrac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{t-\sin t}{t^3} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{t^3/6}{t^3} = \dfrac{1}{6}.$

**Exercici 4.1.** Calculeu les derivades parcials de $f(x,y) = x\mathrm{e}^{y\sin x}$ en el punt $\left(\dfrac{\pi}{2}, 0\right)$.

◁ *Solució.* $\partial_x f(\pi/2,0) = 1$, $\partial_y f(\pi/2,0) = \pi/2$. ▷

**Remarca 4.2.** Sigui $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, funció vectorial, $f = (f_1,\dots,f_m)$, $\Omega$ obert i $a \in \Omega$. La seva derivada parcial respecte $x_j$ en el punt $a$ és el següent vector columna

$$\partial_j f(a) := (\partial_j f_1(a), \dots \partial_j f_m(a))^\top.$$

**Cas prticular** (Corba a $\mathbb{R}^n$)**.** És una aplicació, $t \in \sigma : (a,b) \subset \mathbb{R} \mapsto \sigma(t) = (\sigma_1(t),\dots,\sigma_n(t)) \in \mathbb{R}^n$. Aleshores, $\sigma'(t)$. És el vector tangent a la corba.

**Definició 4.2** (Derivada d'una funció escalar)**.** Sigui $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, funció escalar, amb $\Omega$ obert i sigui $a \in \Omega$. La seva derivada

$$\nabla_x f(a) \equiv \nabla f(a) \equiv D_x f(a) \equiv Df(a) := (\partial_1 f(a), \dots, \partial_n f(a)), \tag{1}$$

s'anomena *gradient* de $f$ en el punt $a$, i és un vector fila.

**Definició 4.3.** Si $a$ satisfà $\nabla f(a) = 0$ direm que és un *punt crític* de $f$.

**Definició 4.4** (Derivada d'una funció vectorial)**.** Sigui $f = (f_1,\dots,f_m) : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, funció vectorial, $f = (f_1,\dots,f_m)$, $\Omega$ obert i $a \in \Omega$. Aleshores la matriu,

$$J_f(a) \equiv Df(a) := \left(\nabla f_1(a), \dots, \nabla f_m(a)\right)^\top,$$

s'anomena *matriu jacobiana* de $f$ en el punt $a$, i és un matriu amb $m$ files i $n$ columnes. Més precisament, a la $j$-èssima fila hi ha $\nabla f_j(a)$.

**Exercici 4.2.** Calculeu la matriu jacobiana de $f(x,y) = (e^{x+y} + y, xy^2, \cos(xy^2))$.

◁ *Solució.* $J_f(x,y) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{x+y} & \mathrm{e}^{x+y}+1 \\ y^2 & 2xy \\ -\sin(xy^2) & -2y\sin(xy^2) \end{pmatrix}.$ ▷

**Remarca 4.3.** A $\mathbb{R}$ si la funció $f$ és contínua en $x_0$, i.e., si existeix $f'(x_0)$, llavors $f$ és contínuaen $x_0$. En canvi, en dimensió mes gran que 1, l'existència de totes les derivades parcials en un punt **no** implica que la funció sigui contínua en aquest punt.

**Exemple 4.2.** $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$, i $f(0,0) = 0$. Clarament $\partial_1 f(0,0) = \partial_2 f(0,0) = 0$, però $f$ no és contínua a $(0,0)$. (Useu dues rectes de diferent pendent que passin per l'origen).

**Definició 4.5** (L'operador $\nabla$)**.** A $\mathbb{R}^n$, l'operador $\nabla$ es defineix de la següent forma:

$$\nabla = (\partial_1, \dots, \partial_n).$$

Aplicat a una funcio escalar $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ s'obté el seu gradient. Però també es pot aplicar a funcions vectorials $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, de la següent forma:

$$\langle \nabla, f(x) \rangle = \sum_{j=1}^n \partial_j f_j(x),$$

obtenint l'anomenada *divergència* de $f$. (Es pot entendre com el producte escalar de $\nabla$ amb $f$).

**A problemes, fer l'exercici 20 de la col·lecció:**

**Exercici 4.3** (Exercici 20 de la col·lecció)**.** Calculeu per derivació directa les derivades parcials primeres de les següents funcions.

(a) $f(x,y) = x^{y^x}$.

$\triangleleft$ *Solució.* $\partial_x f(x,y) = x^{y^x} y^x \left( \ln(x)\ln(y) + \dfrac{1}{x} \right), \quad \partial_y f(x,y) = x^{y^x} y^x x y^{x-1} \ln(x).$ $\triangleright$

(b) $f(x,y) = x^{xy}$.

$\triangleleft$ *Solució.* $\partial_x f(x,y) = x^{yx}\,(y\ln(x) + y), \quad \partial_y f(x,y) = x^{yx} x \ln(x).$ $\triangleright$

(c) $f(x,y) = (x^2+y^2)^x$.

$\triangleleft$ *Solució.* $\partial_x f(x,y) = (x^2+y^2)^x \left( \ln(x^2+y^2) + \dfrac{2x^2}{x^2+y^2} \right), \quad \partial_y f(x,y) = 2xy(x^2+y^2)^{x-1}.$ $\triangleright$

(d) $f(x,y) = xy\ln(x^2+y^2)$.

$\triangleleft$ *Solució.* $\partial_x f(x,y) = y\ln(x^2+y^2) + \dfrac{2x^2y}{x^2+y^2}, \quad \partial_y f(x,y) = x\ln(x^2+y^2) + \dfrac{2y^2x}{x^2+y^2}.$ $\triangleright$

(e) $f(x,y) = \ln(\sqrt{x^2+y^2})$

$\triangleleft$ *Solució.* $\partial_x f(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}, \quad \partial_x f(x,y) = \dfrac{y}{x^2+y^2}.$ $\triangleright$

(f) $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

$\triangleleft$ *Solució.* $\partial_x f(x,y) = -\dfrac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}, \quad \partial_y f(x,y) = -\dfrac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}}.$ $\triangleright$

(g) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$.

$\triangleleft$ *Solució.* $\partial_x f(x,y) = \dfrac{y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}, \quad \partial_y f(x,y) = \dfrac{x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}.$ $\triangleright$

(h) $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$.

$\triangleleft$ *Solució.* $\partial_x f(x,y) = \dfrac{-4xy^2}{(x^2-y^2)^2}, \quad \partial_x f(x,y) = \dfrac{4yx^2}{(x^2-y^2)^2}.$ $\triangleright$

(i) $f(x,y) = \dfrac{\cos x + \mathrm{e}^{xy}}{x^2+y^2}$.

