3 Transformada de Laplace i sèries de Fourier

1. Calculeu la transformada de Laplace de les funcions següents:

   (a) $f(t) = \begin{cases} 2t+1 & \text{si} \quad 0 < t < 1 \\ 0 & \text{si} \quad t \geq 1 \end{cases}$ (Solució: $\frac{2}{s^2}\left(-e^{-s}(s+1)+1\right) + \frac{1}{s}\left(1-e^{-s}\right)$.)

   (b) $f(t) = t \sin t$ (Solució: $\frac{2s}{(s^2+1)^2}$.)

   (c) $f(t) = (2t-1)^3$(Solució: $\frac{48}{s^4} - \frac{24}{s^3} + \frac{6}{s^2} - \frac{1}{s}$.)

   (d) $f(t) = \cos^2 t$ (Solució: $\frac{s^2+2}{s(s^2+4)}$.)

   (e) $f(t) = \sin t \sin 2t$ (Solució: $\frac{1}{2}\left(\frac{s}{s^2+1} - \frac{s}{s^2+9}\right)$.)

   (f) $f(t) = e^t \sinh t$ (Solució: $\frac{1}{(s-1)^2-1}$.)

2. *

   i) Demostreu que existeix la transformada de Laplace $\mathcal{L}(f(t))(s)$,

   $s > 0$, de la funció $f(t) = t^\alpha \Longleftrightarrow \alpha > -1$.

   ii) Demostreu que si $\alpha > -1$ aleshores $\mathcal{L}(t^\alpha)(s) = \dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}$,
   on $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$, $x > 0$, és la *funció* Γ *d'Euler*.

   iii) Què podem dir de la funció $f(t) = \dfrac{1}{t^2}$?

   iv) Mateixa pregunta per a la funció $f(t) = t^{-1/2}$.

3. Calculeu una antitransformada de Laplace de les funcions següents:

   (a) $g(s) = \dfrac{(s+2)^2}{s^3}$ (Solució: $1 + 4t + 2t^2$.)

   (b) $g(s) = \dfrac{1}{5s-2}$ (Solució: $\frac{1}{5}e^{\frac{2t}{5}}$.)

   (c) $g(s) = \dfrac{s+1}{(s^2-4s)(s+5)}$ (Solució: $-\frac{1}{20} + \frac{5}{36}e^{4t} - \frac{4}{45}e^{-5t}$.)

   (d) $g(s) = \dfrac{1}{s^4-9}$ (Solució: $\frac{1}{6\sqrt{3}}\sinh\sqrt{3}t - \frac{1}{6\sqrt{3}}\sin\sqrt{3}t$.)

4. Calculeu la transformada de Laplace de la funció

$$f(t) = \begin{cases} e^{3t} & \text{si} \quad t \geq 0\,,\ t \neq 5 \\ 1 & \text{si} \quad t = 5 \end{cases}$$

   Què podem dir de la unicitat de l'antitransformada de Laplace d'una funció?

5. * Demostreu que $\displaystyle\int_0^t \sin u \cos(t-u)du = \frac{1}{2}t\sin t$.

[Indicació: feu servir el teorema de convolució].

6. * Tenint en compte la definició de l'exponencial complexa: $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$, calculeu $\mathcal{L}(e^{iat})$ per a $a \in \mathbb{R}$ i comproveu que s'obté el mateix que si s'apliqués, formalment, la transformada de Laplace a una exponencial real.

7. Calculeu la transformada de Laplace de les funcions següents:

   (a) $f(t) = e^{2-t}\mathcal{U}(t-2)$ (Solució: $\frac{e^{-2s}}{s+1}$.)

   (b) $f(t) = e^t\cos^2 3t$ (Solució: $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-1} + \frac{s-1}{(s-1)^2+36}\right)$.)

   (c) $f(t) = te^{-3t}\cos 3t$ (Solució: $\frac{-9+(s+3)^2}{((s+3)^2+9)^2}$.)

   (d) $f(t) = t\displaystyle\int_0^t \tau e^{-\tau}d\tau$ (Solució: $\frac{1}{s(s+1)}\left(\frac{1}{s}+\frac{2}{s+1}\right)$.)

   (e) $f(t) = e^{2t} * \sin t$ (Solució: $\frac{1}{(s-2)(s^2+1)}$.)

8. Calculeu una antitransformada de Laplace de les funcions següents:

   (a) $g(s) = \dfrac{2s+5}{s^2+6s+34}$ (Solució: $e^{-3t}\left(2\cos(5t) - \frac{1}{5}\sin(5t)\right)$.)

   (b) $g(s) = \dfrac{e^{-2s}}{s^2(s-1)}$ (Solució: $(1-t+e^{t-2})\mathcal{U}(t-2)$.)

9. Escriviu la funció

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 \le t < \dfrac{3\pi}{2} \\ \sin t & \text{si} \quad t \ge \dfrac{3\pi}{2} \end{cases}$$

en termes de "funcions esgraó unitàries" (això és, funcions del tipus $\mathcal{U}(t-a)$) i calculeu la seva transformada de Laplace. (Solució: $-\frac{se^{-\frac{3\pi s}{2}}}{s^2+1}$.)

10. Feu el mateix que al problema anterior amb la funció $f(t) = E[t]$ (part entera). (Solució: $\frac{1}{s(e^s-1)}$.)

11. Calculeu una antitransformada de Laplace de la funció $g(s) = \ln\left(\dfrac{s^2+1}{s^2+4}\right)$ fent servir que $\mathcal{L}(t^n f(t))(s) = (-1)^n\dfrac{d^n}{ds^n}\mathcal{L}(f(t))(s)$. (Solució: $-\frac{2}{t}(\cos(t) - \cos(2t))$.)

12. * Calculeu una antitransformada de Laplace de la funció $g(s) = \dfrac{1}{(s+1)^2}$ de la forma següent:

    i) fent servir la transformada de Laplace d'una convolució.

    ii) pels teoremes de translació.

13. * Calculeu la transformada de Laplace de la funció "ona triangular" tenint en compte que és periòdica. (Solució: $-\frac{1}{1-e^{2s}}\left(\frac{1}{s^2} - 2\frac{e^{-s}(s+1)}{s^2} + \frac{e^{-2s}(2s+1)}{s^2} + \frac{2}{s}\left(e^{-s}-e^{-2s}\right)\right)$.)