$\triangleleft$ *Solució.*

$$\partial_x f(x,y) = \frac{-\sin x + y\mathrm{e}^{xy}}{x^2+y^2} - 2x\,\frac{\cos x + \mathrm{e}^{xy}}{\left(x^2+y^2\right)^2},$$

$$\partial_y f(x,y) = \frac{(x^3 + xy^2 - 2\,y)\,\mathrm{e}^{xy} - 2\,y\cos x}{\left(x^2+y^2\right)^2}.$$

$\triangleright$

(j) $f(x,y,z) = \mathrm{e}^x \tan(y^2 z)$.

◁ *Solució.*

$$
\begin{aligned}
\partial_x f(x,y,z) &= \mathrm{e}^x \tan\left(y^2 z\right), \\
\partial_y f(x,y,z) &= 2yz\,\mathrm{e}^x \left(1 + \tan^2\left(y^2 z\right)\right), \\
\partial_z f(x,y,z) &= y^2 \mathrm{e}^x \left(1 + \tan^2\left(y^2 z\right)\right).
\end{aligned}
$$
▷

(k) $f(x,y,z) = x \sinh\left(\dfrac{y}{z}\right)$.

◁ *Solució.* $\partial_x f(x,y,z) = \sinh\left(\dfrac{y}{z}\right), \quad \partial_y f(x,y,z) = \dfrac{x}{z}\cosh\left(\dfrac{y}{z}\right), \quad \partial_z f(x,y,z) = -\dfrac{xy}{z^2}\cosh\left(\dfrac{y}{z}\right)$. ▷

**A problemes, fer els exercicis 16, 21 i 23 de la col·lecció:**

**Exercici 4.4** (Exercici 16 de la col·lecció)**.** Aplicant la definició calculeu (si existeixen) les derivades parcials primeres de les següents funcions en el $(0,0)$.

(a) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ i $f(0,0) = 0$.

◁ *Solució.* $\partial_x f(0,0) = \partial_y f(0,0) = 0$. ▷

(b) $f(x,y) = x\ln(x^2+y^2)$ si $(x,y) \neq (0,0)$ i $f(0,0) = 0$.

◁ *Solució.* No existeix $\partial_x f(0,0)$, $\partial_y f(0,0) = 0$. ▷

(c) $f(x,y) = (x^2+y^2)^x$ si $(x,y) \neq (0,0)$ i $f(0,0) = 1$.

◁ *Solució.* No existeix $\partial_x f(0,0)$, $\partial_y f(0,0) = 0$. ▷

**Exercici 4.5** (Exercici 21 de la col·lecció)**.** Calculeu les derivades parcials primeres de les següents funcions i doneu la seva matriu jacobiana.

(a) $f(x,y) = (\mathrm{e}^{xy} + y, y^2 x)$.

◁ *Solució.* $J_f(x,y) = \begin{pmatrix} y\,\mathrm{e}^{xy} & x\,\mathrm{e}^{xy}+1 \\ y^2 & 2xy \end{pmatrix}$. ▷

(b) $f(x,y) = (\cos(x+2y), y\mathrm{e}^{x+y}, \cosh(xy^2))$.

◁ *Solució.* $J_f(x,y) = \begin{pmatrix} -\sin(x+2y) & -2\sin(x+2y) \\ y\,\mathrm{e}^{x+y} & (y+1)\,\mathrm{e}^{x+y} \\ y^2\sinh(xy^2) & 2xy\sinh(xy^2) \end{pmatrix}$. ▷

(c) $f(x,y,z) = (z\tan(x^2+y^2), xy\ln(z))$.

◁ *Solució.* $J_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2xz\sec(x^2+y^2) & 2yz\sec(x^2+y^2) & \tan(x^2+y^2) \\ y\ln(z) & x\ln(z) & \dfrac{xy}{z} \end{pmatrix}$. ▷

**Exercici 4.6** (Exercci 23 de la col·lecció)**.** D'acord amb la llei dels gasos perfectes tenim la relació $PV = kT$, on $P$ és la pressió, $V$ el volum, $T$ la temperatura i $k$ una constant. Demostreu que

$$\frac{\partial T}{\partial P}\frac{\partial P}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial T} = -1,$$

on $\dfrac{\partial T}{\partial P}$ vol dir que aïllem $T$ com a funció de $(P, V)$ i derivem respecte de $P$. Ídem per a les altres.

◁ *Solució.* Aïllant de l'equació $T$, $P$ i $V$ respecte de les altres dues variables i derivant les expressión correspo- nents respecte de $P$, $V$ i $T$ s'obté: $\partial_P T = V/k$, $\partial_V P = -kT/V^2$ i $\partial_T V = k/P$, d'on resulta que el producte d'aquestes tres derivades parcials satisfà $\partial_P T \partial_V P \partial_T V = -KT/(VP) = -1$. ▷

# 5 Funcions de Classe $\mathcal{C}^m$ (1h T, 1h P)

Sigui $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Analogament com s'ha definit $\partial_{x_j} f(a)$ podem definir la derivada parcial d'ordre $m$:

$$\partial^m_{x_{\sigma(1)}\cdots x_{\sigma(m)}} f(a), \qquad \text{on } k \in \{1, \ldots, m\} \mapsto \sigma(k) \in \{1, \ldots, n\}[4]$$

on, *per conveni*, s'entendrà que les derivades es fan per ordre de proximitat a $f$. Així, per exemple,

$$\partial^2_{yx} f = \partial_y (\partial_x f).$$

**Exercici 5.1.** Calculeu totes les derivades parcials de segon ordre de $f(x, y) = x^3 + xy + y\sin(x)$.

◁ *Solució.* $\partial^2_{x^2} f(x, y) = 6x - y\sin x$, $\partial^2_{xy} f(x, y) = \partial^2_{yx} f(x, y) = 1 + \cos x$, $\partial^2_{y^2} f(x, y) = 0$. ▷

**Definició 5.1.** Direm que $f \in \mathcal{C}^m(\Omega)$ ($f$ és de classe $\mathcal{C}^m(\Omega)$) si per a qualsevol $\sigma : \{1, \ldots, m\} \to \{1, \ldots, n\}$, la funció derivada parcial d'ordre $m$, $\partial^m_{x_{\sigma(1)}\cdots x_{\sigma(m)}} f$, és contínua a $\Omega$. En particular, si $f$ és contínua en $\Omega$ escriurem $f \in \mathcal{C}^0(\Omega)$.

**Teorema 5.1** (Schwarz)**.** *$f \in \mathcal{C}^2(\Omega) \Rightarrow \partial^2_{x_k x_j} f = \partial^2_{x_j x_k} f$ per a tot $j, k \in \{1, \ldots, n\}$. En general,*

$$f \in \mathcal{C}^m(\Omega) \Longrightarrow \partial^m_{x_{\sigma(1)}\cdots x_{\sigma(m)}} f = \partial^m_{x_{p(\sigma(1))}\cdots x_{p(\sigma(m))}} f,$$

*per a tota permutació $p : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ i tota $\sigma : \{1, \ldots, m\} \to \{1, \ldots, n\}$.*

**Exercici 5.2** (Problema 24 de la col·lecció)**.** Per a quins valors de $a$, $b$, $c$ i $d$ pot existir una funció $f(x, y)$ tal que $\dfrac{\partial f}{\partial x} = ax + by$ i $\dfrac{\partial f}{\partial y} = cx + dy$? Per a aquests valors calculeu totes les possibles solucions per a $f$.