14. *

i) Demostreu que si f és continua a trossos, d'ordre exponencial i tal que existeix $\lim_{t\to 0^+} \frac{f(t)}{t}$, aleshores $\mathcal{L}\left(\frac{f(t)}{t}\right)(s) = \int_s^{+\infty} F(u)du$ on $F(s) = \mathcal{L}(f(t))(s)$.

ii) Calculeu la transformada de Laplace de la funció Sinus-integral:

$$f(t) = \int_0^t \frac{\sin u}{u} du := Si(t)\,.$$

iii) Demostreu que $\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt = \int_0^{+\infty} F(u)du$ si existeixen les integrals. Com a aplicació calculeu $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$.

15. * Demostreu que $\mathcal{L}\left(\int_0^t \left(\int_0^{t_1} f(u)du\right) dt_1\right)(s) = \frac{\mathcal{L}(f(t))(s)}{s^2}$.

16. * Calculeu $\int_0^{+\infty} te^{-2t} \cos t dt$.

17. Sigui la funció

$$f(t) = \begin{cases} t\,, & 0 \le t \le 1 \\ 2t\,, & t > 1 \end{cases}$$

i) Calculeu $\mathcal{L}(f(t))$.

ii) Calculeu $\mathcal{L}(f'(t))$.

iii) Es compleix la fórmula $\mathcal{L}(f'(t))(s) = s\mathcal{L}(f(t))(s) - f(0)$? Què falla?

18. Calculeu $\mathcal{L}\left(\frac{e^{-2t}}{\sqrt{t}}\right)(s)$. Per a quins valors de s existeix aquesta transformada? (Solució: $\sqrt{\frac{\pi}{s+2}}$, existeix per $s > -2$.)

19. * Calculeu $\mathcal{L}(tSi(t))$.

20. * Comproveu que $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{4}$.

[Indicació: feu servir l'apartat 14 i)].

21. * Si f és contínua a trossos i d'ordre exponencial, demostreu que:

$$\mathcal{L}\left(\int_a^t f(\tau)d\tau\right)(s) = \frac{\mathcal{L}(f(t))(s)}{s} + \frac{1}{s}\int_a^0 f(\tau)d\tau\,.$$

22. Calculeu $\mathcal{L}(t^2\mathcal{U}(t-2))$. (Solució: $e^{-2s}\left[\frac{2}{s^3} + \frac{4}{s^2} + \frac{4}{s}\right]$.)

23. Feu servir la transformada de Laplace per resoldre els següents problemes de Cauchy:

(a) $y' + 2y = t, \quad y(0) = -1$

(b) $y'' - 4y' + 4y = t^3, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 0$

(c) $y''' + 2y'' - y' - 2y = \sin 3t, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = 1$

(d) $y'' - 5y' + 6y = \mathcal{U}(t-1), \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1$

24. Resoleu l'equació diferencial amb condicions inicials:

$$y'' + 4y' + 13y = \delta(t-\pi) + \delta(t-3\pi), \quad y(0) = 1,\ \ y'(0) = 0$$

on $\delta(t - t_0)$ és la delta de Dirac en el punt t_0.

25. * Resoleu l'equació:

$$y'' + 2y' + 2y = \cos(t)\delta(t-3\pi), \quad y(0) = 1,\ \ y'(0) = -1\,.$$

26. Feu servir la transformada de Laplace per resoldre les equacions integrals següents:

(a) $f(t) + 2\int_0^t f(\tau)\cos(t-\tau)d\tau = 4e^{-t} + \sin t$ (Solució: $4e^{-t} - 7te^{-t} + 4t^2e^{-t}$.)

(b) $t - 2f(t) = \int_0^t (e^{\tau} - e^{-\tau})f(t-\tau)d\tau$. (Solució: $\frac{1}{2}t - \frac{1}{12}t^3$.)

27. * Resoleu, fent servir la transformada de Laplace, el problema de Cauchy $ty'' - y' = t^2,\ \ y(0) = 0$.

Noteu que, en aquest cas, no cal conèixer $y'(0)$.

28. * Considereu l'equació integro-diferencial

$$y'(x) + \int_0^x y(x-t)e^{-2t}dt = 0, \quad y(0) = 1\,.$$

(a) Derivant en ambdós membres, deduïu l'equació diferencial ordinària de segon ordre que verifica la seva solució. Preciseu-ne igualment les condicions inicials que la determinen.

(b) Alternativament, apliqueu directament la transformada de Laplace a l'equació inicial.

29. (a) Trobeu la sèrie de Fourier de la funció $f(x) = x + \pi$ a l'interval $-\pi < x < \pi$. (Solució: $a_0 = 2\pi$, $a_n = 0$, $b_n = \frac{2}{n}(-1)^{n+1}$).

(b) Useu a) per demostrar que

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

30. *

(a) Trobeu la sèrie de Fourier de

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{per} \quad -\pi < x < 0 \\ x^2 & \text{per} \quad 0 \le x < \pi \end{cases}$$

(Solució: $a_0 = \frac{\pi^2}{3}$, $a_n = \frac{2}{n^2}(-1)^n$, $b_{2n} = -\frac{\pi}{2n}$, $b_{2n+1} = \frac{\pi}{2n+1} + \frac{4}{\pi(2n+1)^2}$.)

(b) Useu a) per demostrar que

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots \quad \text{i que} \quad \frac{\pi^2}{12} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots$$

(c) Useu b) per trobar una sèrie numèrica tal que la seva suma sigui $\pi^2/8$.

31. Trobeu la sèrie de Fourier de

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad -\pi < x < 0 \\ x & \text{si} \quad 0 \le x < \pi \end{cases}$$

a l'interval $-\pi < x < \pi$. (Solució: $a_0 = \frac{\pi}{2}$, $a_n = \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2}$, $b_n = \frac{(-1)^n}{n}$).

Quan val f a $x = \dfrac{7\pi}{2}$? I quan a $x = 401\pi$? (Solució: $f(\frac{7\pi}{2}) = 0$, $f(401\pi) = \frac{\pi}{2}$).

32. * Trobeu, si és que existeix, una sèrie de Fourier que convergeix cap a $|\sin x|$ per a tot $x \in \mathbf{R}$. (Solució: $a_0 = \frac{4}{\pi}$, $a_{2n} = -\frac{2}{4n^2-1}$, $a_{2n+1} = 0$, $b_n = 0$.)