◁ *Solució.* $b = c$ i $f(x, y) = \dfrac{a}{2}x^2 + bxy + \dfrac{d}{2}y^2$. ▷

**Teorema 5.2.** *$f \in \mathcal{C}^m(\Omega) \Rightarrow f \in \mathcal{C}^{m-s}(\Omega)$ amb $0 \leq s \leq m$. Equivalentment,*

$$f \notin \mathcal{C}^m(\Omega) \Longrightarrow f \notin \mathcal{C}^{m+s}(\Omega)$$

*amb $s \geq 0$. En particular, $\mathcal{C}^1$ implica contínua; equivalentment, no contínua implica no $\mathcal{C}^1$.*

**Exercici 5.3.** Comproveu que la funció $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$, i $f(0, 0) = 0$ no és $\mathcal{C}^1$ a l'origen.

**Definició 5.2** (Laplacià)**.** Si $f$ és una funció escalar, el seu Laplacià es defineix com la divergència del seu gradient, i.e.:

$$\Delta f = \langle \nabla, \nabla f \rangle.$$

**Exercici 5.4.** Demostreu que $\Delta\langle x, \nabla f\rangle = 2\Delta f + \langle x, \nabla \Delta f\rangle$. (És senzill però llarg).

**A problemes, fer l'exercici 25 de la col·lecció:**

**Exercici 5.5** (Problema 25 de la col·lecció)**.** Considereu la funció $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

(a) Aplicant la defінció de derivada parcial calculeu $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$.

$\triangleleft$ *Solució.* $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$. $\triangleright$

(b) Calculeu $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ si $(x,y) \neq (0,0)$.

$\triangleleft$ *Solució.* $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{y^3}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$. $\triangleright$

(c) Demostreu que no existeix $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$.

$\triangleleft$ *Solució.* Per rectes surt molt fàcil. $\triangleright$

(d) Quin és el subconjunt $D \subset \mathbb{R}^2$ més gran on tenim que $f \in C^1(D)$?
$\triangleleft$ *Solució.* $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. $\triangleright$

**A problemes, fer l'exercici 27 de la col·lecció:**

**Exercici 5.6.** Considereu la funció $f(x,y) = xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ i $f(0,0) = 0$.

(a) Calculeu $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ i $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$, si $(x,y) \neq (0,0)$.
$\triangleleft$ *Solució.* $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{y(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{x(x^4-4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}$ $\triangleright$

(b) Usant la definició calculeu $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ i $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.
$\triangleleft$ *Solució.* $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. $\triangleright$

(c) Usant la definició calculeu $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ i $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.

*Indicació.* Feu servir que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,h) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{h}$.

$\triangleleft$ *Solució.* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = -1$. $\triangleright$

(d) Quin és el subconjunt $D \subset \mathbb{R}^2$ més gran on tenim que $f \in C^2(D)$?
$\triangleleft$ *Solució.* $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. $\triangleright$

(e) Quin és el subconjunt $D \subset \mathbb{R}^2$ més gran on tenim que $f \in C^\infty(D)$?
$\triangleleft$ *Solució.* $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. $\triangleright$

# 6 La regla de la cadena (1h T, 1h P)

A $\mathbb{R}$ la regla de la cadena diu el següent: donades dues funcions derivables, $f : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ i $g : B \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, amb $A$ i $B$ oberts, llavors per a cada $x \in B$, si $g(x) \in B$, és $(f \circ g)'(x) = f'(g(x))\, g'(x)$. Aquest resultat es pot generalitzar per a funcions de vàries variables.

**Proposició 6.1** (Regla de la cadena)**.** *Donades dues funcions vectorials, $f : U \subseteq \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^k$, amb $U$ obert, $f \in \mathcal{C}^1(U)$, i $g : V \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, amb $V$ obert, $g \in \mathcal{C}^1(V)$,*

$$J_{f \circ g}(x) = J_f(g(x)) \cdot J_g(x).$$

*per a tot $x \in V$ amb $g(x) \in U$. En components:*

$$\partial_j (f \circ g)_r (x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\ell=1}^{m} \partial_\ell f_r (g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_m(x_1, \ldots, x_m))\, \partial_j g_\ell (x_1, \ldots, x_n),$$

*per a cada $j = 1, \ldots, n$ i per a cada $r = 1, \ldots, k$.*

*Si definim $F := f \circ g : W \longrightarrow \mathbb{R}^k$, amb $W = V \cap g^{-1}(U)$ aleshores,*

$$J_{f \circ g} = J_f g \cdot J_g.$$

*En components,*

$$\partial_j F_r = \partial_j (f \circ g)_r = \sum_{\ell=1}^{m} \partial_\ell (f_r \circ g)\, \partial_j g_\ell,$$

*per a cada $j = 1, \ldots, n$ i per a cada $r = 1, \ldots, k$.*

**Cassos concrets:**

$f : \Omega^* \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}; y \to f(y)$ funció escalar, i $g : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m; x \to g(x)$ funció vectorial.

$$\tilde{f}(x) := f \circ g(x) = f(g(x)) = f(g_1(x), \ldots, g_m(x)),$$

llavors:

De la regla de la cadena deduïm:

$$\nabla_x \tilde{f}(x) = \nabla_y f(g(x)) \cdot J_x g(x).$$

Per tant,

$$\partial_{x_j} \tilde{f}(x) = \langle \nabla_y f(g(x)), (\partial_{x_j} g(x))^T \rangle = \nabla_y f(g(x)) \cdot \partial_{x_j} g(x) = \sum_{l=1}^{m} \partial_{y_l} f(g(x)) \partial_{x_j} g_l(x).$$

**Exercici:** $f(u, v, w) = u^2 + v^2 - w$, $g(x, y) = (x^2 y, y^2, e^{-xy})$. Calculeu $\partial_x \tilde{f}(x, y)$.

*Solució:* $\partial_x \tilde{f}(x, y) = 4x^3 y^2 + y e^{-xy}$.