33. Trobeu la sèrie de Fourier de la funció

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \frac{\pi}{2} \le |x| \le \pi \\ \cos x & \text{si} \quad |x| < \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

34. * Sigui $f(x)$ continua a $(-L, L)$ i siguin a_n i b_n els seus coeficients de Fourier.

(a) Proveu que si $S_M(x) = \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{M} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{L} x + b_n \sin \frac{n\pi}{L} x \right)$, aleshores

$$\int_{-L}^{L} f(x) S_M(x) dx = L \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{M} (a_n^2 + b_n^2) \right).$$

(b) Proveu que $\displaystyle\int_{-L}^{L} S_M^2(x) dx = L \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{M} (a_n^2 + b_n^2) \right)$.

(c) Proveu que $2 \displaystyle\int_{-L}^{L} f(x) S_M(x) dx - \int_{-L}^{L} S_M^2(x) dx \le \int_{-L}^{L} (f(x))^2 dx$

(d) Fent servir els apartats anteriors proveu la anomenada "desigualtat de Bessel":

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \le \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} (f(x))^2 dx \,.$$

35. Desenvolupeu la funció

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{per} \quad -1 < x < 0 \\ x-1 & \text{per} \quad 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

en sèrie de sinus o cosinus, segons convingui. (Solució: $a_n = 0$, $b_n = -\frac{2}{n\pi}$).

36. Desenvolupeu la funció

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{per} \quad 0 < x < 1/2 \\ 1 & \text{per} \quad 1/2 \leq x < 1 \end{cases}$$

en sèrie de cosinus en mig interval i en sèrie de sinus en mig interval.

37. Desenvolupeu la funció $f(x) = x^2$, $0 < x < L$

(a) en sèrie de cosinus. (Solució: $\frac{L^2}{3} + \sum(-1)^n \frac{4L^2}{n^2\pi^3} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$).

(b) en sèrie de sinus. (Solució: $\sum \left(\frac{4L^2}{n^2\pi^3}((-1)^n - 1) - (-1)^n \frac{2L^2}{n\pi}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$).

(c) en sèrie de Fourier. (Solució: $\frac{L^2}{3} + \sum \frac{L^3}{n\pi^2} \cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) - \sum \frac{L^2}{n\pi} \sin\left(\frac{2n\pi x}{L}\right)$).

38. *(a) Trobeu la forma general de la sèrie de Fourier en cosinus i de la sèrie de Fourier en sinus a $[0, C]$ per a funcions que compleixen la relació $f(C - x) = f(x)$.

(b) Mateixa pregunta per $f(C - x) = -f(x)$.

39. Desenvolupeu la funció $\cos xz$ en sèrie de Fourier en l'interval $[-\pi, \pi]$, on z és un paràmetre real. (Solució: $a_n = \frac{2z}{\pi(n^2-z^2)}(-1)^{n+1} \sin 2z$, $b_n = 0$).

Proveu les igualtats

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin \pi z} &= \frac{2z}{\pi}\left(\frac{1}{2z^2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2 - z^2}\right) \\ \operatorname{cotg} \pi z &= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{z} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z}{k^2 - z^2}\right) \end{aligned}$$

i deduïu que

$$\begin{aligned} \pi &= 2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{k+1}}{4k^2 - 1} \\ \pi &= 4 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{16k^2 - 1}. \end{aligned}$$

Taula de $\mathcal{L}$-transformades

Definició	
$f(t), \quad t>0$	$F(s)=\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt$
Propietats	
$f_1(t)+f_2(t)$	$F_1(s)+F_2(s)$
$\lambda f(t)$	$\lambda F(s)$
$f(at), \quad a>0$	$(1/a)F(s/a)$
$e^{-at}f(t)$	$F(s+a)$
$f(t-a)\mathcal{U}(t-a), \quad a>0$	$e^{-as}F(s)$
$D^N f(t)$	$s^N F(s)-s^{N-1}f(0)-s^{N-2}f'(0)-\ldots-D^{N-1}f(0)$
$t^N f(t)$	$(-1)^N D^N F(s)$
$\int_0^t f(\tau)d\tau$	$F(s)/s$
$f(t)/t$	$\int_s^{+\infty} F(\sigma)d\sigma$
$f_1(t)*f_2(t)=\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$	$F_1(s)F_2(s)$
$f(t+T)=f(t)$	$F(s)=1/(1-e^{-sT})\int_0^T e^{-st}f(t)dt$
$\lim_{0^+} f(t)=\lim_{+\infty} sF(s)$; $\lim_{+\infty} f(t)=\lim_{0^+} sF(s)$	
Exemples	
$\delta(t)$	1
$\delta(t-a)$	e^{-as}
1	$1/s$
e^{at}	$1/(s-a)$
t^N	$N!/s^{N+1}$
t^α	$\Gamma(\alpha+1)/s^{\alpha+1}$
$\sin bt$	$b/(s^2+b^2)$
$\cos bt$	$s/(s^2+b^2)$
$\sinh bt$	$b/(s^2-b^2)$
$\cosh bt$	$s/(s^2-b^2)$
$(\sin bt-bt\cos bt)/(2b^3)$	$1/(s^2+b^2)^2$
$(bt\cosh bt-\sinh bt)/(2b^3)$	$1/(s^2-b^2)^2$
$(\sin bt)/t$	$\arctan(b/s)$
$\ln t$	$(\Gamma'(1)-\ln s)/s$

Transformada de Laplace i sèries de Fourier

1. Calculeu la transformada de Laplace de les funcions següents:

a) $f(t)=\begin{cases} 2t+1, & \text{si } 0<t<1 \\ 0, & \text{si } t\geq 1. \end{cases}$

b) $f(t) = t\sin t$

c) $f(t) = (2t-1)^3$

d) $f(t) = \cos^2 t$

e) $f(t) = \sin t \sin(2t)$

f) $f(t) = e^t \sinh t$

Solució.