**Exemple:** (Corbes a $\mathbb{R}^n$)

$\sigma : (a, b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n; t \to \sigma(t) = (\sigma_1(t), \ldots, \sigma_n(t))$, $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}; x \to f(x)$ funció escalar.

$$\tilde{f}(t) := f(\sigma(t)) \Longrightarrow \tilde{f}'(t) = \langle \nabla_x f(\sigma(t)), (\sigma'(t))^T \rangle = \sum_{l=1}^{m} \partial_l f(\sigma(t)) \sigma_l'(t).$$

En general, per funcions vectorials
$f : \Omega^* \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k; y \to f(y)$, i $g : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m; x \to g(x)$.
$\tilde{f}(x) := f \circ g(x)$, en forma matricial tindrem doncs que la matriu jacobiana de $\tilde{f}$ serà:

$$J_x\tilde{f}(x) = J_y f(g(x)) \cdot J_x g(x).$$

Fixem-nos que la regla de la cadena també ens diu (multiplicant fila per columna) que:

$$\partial_{x_j}\tilde{f}_r(x) = \sum_{l=1}^{m} \partial_{y_l} f_r(g(x))\partial_{x_j} g_l(x).$$

**Exercici:**
$f(u, v) = (\cos v + u^2, e^{u+v}, u - v)$, $g(x, y) = (e^{x^2}, x - \sin y)$. Calculeu $J\tilde{f}(0, 0)$.
Solució:

$$J\tilde{f}(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ e & -e \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Aplicació:** (Hipersuperfícies de nivell) (**Això NO ho explico a classe**)
$g : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}; x \to g(x)$ funció escalar.
**Definició:**
El conjunt $\{x \in \mathbb{R}^n : g(x) = \text{Constant}\}$ s'anomena hipersuperfice de nivell (HSN)

Sigui $\sigma(t) \subset$ HSN una corba qualsevol i $\tilde{g}(t) := g(\sigma(t)) = \text{Constant}$, llavors

$$0 = \tilde{g}'(t) = \langle \nabla g(\sigma(t)), (\sigma'(t))^T \rangle \quad \forall \sigma(t) \subset \text{HSN} \Rightarrow \nabla g \perp \text{HSN}.$$

Per tant, donat $x_0 \in$ HSN, el *hiperpla tangent* a la HSN que passa per $x_0$ ($HPT_{x_0}$) és

$$\langle \nabla g(x_0), x - x_0 \rangle = 0.$$

En particular donada $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}; x \to f(x)$ funció escalar, la seva gràfica

$$G(f) := \{(x, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_{n+1} - f(x) = 0\}$$

és una HSN de $g(x, x_{n+1}) = x_{n+1} - f(x)$. Per tant, $HPT_{(x_0, f(x_0))}$ és

$$x_{n+1} = f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle.$$

**Nota:** Donada $Gf$, $N(x_0) := (\nabla f(x_0), -1)$ és el vector normal a $HPT_{(x_0, f(x_0))}$. Llavors si $\{e_j^m\}_{j=1,\cdots,m}$ és la base canònica de $\mathbb{R}^n$:

$$\langle v_j^{n+1}(x_0), N(x_0) \rangle = 0, \quad \forall j = 1, \cdots, n, \qquad \text{on} \quad v_j^{n+1}(x_0) := e_j^{n+1} + \partial_j f(x_0) e_{n+1}^{n+1}.$$

Per tant $\{v_j^{n+1}(x_0)\}_{j=1,\cdots,n}$ generen $HPT_{(x_0, f(x_0))}$
De fet, si considerem $\varphi : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}; x \to (x, f(x))$, llavors

$$J\varphi(x_0) e_j^n = v_j^{n+1}(x_0), \quad \forall j = 1, \cdots, n.$$

La matriu jacobiana de $\varphi$ envia la base canònica de $\mathbb{R}^n$ al vectors que generen $HPT_{(x_0,f(x_0))}$.

**A Problemes fer els exercicis 29, 33**
**EX 29.-** Siguin $f(u,v) = (\tan(u-1) - e^v, u^2 - v^2)$ i $g(x,y) = (e^{x-y}, x-y)$. Calculeu $D(f \circ g)(1,1)$ mitjançant la regla de la cadena.

$$Df(u,v) = \begin{pmatrix} \sec^2(u-1) & -e^v \\ 2u & -2v \end{pmatrix}, \quad Dg(x,y) = \begin{pmatrix} e^{x-y} & -e^{x-y} \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \quad g(1,1) = (1,0) \Longrightarrow$$

$$D(f \circ g)(1,1) = Df(1,0)Dg(1,1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

**EX 33.-** Donada una funció $f = f(u,v,w)$ de classe $C^1$, calculeu mitjançant la regla de la cadena expressions per a les derivades o derivades parcials primeres de la funció $h$ en termes de les de $\alpha$, $\beta$ i $\gamma$ en cadascun dels casos següents.

1. $h(x) = f(x, \alpha(x), \beta(x))$.
   $h'(x) = \partial_1 f(x, \alpha(x), \beta(x)) + \partial_2 f(x, \alpha(x), \beta(x))\alpha'(x) + \partial_3 f(x, \alpha(x), \beta(x))\beta'(x)$.

2. $h(x,y) = f(y, \alpha(x,y), \beta(x))$.
   $\partial_x h(x,y) = \partial_2 f(y, \alpha(x,y), \beta(x))\partial_x \alpha(x,y) + \partial_3 f(y, \alpha(x,y), \beta(x))\beta'(x)$,
   $\partial_y h(x,y) = \partial_1 f(y, \alpha(x,y), \beta(x)) + \partial_2 f(y, \alpha(x,y), \beta(x))\partial_y \alpha(x,y)$.

3. $h(x,y,z) = f(\alpha(z), \beta(y,z), \gamma(x,y,z))$.
   $\partial_x h(x,y) = \partial_3 f(\alpha(z), \beta(y,z), \gamma(x,y,z))\partial_x \gamma(x,y,z)$,
   $\partial_y h(x,y) = \partial_2 f(\alpha(z), \beta(y,z), \gamma(x,y,z))\partial_y \beta(y,z) + \partial_3 f(\alpha(z), \beta(y,z), \gamma(x,y,z))\partial_y \gamma(x,y,z)$,
   $$\begin{aligned}\partial_z h(x,y) = {}& \partial_1 f(\alpha(z), \beta(y,z), \gamma(x,y,z))\alpha'(z) + \partial_2 f(\alpha(z), \beta(y,z), \gamma(x,y,z))\partial_z \beta(y,z) \\ & + \partial_3 f(\alpha(z), \beta(y,z), \gamma(x,y,z))\partial_z \gamma(x,y,z).\end{aligned}$$

**DERIVADA DIRECCIONAL** 1 **hora a PROBLEMES**

$f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}; x \to f(x)$, $a \in \Omega$, $v$ vector de $\mathbb{R}^n$ amb $||v|| = 1$.
Definim $\tilde{f} : \mathcal{B}^1_r(0) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}; t \to \tilde{f}(t) := f(a + tv)$.
**Definició:**(derivada direccional de $f$ en $a$ segons $v$)

$$\partial_v f(a) \equiv D_v f(a) := \tilde{f}'(0).$$

OBSERVACIO: Aquesta definició és equivalent a:

$$\partial_v f(a) \equiv D_v f(a) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t}.$$

**Teorema:** (Fórmula del gradient)
$f \in \mathcal{C}^1(\Omega) \Longrightarrow \partial_v f(a) = \langle v, \nabla f(a)\rangle$.
**Nota:**
$\partial_{e^n_j} f(a) = \partial_j f(a)$.
**Proposició:** Si $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$, $\Omega$ obert i $a \in \Omega$. Suposem que $a$ NO és un punt crític, llavors la derivada direccional màxima en $a$ s'asoleix en la direccio de $v = \nabla f(a)/||\nabla f(a)||$ i val $||\nabla f(a)||$.
Prova: És trivial a partir del Teorema anterior.
**Exemple:** Calculeu la derivada direccional màxima de $f(x_1, x_2) = x_1^{x_2}$ en $(e, 1)$.
Solució: $\sqrt{1 + e^2}$.
**A Problemes fer els exercicis** 34 **i** 35.
**EX. 34.-** Useu la fórmula del gradient per calcular les següents derivades direccionals.

1. $D_u f(1, 0)$ si $f(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ i $u = (2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5})$.
   $D_u f(1, 0) = 2/\sqrt{5}$.
2. $D_u f(0, -1)$ si $f(x, y) = \mathrm{e}^x \cos(\pi y)$ i $u = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$.
   $D_u f(0, -1) = 1/\sqrt{2}$.
3. $D_u f(1, 0, 0)$ si $f(x, y, z) = x^2\mathrm{e}^{-yz}$ i $u = (1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$.
   $D_u f(1, 0, 0) = 2/\sqrt{3}$.

**EX. 35.-** El perfil d'una certa muntanya es modela mitjançant la funció

$$h(x, y) = 5000 - 0.01x^2 - 0.02y^2,$$

on si $(x, y)$ és un punt del pla ("imaginari") que defineix la base de la muntanya, llavors $z = h(x, y)$ ens dóna la corresponent alçada.

1. Un muntanyer es troba en el punt $(x, y) = (10, 10)$, a punt de fer el cim. En quina direcció s'ha de moure per pujar més ràpidament? Quin és el pendent?
   $v = -(1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})$. Pendent és la derivada direccional, per tant, val $1/\sqrt{5}$.
2. Si enlloc de triar la direcció de màxima pendent opta per triar-ne una amb pendent del 40%, quina direcció ha de seguir? (Indicació: Un pendent del 40% correspon a un vector $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ unitari tal que $D_{(\alpha,\beta)}h(10, 10) = 0.4$. Hi ha dues possible solucions per a $(\alpha, \beta)$.)
   $(0, -1)$ i $(-4/5, -3/5)$.

**FÓRMULA DE TAYLOR** (2 hores a TEORIA i 1 hora a PROBLEMES)

**Fórmula de Taylor a $\mathbb{R}^n$:** Sigui $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}; x \to f(x)$, $a, a+h \in \Omega$ obert, $f \in \mathcal{C}^k(\Omega)$

- Aproximació lineal: $f(a+h) \cong f(a) + \langle h, \nabla f(a)\rangle$.
- Aproximació quadràtica:

$$f(a+h) \cong f(a) + \langle h, \nabla f(a)\rangle + \frac{1}{2}\langle hHf(a), h\rangle,$$

  on $Hf(a) := J\nabla f(a)$ és una matriu simètrica $n \times n$ anomenada *hessiana*.

- Aproximació d'ordre $k$:

$$f(a+h) \cong \sum_{j=0}^{k} \frac{\langle h, \nabla\rangle^j}{j!} f(a).$$

  Aquí $\langle h, \nabla\rangle$ és l'operador $\sum_{j=1}^n h_j \partial_j$, i $\langle h, \nabla\rangle^j f = \langle h, \nabla\rangle(\langle h, \nabla\rangle^{j-1} f)$.

**Nota:** El pas de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}^n$ és la substitució $\frac{d}{dx_1} \to \langle h, \nabla\rangle$.

**Nota:** $\mathrm{T}r\, Hf(a) = \Delta f(a)$.

**Cas particular:** per $n = 2$, $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; (x, y) \to f(x, y)$, $a, a+h \in \Omega$, $f \in \mathcal{C}^k(\Omega)$; l'aproximació d'ordre $k$ s'escriu

$$f(a+h) \cong \sum_{j=0}^{k} \sum_{l=0}^{j} \frac{1}{l!(j-l)!} \partial^j_{x^l y^{j-l}} f(a) h_1^l h_2^{j-l}.$$

En general, a $\mathbb{R}^n$ tindrem:

$$f(a+h) \cong \sum_{j=0}^{k} \sum_{|m|_1=j} \frac{1}{m_1! \cdots m_n!} \partial^j_{x_1^{m_1} \ldots x_n^{m_n}} f(a) h_1^{m_1} \ldots h_n^{m_n},$$

on la norma $|\cdot|_1$ es defineix com $|\eta|_1 := \sum_{i=1}^n |\eta_i|$, $\eta \in \mathbb{R}^n$.

**Aplicació al càlcul de derivades d'ordre superior.**

**Exemple:** Calculeu $\partial^7_{y^3x^4} f(3, 0)$, on $f(x, y) = \left(\frac{x}{3}\right)^x$. Per fer-ho escrivim:

$$f(x, y) = e^{y \ln\left(1 + \frac{x-3}{3}\right)},$$

i com $e^z \cong 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6}$ observem que per obtenir el terme del polinomi de Taylor que conté $y^3$, hem de considerar

$$\frac{1}{6} y^3 \ln^3\left(1 + \frac{x-3}{3}\right) \cong \frac{1}{6} y^3 \left(\frac{x-3}{3}\right)^3 \left(1 - \frac{x-3}{6}\right)^3,$$

per concloure que

$$\frac{1}{3!4!} \partial^7_{y^3x^4} f(3, 0) = -\frac{1}{324} \Longrightarrow \partial^7_{y^3x^4} f(3, 0) = -\frac{4}{9}.$$

**Exercici:** Sigui $f(x,y)=e^{xy^3}$. Quan val $\partial^{12}_{x^3y^9}f(0,0)$? Resposta: 9!

**Exemple:** Calculeu $\partial^{10}_{x^5y^2z^3}f(0,0,0)$ on $f(x,y,z)=e^{xy}\sin(xz)$. Notem que

$$f(x,y,z)=\cdots-\frac{1}{2!3!}x^5y^2z^3+\cdots=\frac{1}{5!2!3!}\partial^{10}_{x^5y^2z^3}f(0,0,0)x^5y^2z^3+\ldots$$

Per tant, $\partial^{10}_{x^5y^2z^3}f(0,0,0)=-5!$

**Generalització:** $f:\Omega\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m; x\to f(x)$, $a, a+h\in\Omega$ obert; llavors l'aproximació lineal és:

$$f(a+h)\cong f(a)+h(Jf(a))^\top.$$

Com a cas particular, si $f:\Omega\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ és inversible i $f(a)=b$, llavors $f^{-1}(b+h)\cong a+h.((Jf(a))^{-1})^T$; i per tant, en un entorn de $b$ podem calcular *aproximadament* la inversa de $f$.