a) $f(t)=\begin{cases} 2t+1, & \text{si } 0<t<1 \\ 0, & \text{si } t\geq 1 \end{cases}$

$$\mathcal{L}\{f(t)\}_{(s)} = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\,dt = \int_0^1 e^{-st}(2t+1)\,dt + \int_1^{+\infty} e^{-st}\cdot 0\,dt$$

integrant per parts

$$= -\frac{e^{-st}}{s}\Bigg|_{t=0}^{t=1} + \int_0^1 -\frac{2t}{s}\,d(e^{-st}) = \frac{1}{s} - \frac{e^{-s}}{s} + \left[-\frac{2t}{s}e^{-st}\right]_{t=0}^{t=1} + \frac{2}{s}\int_0^1 e^{-st}dt$$

$$= \frac{1}{s} - 3\frac{e^{-s}}{s} - 2\left[e^{-st}\right]_{t=0}^{t=1} = \frac{1}{s} - \frac{3}{s}e^{-s} + \frac{2}{s^2} - 2\frac{e^{-s}}{s^2} = \boxed{\frac{2}{s^2}\left(-e^{-s}(s+1)+1\right) + \frac{1}{s}\left(1-e^{-s}\right), s>0}$$

Alternativament: $f(t) = \left(1-\mathcal{U}(t-1)\right)\left(2(t-1)+3\right)$ i llavors,

$$\mathcal{L}\{f(t)\}_{(s)} = \mathcal{L}\{2t+1\}_{(s)} + \mathcal{L}\left\{\left(2(t-1)+3\right)\cdot\mathcal{U}(t-1)\right\}_{(s)}$$

$$= \mathcal{L}\{2t+1\}_{(s)} + e^{-s}\mathcal{L}\{2t+3\}_{(s)} = \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s} - e^{-s}\left(\frac{2}{s^2}+\frac{3}{s}\right)$$

$$= \boxed{\frac{2}{s^2}\left(-e^{-s}(s+1)+1\right) + \frac{1}{s}\left(1-e^{-s}\right), s>0}$$

b) $f(t)=t\sin t$,

$$F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}_{(s)}=\mathcal{L}\{t\sin t\}_{(s)}=-\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{\sin t\}_{(s)}=-\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^2+1}\right)=\boxed{\frac{2s}{(s^2+1)^2},\quad s>0}$$

c) $f(t)=(2t-1)^3$,

$$F(s)=\mathcal{L}\{(2t-1)^3\}_{(s)}=\mathcal{L}\{8t^3-12t^2+6t-1\}_{(s)}=48\mathcal{L}\{t^3\}_{(s)}-12\mathcal{L}\{t^2\}_{(s)}$$
$$+6\mathcal{L}\{t\}_{(s)}-\mathcal{L}\{1\}_{(s)}=\frac{48}{s^4}-\frac{24}{s^3}+\frac{6}{s^2}-\frac{1}{s}$$

d) $f(t)=\cos^2 t=\frac{1+\cos(2t)}{2}$

$$\mathcal{L}\{f(t)\}_{(s)}=\mathcal{L}\{\cos^2 t\}_{(s)}=\mathcal{L}\left\{\frac{1+\cos(2t)}{2}\right\}_{(s)}=\frac{1}{2s}+\frac{s}{2(s^2+4)}=\boxed{\frac{s^2+2}{s(s^2+4)},\quad s>0}$$

e) $f(t)=\sin t\sin(2t)=\frac{1}{2}\big(\cos(2t-t)-\cos(2t+t)\big)=\frac{1}{2}\cos t-\frac{1}{2}\cos(3t)$

$$\mathcal{L}\{f(t)\}_{(s)}=\mathcal{L}\{\sin t\sin(2t)\}_{(s)}=\frac{1}{2}\mathcal{L}\{\cos t\}_{(s)}-\frac{1}{2}\mathcal{L}\{\cos(3t)\}_{(s)}=\boxed{\frac{s/2}{s^2+1}-\frac{s/2}{s^2+9},\quad s>0}$$

f) $f(t)=e^t\sinh t$

$$\mathcal{L}\{f(t)\}_{(s)}=\mathcal{L}\{e^t\sinh t\}_{(s)}=\mathcal{L}\{\sinh t\}_{(s-1)}=\frac{1}{(s-1)^2-1}=\boxed{\frac{1}{s(s-2)},\quad s>2}$$

2. (i) Demostreu que existeix la transformada de Laplace $\mathcal{L}\{f(t)\}_{(s)}$, $s>0$, de la funció $f(t)=t^\alpha \Leftrightarrow \alpha>-1$

(ii) Demostreu que si $\alpha>-1$ aleshores $\mathcal{L}\{t^\alpha\}_{(s)}=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}$, on $\Gamma(x)=\int_0^{+\infty}t^{x-1}e^{-t}dt$, $x>0$, és la funció d'Euler.

(iii) Què podem dir de la funció $f(t)=1/t^2$?

(iv) Mateixa pregunta per a la funció $f(t)=t^{-1/2}$

Solució.

(i) $\int_0^{+\infty}t^\alpha e^{-st}dt=\int_0^1 t^\alpha e^{-st}dt+\int_1^{+\infty}t^\alpha e^{-st}dt=I_1+I_2$, on $I_1:=\int_0^1 t^\alpha e^{-st}dt$, $I_2:=\int_1^{+\infty}t^\alpha e^{-st}dt$.

L'integrand $t^\alpha e^{-st}$ de I_1 i de I_2 són funcions no negatives (per tant funcions de signe constant), per tant, podem fer servir el criteri de comparació per quocient:

I_1: $\lim_{0^+} t^{-\alpha}t^\alpha e^{-st}=0$ $\forall s,\forall\alpha$; llavors $\int_0^1 t^\alpha e^{-st}dt \sim \int_0^1 t^\alpha dt$ $\forall s\in\mathbb{R}$

i com que $\int_0^1 t^\alpha dt$ conv. $\Leftrightarrow \alpha>-1$, tenim que $I_1=\int_1^{+\infty} t^\alpha e^{-st}dt$ és convergent $\forall s\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \alpha>-1$.

I_2: $\lim\limits_{t\to+\infty} t^2 t^\alpha e^{-st} = \lim\limits_{t\to+\infty} t^{\alpha+2}e^{-st}=0 \quad \forall\alpha\in\mathbb{R}, \forall s>0$.

Alashores, com que $\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^2}$ és convergent, $\int_1^{+\infty} t^\alpha e^{-st}dt$ també és convergent $\forall\alpha\in\mathbb{R}$ i $\forall_{s>0}$

En conclusió $I=\int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-st}dt$, $s>0$ és convergent $\Leftrightarrow \alpha>-1$

(ii) $\mathcal{L}\{t^\alpha\}_{(s)} = \int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-st}dt =$ $(\alpha>-1, s>0)$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Considerem el canvi } t=\varphi(u)=u/s \text{, per } u>0,\ s>0. \\ \text{Notem que llavors } \varphi \text{ és monòtona creixent per a qualsevol} \\ s>0 \text{ fixada.} \\ \quad dt=\varphi'(u)du = du/s, \\ \quad t=0 \Rightarrow u=0 \\ \quad t\to+\infty \Rightarrow u\to+\infty \ (s>0) \end{array}\right.$

$$= \int_0^{+\infty}\frac{u^\alpha}{s^\alpha}e^{-u}\frac{du}{s} = \frac{1}{s^{\alpha+1}}\int_0^{+\infty} u^{(\alpha+1)-1}e^{-u}du = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}.$$

$\alpha>-1$

$\Leftrightarrow \alpha+1>0$

Llavors $x=\alpha+1>0$

i $\int_0^{+\infty} u^{(\alpha+1)-1}e^{-u}du = \Gamma(\alpha+1)$

Remarca: notem que, per $\alpha=n\in\mathbb{N}\cup\{0\}=\{0,1,2,\dots\}$, llavors; $\mathcal{L}\{t^n\}_{(s)} = \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}} = \frac{n!}{s^{n+1}}$

(iii) La transformada de Laplace de $f(t)=t^{-2}$ no està definida, ja que la integral $\int_0^{+\infty} t^{-2}e^{-st}dt$, $s>0$ és divergent $(\alpha=-2<-1)$.

(iv) $f(t)=t^{-1/2}$. Aquí $\alpha=-1/2$ i llavors: $\mathcal{L}\{t^{-1/2}\}_{(s)} = \frac{\Gamma(-\frac12+1)}{s^{-\frac12+1}} = \sqrt{\frac{\pi}{s}}$, $s>0$

(recordem que $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$).

3. Calculeu l'antitransformada de Laplace de les funcions següents

a. $G(s)=\frac{(s+2)^2}{s^3}$ c. $G(s)=\frac{s+1}{(s^2-4s)(s+5)}$

b. $G(s)=\frac{1}{5s-2}$ d. $G(s)=\frac{1}{s^2-9}$

Solució.

a. $(s) = \frac{(s+2)^2}{s^3} = \frac{s^2+4s+4}{s^3} = \frac{1}{s} + \frac{4}{s^2} + \frac{4}{s^3} = \mathcal{L}\{1\}_{(s)} + 4\mathcal{L}\{t\}_{(s)} + \frac{4}{2!}\mathcal{L}\{t^2\}_{(s)}$

Aleshores: $g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}_{(t)} = 1+4t+2t^2.$

b. $G(s) = \frac{1}{5s-2} = \frac{1/5}{s-2/5} = \frac{1}{5}\mathcal{L}\{e^{2/5\,t}\}_{(s)} = \frac{1}{5}e^{2/5\,t}.$

c. $G(s) = \frac{s+1}{(s^2-4s)(s+5)} = \frac{s+1}{s(s-4)(s+5)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-4} + \frac{C}{s+5} \overset{(*)}{=} -\frac{1/20}{s} + \frac{5/36}{s-4} - \frac{4/45}{s+5}$

$= -\frac{1}{20}\mathcal{L}\{1\}_{(s)} + \frac{5}{36}\mathcal{L}\{e^{4t}\}_{(s)} - \frac{4}{45}\mathcal{L}\{e^{-5t}\}_{(s)}$

(*) $A(s-4)(s+5) + Bs(s+5) + Cs(s-4) = s+1 \quad \forall s$

$s=4: \; 36B = 5 \Rightarrow B = 5/36$

$s=-5: \; 45C = -4 \Rightarrow C = -4/45$

$s=0: \; -20A = 1 \Rightarrow A = -1/20$

Aleshores: $g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}_{(t)} = -\frac{1}{20}\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s}\}_{(t)} + \frac{5}{36}\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s-4}\}_{(t)} - \frac{4}{45}\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s+5}\}_{(t)}$

$= -\frac{1}{20} + \frac{5}{36}e^{4t} - \frac{4}{45}e^{-5t}.$

d. $G(s) = \frac{1}{s^4-9} = \frac{1}{(s^2+3)(s^2-3)} = \frac{As+B}{s^2+3} + \frac{C}{s-\sqrt{3}} + \frac{D}{s+\sqrt{3}}$

$\overset{(*)}{=} \frac{-1/6}{s^2+3} + \frac{\sqrt{3}/36}{s-\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}/36}{s+\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{18}\mathcal{L}\{\sin(\sqrt{3}t)\}_{(s)} + \frac{\sqrt{3}}{36}\mathcal{L}\{e^{\sqrt{3}t}\}_{(s)} - \frac{\sqrt{3}}{36}\mathcal{L}\{e^{-\sqrt{3}t}\}_{(s)}$

(*) $(As+B)(s^2-3) + C(s+\sqrt{3})(s^2+3) + D(s-\sqrt{3})(s^2+3) = 1 \quad \forall s$

$s=\sqrt{3}: \; 12\sqrt{3}C = 1 \Rightarrow C = \sqrt{3}/36.$

$s=-\sqrt{3}: \; -12\sqrt{3}D = 1 \Rightarrow D = -\sqrt{3}/36.$

$s=0: \; -3B + 3\sqrt{3}C - 3\sqrt{3}D = -3B + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = -3B + \frac{1}{2} = 1 \Leftrightarrow B = -\frac{1}{6}.$

$s=2: \; (2A+B) + 7(2+\sqrt{3})\frac{\sqrt{3}}{36} - 7(2-\sqrt{3})\frac{\sqrt{3}}{36} = 2A - \frac{1}{6} + \frac{21}{36} + \frac{21}{36} = 2A+1 = 1 \Rightarrow A = 0.$

Aleshores:

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}_{(t)} = -\frac{\sqrt{3}}{18}\sin(\sqrt{3}t) + \frac{\sqrt{3}}{18}\cdot\frac{e^{\sqrt{3}t} - e^{-\sqrt{3}t}}{2}$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{18}\sin(\sqrt{3}t) + \frac{\sqrt{3}}{18}\sinh(\sqrt{3}t)$$

4. Calculeu la transformada de Laplace de la funció

$$f(t)=\begin{cases} e^{3t}, & \text{si } t\geq 0,\ t\neq 5 \\ 1, & \text{si } t=5. \end{cases}$$

Què podem dir de la unicitat de l'antitransformada de Laplace d'una funció?