**Residu de Taylor:** Donada $f:\Omega\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}; x\to f(x)$; $a, a+h\in\Omega$ obert; $f\in\mathcal{C}^{k+1}(\Omega)$. Definirem el *residu d'ordre* $k$ en un entorn del punt $a$, com la següent funció:

$$R_k(h)=f(a+h)-\sum_{j=0}^{k}\frac{\langle h,\nabla\rangle^j}{j!}f(a).$$

La propietat important del residu, és el següent resultat:

$$\lim_{h\to0}\frac{|R_k(h)|}{||h||^k}=0.$$

**Aplicació al càlcul de límits:** Fer a teoria l'exercici 43:

Calculeu, si existeix, el següent límit.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\mathrm{e}^x\sin(x+y)-x-y-x^2-xy}{x^2+y^2}.$$

(Indicació: Calculeu el desenvolupaments de Taylor del numerador fins ordre 2 i useu les propietats del residu de Taylor $R_2(x,y)$).

*Solució:* Aquest límit val zero.

**A Problemes, fer l'exercici** 37 (com exemple d'aproximació lineal):

La resistència total $R$ corresponent a dues resistències $R_1$ i $R_2$ conectades en paral·lel verifica

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}.$$

Usant l'aproximació lineal, estimeu la variació del valor de $R$ si incrementem el valor de $R_1$ de 10 ohms a 10.5 ohms i decreixem el valor de $R_2$ de 15 ohms a 13 ohms.

*Solució.* $R(R_1,R_2)=\dfrac{R_1R_2}{R_1+R_2}$. Llavors,

$$R(10,15)=6,\qquad \partial_1R(10,15)=9/25,\qquad \partial_2R(10,15)=4/2.$$

D'altra banda,

$$R(10.5,13)-R(10,15)\cong \partial_1 R(10,15)\times 0.5+\partial_2 R(10,15)\times(-2)=-7/50.$$

**A Problemes, fer els exercicis** 40 **i** 41**:**

**EX. 40.-** Calculeu totes les derivades parcials fins ordre 2 de les següents funcions i doneu el seu desenvolupament de Taylor fins a termes de grau 2 inclosos entorn del punt que s'indica en cada cas.

(a) Taylor de $f(x,y)=\sin(xy)$ entorn del punt $(1,\pi/2)$.

(b) Taylor de $f(x,y)=x^y$ entorn del punt $(1,1)$.

(c) Taylor de $f(x,y)=\mathrm{e}^{x/y}$ entorn del punt $(0,1)$.

(d) Taylor de $f(x,y,z)=\mathrm{e}^{-x}\sin(yz)$ entorn del punt $(0,1,\pi)$.

**EX. 41.-** Mitjançant l'us de desenvolupaments de Taylor de funcions d'una variable (coneguts a priori), calculeu els desenvolupaments de Taylor en l'origen fins a termes de grau dos inclosos de les següents funcions.

(a) $f(x,y)=\mathrm{e}^{xy}\ln(1+x+y)$.

*Solució.* $f(x,y)\sim\ln(1+x+y)\sim x+y-(x+y)^2/2$.

(b) $f(x,y)=\mathrm{e}^{x}\cos y$.

*Solució.* $f(x,y)\sim 1+x+(x^2-y^2)/2$.

(c) $f(x,y)=\dfrac{1}{1+x+y}$.

*Solució.* $f(x,y)\sim 1-(x+y)+(x+y)^2/2$.

(d) $f(x,y,z)=\mathrm{e}^{x+y}\sqrt{1+x}\cos(x+y+z)$.

*Solució.* $f(x,y,z)\sim 1+\frac{3}{2}x+y-\frac{3}{8}x^2+\frac{1}{2}yx-zx-zy-\frac{1}{2}z^2$.

**A Problemes, fer l'exercici** 42**:**

Calculeu el desenvolupament de Taylor en l'origen de les següents funcions fins l'ordre que s'indica en cada cas i doneu el valor de totes les derivades parcials de la funció en el $(0,0)$ corresponents a l'ordre màxim fins al qual s'ha desenvolupat (p. ex., si desenvolupem fins a ordre 5 volem $\partial^5_{x^n y^m}f(0,0)$, amb $n+m=5$).

(a) $f(x,y)=\ln(1+x^2-y)$ fins ordre 3.

*Solució.* $f(x,y)\cong y-x^2+\frac{1}{2}y^2-yx^2+\frac{1}{3}y^3\Longrightarrow \partial^3_{y^3}f(0,0)=2,\quad \partial^3_{yx^2}f(0,0)=-2.$

(b) $f(x,y)=\cos(xy)$ fins ordre 8.

*Solució.* $f(x,y)\cong 1-\frac{1}{2}(yx)^2+\frac{1}{24}(yx)^4\Longrightarrow \partial^4_{y^4x^4}f(0,0)=24.$

(c) $f(x,y)=\mathrm{e}^{x^2-y^2}$ fins ordre 8.

*Solució.* $f(x,y)\cong 1+(x^2-y^2)+\frac{1}{2}(x^2-y^2)^2+\frac{1}{6}(x^2-y^2)^3+\frac{1}{24}(x^2-y^2)^4\Longrightarrow$

$$\partial^8_{x^8}f(0,0)=\partial^8_{y^8}f(0,0)=8!/4!,\ \partial^8_{y^2x^6}f(0,0)=\partial^8_{y^6x^2}f(0,0)=-5!\,2,\ \partial^8_{y^4x^4}f(0,0)=4!\,6.$$

**A Problemes, fer l'exercici** 44**:**

Determineu el valor de $\lambda \in \mathbb{R}$ per tal que:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\arctan(x^2+y) - x^2 - y - \lambda y^3}{(x^2+y^2)^{3/2}} = 0.$$

*Solució.* $\arctan(x^2+y) \sim x^2 + y - \frac{1}{3}y^3 \Longrightarrow \lambda = -1/3.$

**TEOREMA DE LES FUNCIONS INVERSA I IMPLÍCITA** (1h T, 1h P)

TEOREMA DE LA FUNCIO INVERSA:

Sigui $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \Omega^* \subset \mathbb{R}^n$ una funció $\mathcal{C}^1$ a $\Omega$. Donat $p \in \Omega$ tal que $detDf(p) \neq 0$, llavors $f$ és **localment inversible**, és a dir, existeix $\epsilon > 0$ demanera que $\mathcal{B}^n_\epsilon(p) \subset \Omega$ i

$$f : \mathcal{B}^n_\epsilon(p) \to f\left(\mathcal{B}^n_\epsilon(p)\right),$$

($f$ restringida a la bola) és bijectiva, i per tant té inversa $f^{-1}$.