Solució. $\mathcal{L}\{f(t)\}_{(s)} = \int_0^{+\infty} e^{3t}e^{-st}dt = \int_0^{5-\delta} e^{-(s-3)t}dt + \int_{5-\delta}^{5+\delta} e^{-(s-3)t}dt + \int_{5+\delta}^{+\infty} e^{-(s-3)t}dt$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-(s-3)t}dt - \int_{5-\delta}^{5+\delta} e^{-(s-3)t}dt = \mathcal{L}\{e^{3t}\}_{(s)} - \int_{5-\delta}^{5+\delta} e^{-(s-3)t}dt$$

$$= \frac{1}{s-3} - \int_{5-\delta}^{5+\delta} e^{-(s-3)t}dt, \ s>3;\ \forall\, 0<\delta<5.$$

Però: $\int_{5-\delta}^{5+\delta} e^{-(s-3)t}dt < 2\delta\ \ \forall s>3, \forall t>0 \text{ i } \forall\, 0<\delta<5$

$\underbrace{e^{-(s-3)t}<1}_{\forall s>3,\ \forall t>0}$

Aleshores $\mathcal{L}\{f(t)\}_{(s)} = \mathcal{L}\{e^{3t}\}_{(s)} = \dfrac{1}{s-3}$, $s>3$.

Per tant, veiem que la transformada de Laplace no és única. En particular, dues funcions que difereixen en un nombre finit (o infinit numerable, o conjunts encara més generals) tenen la mateixa transformada de Laplace. □

5. Demostreu que $\int_0^t \sin u \cos(t-u)\,du = \frac{t}{2}\sin t$

Solució.

Si $F_1(s)=\mathcal{L}\{f_1(t)\}_{(s)}$ i $F_2(s)=\mathcal{L}\{f_2(t)\}_{(s)}$ existeixen, llavors la transformada de Laplace del seu producte de convolució, $(f_1 * f_2)(t) = \int_0^t f_1(u) f_2(t-u)du$,

$$\mathcal{L}\{(f_1*f_2)(t)\}_{(s)} = \mathcal{L}\{f_1(t)\}_{(s)}\cdot\mathcal{L}\{f_2(t)\}_{(s)}$$

En aquest cas,

$$\int_0^t \sin u\cos(t-u)\,du = \mathcal{L}^{-1}\left\{\mathcal{L}\{(\sin*\cos)(t)\}_{(s)}\right\}_{(t)} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\mathcal{L}\{\sin t\}_{(s)}\cdot\mathcal{L}\{\cos t\}_{(s)}\right\}_{(t)}$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+1)^2}\right\}_{(t)} = \mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{d}{ds}\left(\frac{1/2}{s^2+1}\right)\right\}_{(t)} = \mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{d}{ds}\mathcal{L}\left\{\frac{\sin t}{2}\right\}_{(s)}\right\}_{(t)} =$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{\mathcal{L}\left\{\tfrac{t}{2}\sin t\right\}_{(s)}\right\}_{(t)} = \boxed{\tfrac{t}{2}\sin t}$$

6. Tenint en compte la definició d'exponencial complexa: $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$, calculeu $\mathcal{L}\{e^{iat}\}_{(s)}$ per a $a\in\mathbb{R}$ i comproveu que s'obté el mateix que si s'apliquès, formalment, la transformada de Laplace a una exponencial real.

Solució.

$$\mathcal{L}\{e^{iat}\}_{(s)} = \mathcal{L}\{\cos(at)\}_{(s)} + i\,\mathcal{L}\{\sin(at)\}_{(s)} = \frac{s}{s^2+a^2} + i\frac{a}{s^2+a^2}, \; s>0.$$

mentre que si transformem e^{iat} com si fos una exponencial real,

$$\mathcal{L}\{e^{iat}\}_{(s)} = \int_0^{+\infty} e^{iat}e^{-st}\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-(s-ia)t}\,dt = \lim_{A\to+\infty}\int_0^A e^{-(s-ia)t}\,dt =$$

$$= \lim_{A\to+\infty}\left[-\frac{e^{-(s-ia)t}}{s-ia}\right]_{t=0}^{t=A} = \frac{1}{s-ia} - \lim_{A\to+\infty}\frac{e^{-(s-ia)A}}{s-ia} = \begin{cases}\frac{1}{s-ia}, & s>0\\ \text{indefinida}, & s\le 0\end{cases}$$

Llavors:

$$\mathcal{L}\{e^{iat}\}_{(s)} = \frac{1}{s-ia}\cdot\frac{s+ia}{s+ia} = \frac{s+ia}{s^2+a^2} = \frac{s}{s^2+a^2} + i\frac{a}{s^2+a^2}, \; s>0$$

7. Calculeu la transformada de Laplace de les funcions següents:

a. $f(t) = e^{2-t}\,\mathcal{U}(t-2)$

b. $f(t) = e^t\cos^2 3t$

c. $f(t) = t\,e^{-3t}\cos(3t)$

d. $f(t) = t\int_0^t \tau e^{-\tau}\,d\tau$

e. $f(t) = e^{2t} * \sin t$

Solució.

a. $\mathcal{L}\{f(t)\}_{(s)} = \mathcal{L}\{e^{2-t}\,\mathcal{U}(t-2)\}_{(s)} = \mathcal{L}\{e^{-(t-2)}\,\mathcal{U}(t-2)\}_{(s)} = e^{-2s}\mathcal{L}\{e^{-t}\}_{(s)}$

$$= \boxed{\frac{e^{-2s}}{s+1}, \; s>-1}.$$

Nota. Recordem que: $\mathcal{L}\{f(t-a)\,\mathcal{U}(t-a)\}_{(s)} = e^{-as}\mathcal{L}\{f(t)\}_{(s)}, \; a>0$

En efecte:

$$\mathcal{L}\{f(t-a)\,\mathcal{U}(t-a)\}_{(s)} = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t-a)\,\mathcal{U}(t-a)\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-as} e^{-(t-a)s} f(t-a)\,\mathcal{U}(t-a)\,dt$$

$$= e^{-as}\int_0^{+\infty} e^{-(t-a)s} f(t-a)\,\mathcal{U}(t-a)\,dt = e^{-as}\int_a^{+\infty} e^{-(t-a)s} f(t-a)\,dt = \left\{\begin{array}{l} \text{c.v.} \\ u=t-a \\ du=dt \\ t=a \Rightarrow u=0 \\ t\to+\infty \Rightarrow u\to+\infty \end{array}\right.$$

$$= e^{-as}\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\,dt = e^{-as}\,\mathcal{L}\{f(t)\}_{(s)}$$

b. $f(t) = e^{t}\cos^2(3t) = e^{t}\,\dfrac{1+\cos(6t)}{2}$

$$\mathcal{L}\{f(t)\}_{(s)} = \mathcal{L}\{e^{t}\cos^2(3t)\}_{(s)} = \mathcal{L}\left\{e^{t}\,\frac{1+\cos(6t)}{2}\right\}_{(s)} = \mathcal{L}\left\{\frac{1+\cos(6t)}{2}\right\}_{(s-1)}$$

$$= \frac{1/2}{s-1} + \frac{s-1}{2\left((s-1)^2+36\right)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-1} + \frac{s-1}{(s-1)^2+36}\right),\quad s>1$$

On hem fet servir que:

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\}_{(s)} = \int_0^{+\infty} e^{-st}e^{at} f(t)\,dt = \int_0 e^{-(s-a)t} f(t)\,dt = \mathcal{L}\{f(t)\}_{(s-a)},\ s>a+c,$$

on suposem que $f(t)$ és d'ordre exponencial, ie, que existeixen $M, t_0, c>0$ t.q.:

$|f(t)| \leq M e^{ct}\ \forall\, t \geq t_0$.

c. $f(t) = t e^{-3t}\cos(3t)$

$$\mathcal{L}\{f(t)\}_{(s)} = \mathcal{L}\{t e^{-3t}\cos(3t)\}_{(s)} = \mathcal{L}\{t\cos(3t)\}_{(s+3)} = -\frac{d}{dr}\Big|_{r=s+3} \mathcal{L}\{\cos(3t)\}_{(r)}$$

$$= -\frac{d}{dr}\left(\frac{r}{r^2+9}\right)\Bigg|_{r=s+3} = -\frac{r^2+9-2r^2}{(r^2+9)^2}\Bigg|_{r=s+3} = \frac{(s+3)^2-9}{((s+3)^2+9)^2} = \frac{s^2+6s}{(s^2+6s+18)^2}$$

d. $f(t) = t\displaystyle\int_0^t \tau e^{-\tau}\,d\tau$

$$\mathcal{L}\{f(t)\}_{(s)} = \mathcal{L}\left\{t\int_0^t \tau e^{-\tau}d\tau\right\}_{(s)} = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}\left\{\int_0^t \tau e^{-\tau}d\tau\right\}_{(s)} = -\frac{d}{ds}\,\frac{\mathcal{L}\{te^{-t}\}_{(s)}}{s}$$

$$= \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s}\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{e^{-t}\}_{(s)}\right) = \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s}\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s+1}\right)\right) = -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s(s+1)^2}\right)$$

$$= \frac{(s+1)^2+2s(s+1)}{s^2(s+1)^4} = \frac{1}{s^2(s+1)^2} + \frac{2}{s(s+1)^3} = \frac{1}{s(s+1)^2}\left(\frac{1}{s} + \frac{2}{s+1}\right) = \boxed{\frac{3s+1}{s^2(s+1)^3}}$$

e) $f(t) = e^{2t} * \sin t = (\exp(2\cdot) * \sin)(t) = \int_0^t e^{2u} \sin(t-u)\,du$,

$$\mathcal{L}\{f(t)\}_{(s)} = \mathcal{L}\{(\exp(2\cdot)*\sin)(t)\}(s) = \mathcal{L}\{e^{2t}\}_{(s)} \cdot \mathcal{L}\{\sin t\}_{(s)} = \boxed{\frac{1}{(s-2)(s^2+1)},\ s>2}$$

8. Calculeu l'antitransformada de Laplace de les funcions següents

a. $G(s) = \dfrac{2s+5}{s^2+6s+34}$

b. $G(s) = \dfrac{e^{-2s}}{s^2(s-1)}$

Solució

a. $$G(s) = \frac{2s+5}{s^2+6s+34} = \frac{2(s+3)-1}{(s+3)^2+5^2} = 2\frac{s+3}{(s+3)^2+5^2} - \frac{1}{5}\cdot\frac{5}{(s+3)^2+5^2}$$

$$= 2\mathcal{L}\{\cos(5t)\}_{(s+3)} - \frac{1}{5}\mathcal{L}\{\sin(5t)\}_{(s+3)}$$

$$= 2\mathcal{L}\{e^{-3t}\cos(5t)\}_{(s)} - \frac{1}{5}\mathcal{L}\{e^{-3t}\sin(5t)\}_{(s)}$$

Aleshores:

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}_{(t)} = \left(2\cos(5t) - \frac{1}{5}\sin(5t)\right)e^{-3t}$$

b. $$G(s) = \frac{e^{-2s}}{s^2(s-1)} = e^{-2s}\left(\frac{A}{s^2} + \frac{B}{s} + \frac{C}{s-1}\right) \overset{(*)}{=} e^{-2s}\left(-\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s-1}\right) = (\&)$$

(*) $A(s-1) + Bs(s-1) + Cs^2 = 1$:

$s=1$: $C=1$

$s=0$: $-A=1 \Leftrightarrow A=-1$

$s=2$: $A+2B+4C = -1+2B+4 = 1 \Leftrightarrow 2B=-2 \Leftrightarrow B=-1$

$$(\&) = -e^{-2s}\mathcal{L}\{t\}_{(s)} - e^{-2s}\mathcal{L}\{1\}_{(s)} + e^{-2s}\mathcal{L}\{e^t\}_{(s)}$$

$$= -\mathcal{L}\{(t-2)\mathcal{U}(t-2)\}_{(s)} - \mathcal{L}\{\mathcal{U}(t-2)\}_{(s)} + \mathcal{L}\{e^{t-2}\mathcal{U}(t-2)\}_{(s)}$$

Aleshores:

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}_{(t)} = -(t-2)\mathcal{U}(t-2) - \mathcal{U}(t-2) + e^{t-2}\mathcal{U}(t-2)$$

$$= \boxed{\left(1-t+e^{t-2}\right)\mathcal{U}(t-2)} \quad \square$$

9. Escriviu la funció

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \leq t < \frac{3\pi}{2} \\ \sin t, & \text{si } t \geq \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

en termes de "funcions esgraó unitàries" (això és, funcions del tipus $\mathcal{U}(t-\ )$) i calculeu la seva transformada de Laplace.