**Qüestió:** com es calcula la inversa? De la relació $f^{-1}(f(x)) = x$, aplicant la regla de la cadena s'obté

$$Df^{-1}(f(x)) = (Df(x))^{-1},$$

sempre que $Df(x)$ sigui inversible.

Sigui $Df(x)$ la matriu $n \times n$ de les derivades de $f$, al seu determinant, $\det Df(x)$, l'anomenarem *jacobià* de $f$. Usant que $detAB = \det A \det B$ s'obté

$$\det Df^{-1}(f(x)) = 1/\det Df(x).$$

**Exercici:** Sigui $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida per $f(x, y) = (e^x + e^y, e^x - e^y)$. Comproveu que existeix $f^{-1}$ i calculeu $Df^{-1}$.

TEOREMA DE LA FUNCIO IMPLICITA:

Donada la funció $f : \Omega^* \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m; (x, y) \to f(x, y)$, amb $x \in \mathbb{R}^n$ i $x \in \mathbb{R}^n$, (de classe $\mathcal{C}^1$ a $\Omega$) considerem el sistema d'equacions $f(x, y) = 0$.

Volem aïllar les variables $y$'s en funció de les $x$'s. Quan és possible fer-ho?

Considerem $(p, q) \in \Omega^*$ tal que $f(p, q) = 0$, llavors si $detD_yf(p, q) \neq 0$ ($D_yf$ és la matriu derivada de $f$ respecte les variables $y$ que és una matriu quadrada), podem aïllar **localment** les $y$'s en funció de les $x$'s. És a dir, existeix $\epsilon > 0$ i una funció $\mathcal{C}^1$ en la bola de radi $\epsilon$ centrada en $p$

$$g : \mathcal{B}^n_\epsilon(p) \to \mathbb{R}^m; x \to g(x),$$

tal que $\forall\, x \in \mathcal{B}^n_\epsilon(p)$,

$$g(p) = q \quad \text{i} \quad f(x, g(x)) = 0.$$

La pregunta ara és: Com calculem la deriva de $g$ en el punt $p$?

Un exemple per entendre aquest tipus de derivació és el següent: Donades $f : \Omega^* \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$; $(x, y) \to f(x, y)$ i $g : \Omega \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $x \to g(x)$. Suposem que satisfan l'equació

$$f(x, g(x)) = 0,$$

i volem calcular $g'(x)$ en funció de les derivades de $f$.

Aplicant la regla de la cadena obtenim

$$\partial_x f(x, g(x)) + \partial_y f(x, g(x))g'(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad g'(x) = -\frac{\partial_x f(x, g(x))}{\partial_y f(x, g(x))}.$$

En general: per funcions vectorials $f : \Omega^* \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m; (x, y) \to f(x, y)$, amb $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$; i $g : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m; x \to g(x)$.

Suposem que satisfan l'equació

$$f(x, g(x)) = 0,$$

i volem calcular $Dg(x)$ en funció de les derivades de $f$.

Si definim $\tilde{g} : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, $x \to (x, g(x))$. L'equació la podem escriure com $\tilde{f}(x) \equiv f(\tilde{g}(x)) = 0$, i ara aplicant la regla de la cadena s'obté:

$$D_x f(x, g(x)) + D_y f(x, g(x))Dg(x) = 0 \Longleftrightarrow Dg(x) = -\left(D_y f(x, g(x))\right)^{-1} D_x f(x, g(x)).$$

**Un Exemple senzill:** $f : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = 0$. Sigui $(x_0, y_0, z_0) \in \Omega$ tal que $f(x_0, y_0, z_0) = 0$. La condició per aïllar "$z$" en funció de $(x, y)$ en un entorn de $(x_0, y_0, z_0)$ és

$$\partial_z f(x_0, y_0, z_0) \neq 0.$$

Llavors existeix $\epsilon > 0$ i una funció $\mathcal{C}^1$ en la bola de radi $\epsilon$ centrada en $(x_0, y_0)$

$$g : \mathcal{B}^2_\epsilon(x_0, y_0) \to \mathbb{R}^m; (x, y) \to g(x, y),$$

tal que $\forall (x, y) \in \mathcal{B}^2_\epsilon(x_0, y_0)$

$$g(x_0, y_0) = z_0 \quad \text{i} \quad f(x, y, g(x, y)) = 0.$$

Les derivades de $g$ en el punt $(x_0, y_0)$ es calculen de la següent forma:

$$Dg(x_0, y_0) = -\left(D_z f(x_0, y_0, z_0)\right)^{-1} D_{(x,y)} f(x_0, y_0, z_0).$$

És a dir:

$$\partial_x g(x_0, y_0) = -\frac{1}{\partial_z f(x_0, y_0, z_0)} \partial_x f(x_0, y_0, z_0); \quad \partial_y g(x_0, y_0) = -\frac{1}{\partial_z f(x_0, y_0, z_0)} \partial_y f(x_0, y_0, z_0).$$

Observeu que també es poden calcular aquestes derivades, derivant implicitament l'equació

$$f(x, y, g(x, y)) = 0$$

i avaluar en el punt $(x_0, y_0, z_0)$.

Efectivament, usem la notació $f_x \equiv \partial_x f$, $f_{xy} \equiv \partial_{xy} f$, ..., llavors tindrem:

$$f_x + f_z g_x = 0, \quad f_y + f_z g_y = 0,$$

i d'aquí trobem $g_x$ i $g_y$. També podem trobar les derivades d'ordre superior, per exemple $f_{xy}$. Primer derivem implícitament respecte $y$ i desprès respecte $x$ per obtenir

$$f_{xy} + f_{z^2} g_y g_x + f_{zx} g_y + f_z g_{xy} = 0,$$

subtituint els valors de $g_x$ i $g_y$ finalment arrivem a:

$$f_{xy} + \frac{f_{z^2} f_y f_x}{f_z^2} - \frac{f_{zx} f_y}{f_z} + f_z g_{xy} = 0,$$

i d'aquí obtenim el valor de $g_{xy}$.

**Exercici:** El sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcc} xe^{u+v} + 2uv & = & 1 \\ ye^{u-v} - \dfrac{u}{1+v} & = & 2x, \end{array} \right.$$

detemina dues funcions $u(x,y)$ i $v(x,y)$ que satisfan $u(1,2) = v(1,2) = 0$. Calculeu $\partial_x u(1,2)$ i $\partial_y v(1,2)$.

**A Problemes, fer els exercicis** 45 **i** 48**:**

**EX 45.-** Sigui $f(x,y,z) = (e^{2y} + e^{2z}, e^{2x} - e^{2z}, x - y)$. Proveu que $f$ té una inversa global i calculeu la seva matriu derivada.

**EX 48.-** El sistema

$$\begin{cases} x + yv + e^{yu} + e^{xv} & = & 3 \\ y - xv + e^{xu} + e^{yv} & = & 3, \end{cases}$$

detemina dues funcions $u(x,y)$ i $v(x,y)$ que satisfan $u(1,1) = v(1,1) = 0$. Sigui ara $g(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$, calculeu $Dg(1,1)$ i $Dg^{-1}(0,0)$.

**EXTREMS RELATIUS** (2h T, 1h P)

Considerem $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}; x \to f(x)$, $a \in \Omega$ obert, $f \in \mathcal{C}^2(\Omega)$

**Definició:**

- Si $\exists \quad \epsilon > 0 \ni \forall x \in \mathcal{B}^n_\epsilon(a) \setminus \{0\} \quad f(a) \geq f(x)$, direm que $a$ és un màxim relatiu de $f$.
- Si $\exists \quad \epsilon > 0 \ni \forall x \in \mathcal{B}^n_\epsilon(a) \setminus \{0\} \quad f(a) \leq f(x)$, direm que $a$ és un mínim relatiu de $f$.

**Proposició:** $a$ extrem relatiu $\Longrightarrow$ $a$ punt crític.

PROVA: Usar l'aproximació lineal de Taylor.

**Definició:** $A$ matriu simètrica $n \times n$, direm que és:

- *Definida positiva* si tots els seus vap's són estrictament positius $\Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \quad xAx^T > 0$.
- *Definida negativa* si tots els seus vap's són estrictament negatius $\Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \quad xAx^T < 0$.
- *No definida* si no és ni definida positiva ni definida negativa.

**Proposició:**

- $a$ punt crític i $Hf(a)$ definida positiva $\Longrightarrow$ $a$ mínim relatiu.
- $a$ punt crític i $Hf(a)$ definida negativa $\Longrightarrow$ $a$ màxim relatiu.

PROVA: Usar l'aproximació quadràtica de Taylor.

**Exercici:** Sigui $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : x \to f(x) = e^{-(1-||x||^2)^2}$. Demostreu que té un mínim relatiu en 0 i que la hipersuperfice de nivell $||x|| = 1$ està formada per tots els màxims relatius de $f$.

**Observació:** NO tots el punts crítics són extrems relatius. Exemple $(0,0)$ i $f(x,y) = x^2 - y^2$. Fixem-nos que sobre l'eix d'abcises l'origen és un mínim, en canvi sobre el d'ordenades és un màxim. El mateix li passa a la funció $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$ a l'origen. La Hessiana té vaps 4 i $-4$, per tant no decideix. Sobre l'eix d'abcises l'origen és un un mínim, en canvi sobre la recta $y = x$ és un màxim.

**Definició:** Un punt crític $a$ t.q. $\det Hf(a) \neq 0$ i $Hf(a)$ és no definida, direm que és un *punt de sella.*

**Proposició:** (Silvester-Jacobi) $A$ matriu simètrica $n \times n$, direm que és:

- $A$ definida positiva $\Longleftrightarrow$ tots els seus menors són estrictament positius.
- $A$ definida negativa $\Longleftrightarrow$ tots els seus menors no són zero i van alternant el signe començant per $-1$.

**SOBRE ELS EXTREMS ABSOLUTS:**

NOTA: Per motivar es pot proposar el problema de trencar una corda en 2 trossos i formar un cercle amb un troç i un quadrat amb l'altre. I demanar per on s'ha de tallar la corda per a que l'àrea total sigui màxima.

**Proposició:** Tota funció contínua en un compacte (tancat i acotat) pren el seu màxim i mínim absoluts.

**Com es troben?** Doncs, es busquen tots els màxims i mínims relatius a l'interior del conjunt (buscant els punts crítics i miran si són extrems), després es restringeix la funció a la frontera del domini i es busquen els màxims i mínims a la frontera. Quan els tinguem tots (els relatius i els de la frontera) es comparen un a un i ja està.

**Exemple:** Considerem la funció $f(x, y) = x^2 - y^2$ restringida a $\bar{\mathcal{B}}_1^1(0,0)$. L'ùnic punt crític és l'origen de coordenades on $f$ val zero. Anem ara a mirar que passa a la frontera

$$\{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}.$$

Si restringim $f$ a aquest punts tenim $\bar{f}(x) = 2x^2 - 1$ per $x \in [-1, 1]$. L'únic punt crític a l'interior d'aquest intèrval és $x = 0$, on $f$ val $-1$. Però, no hem acabat, finalment ens falta restringir $\bar{f}$ a la frontera de $[-1, 1]$, i.e., calcular $\bar{f}(\pm 1) = 1$. Conclusió: $f$ pren el seu màxim en $(\pm 1, 0)$ i el seu mínim a $(0, \pm 1)$.

**A Problemes fer els exercicis** 53 **i** 54**.**

**EX. 53.-** Per a la funció $f(x, y) = x^2y + y^2x$ vegeu que $(0,0)$ és un candidat a extrem relatiu però que el mètode del hessià no permet caracteritzar-lo. A quina conclussió arribem si restringim els valors de $(x, y)$ als de la recta $y = x$?

*Solució.* $\nabla f(0,0) = (0,0) \Longrightarrow x = y = 0$. D'altra banda

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

i llavors el mètode del hessià no ens permet caracteritzar el punt. En canvi, sobre la recta $x = y$, $f(x, x) = 2x^3$, d'on es conclou que $(0,0)$ no és cap extrem de $f(x, y)$.

**EX. 54.-** Considereu la funció $f(x, y) = (y - x^2)(y - 3x^2)$.

1. Si restringim els valors de $(x, y)$ als d'una recta passant pel $(0,0)$, vegeu que l'origen és un mínim relatiu de la funció amb independència de la recta triada.

   *Solució.* Agafant $y = \lambda x$, $\lambda \in \mathbb{R}$ qualsevol, s'obté:

   $$F(x, \lambda x) = x^2(\lambda - x)(\lambda - 3x) \sim \lambda^2 x^2$$

   (per $x \cong 0$), la qual cosa implica que $(0,0)$ és un mínim relatiu sobre qualsevol recta que passi per l'origen.

2. Discutiu si el resultat de l'apartat (a) us permet concloure que $f(x, y)$, com a funció de dues variables, té un mínim relatiu en el $(0,0)$.

   *Solució.* No, ja que:

   $$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Estudieu si l'origen és o no un mínim relatiu si restringim els valors de $(x, y)$ als d'una paràbola de la forma $y = ax^2$ i refineu la discussió de l'apartat (2).

   *Solució.* Restringint la funció sobre la paràbola resulta: $f(x, ax) = x^4(a-1)(a-3)$; per tant, quan $1 < a < 3$ $(0,0)$, és un màxim relatiu $\Longrightarrow$ $(0,0)$ no és cap extrem de $f(x, y)$.