Solució

$$f(t) = \mathcal{U}\left(t-\tfrac{3\pi}{2}\right)\cdot \sin t = \mathcal{U}\left(t-\tfrac{3\pi}{2}\right) \sin\left(t-\tfrac{3\pi}{2}+\tfrac{3\pi}{2}\right) = \mathcal{U}\left(t-\tfrac{3\pi}{2}\right)\cdot\left(\sin\left(t-\tfrac{3\pi}{2}\right)\overset{0}{\overset{\shortparallel}{\cos\left(\tfrac{3\pi}{2}\right)}} + \right.$$

$$\left. + \cos\left(t-\tfrac{3\pi}{2}\right)\underset{\underset{1}{\shortparallel}}{\sin\left(\tfrac{3\pi}{2}\right)}\right) = -\cos\left(t-\tfrac{3\pi}{2}\right)\mathcal{U}\left(t-\tfrac{3\pi}{2}\right)$$

Llavors:

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}_{(s)} = \mathcal{L}\left\{-\cos\left(t-\tfrac{3\pi}{2}\right).\mathcal{U}\left(t-\tfrac{3\pi}{2}\right)\right\}_{(s)} = -e^{-\frac{3\pi}{2}s}\mathcal{L}\{\cos t\}_{(s)} = \boxed{-\frac{s e^{-\frac{3\pi}{2}s}}{s^2+1}}$$

10. Feu el mateix que al problema anterior però amb la funció $f(t) = E(t)$ (part entera).

Solució. Suposem $s>0$, d'altra banda, si $s \leq 0$, és $\lim\limits_{t\to+\infty} E(t)e^{-st} = +\infty$ i la integral no convergeix.

$$\mathcal{L}\{E(t)\}_{(s)} = \int_0^{+\infty} E(t)e^{-st}dt = \lim_{A\to+\infty}\int_0^A E(t)e^{-st}dt \overset{(*)}{=} \lim_p \int_0^p E(t)e^{-st}dt$$

$$= \lim_p\left(\int_0^1 E(t)e^{-st}dt + \int_1^2 E(t)e^{-st}dt + \int_2^3 E(t)e^{-st}dt + \dots + \int_{p-1}^p E(t)e^{-st}dt\right)$$

$$= \lim_p\left(\int_0^1 0\cdot e^{-st}dt + \int_1^2 e^{-st}dt + \int_2^3 2e^{-st}dt + \dots + \int_{p-1}^p (p-1)e^{-st}dt\right)$$

$$= \lim_p\left(\frac{e^{-s}}{s} - \frac{e^{-2s}}{s} + 2\frac{e^{-2s}}{s} - 2\frac{e^{-3s}}{s} + 3\frac{e^{-3s}}{s} - 3\frac{e^{-4s}}{s} + 4\frac{e^{-4s}}{s} - 4\frac{e^{-5s}}{s} + \dots\right.$$

$$\left.\dots + \frac{p-2}{s}e^{-(p-2)s} - \frac{p-2}{s}e^{-(p-1)s} + \frac{p-1}{s}e^{-(p-1)s} - \frac{p-1}{s}e^{-ps}\right)$$

$$= \lim_p \frac{1}{s}\left(1 + e^{-s} + e^{-2s} + \dots + e^{-(p-1)s} + e^{-ps} - 1 - pe^{-ps}\right) = \lim_p\left(\frac{1}{s}\sum_{k=0}^{p} e^{-ks} - \frac{1}{s} - \underbrace{\frac{p}{s}e^{-ps}}_{\substack{\uparrow\, p\to+\infty \\ (s>0) \\ 0}}\right)$$

(*) Recordem que si $f(t)$ és una funció de signe constant en $[a,+\infty)$, aleshores $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt =$
$= \lim\limits_{A\to+\infty}\int_a^A f(t)\,dt = \lim\limits_p \int_a^p f(t)\,dt.$

$$= \lim_{p} \frac{1}{s}\left(-1+\sum_{k=0}^{p} e^{-ks}\right) \overset{(*)}{=} \frac{1}{s}\sum_{p=0}^{\infty} e^{-pk} - \frac{1}{s} \overset{(*)}{=} \frac{1}{s}\left(\frac{1}{1-e^{-s}}-1\right)$$

$$= \frac{1}{s}\cdot\frac{1-1+e^{-s}}{1-e^{-s}} = \frac{1}{s}\cdot\frac{e^{-s}}{e^{-s}(e^{s}-1)} = \boxed{\frac{1}{s(e^{s}-1)}},\ (s>0)$$

$$(*)\ \lim_{p}\sum_{k=0}^{p} e^{-ks} = \sum_{p=0}^{\infty} e^{-ks} = \sum_{p=0}^{\infty} r^{p} = \frac{1}{1-r} = \frac{1}{1-e^{-s}}$$

$r = e^{-s} < 1,\ (\text{si } s>0)$

Alternativament, tenint en compte la definició de la funció esglaó $\mathcal{U}(t-a) = \begin{cases} 0, & t<a \\ 1, & t\geq a \end{cases}$

podem posar:

$0\leq t<1$: $E(t) = \mathcal{U}(t-1)+\mathcal{U}(t-2)+\dots = 0,$

$1\leq t<2$: $E(t) = \mathcal{U}(t-1)+\mathcal{U}(t-2)+\dots = 1,$

$2\leq t<3$: $E(t) = \mathcal{U}(t-1)+\mathcal{U}(t-2)+\mathcal{U}(t-3)+\dots = 2, \dots$

i llavors:

$$E(t) = \mathcal{U}(t-1)+\mathcal{U}(t-2)+\dots+\mathcal{U}(t-p)+\dots,\quad t>0$$

d'on aplicant —formalment—, la transformada de Laplace terme-a-terme (no justificarem aquest pas), s'obté:

$$\mathcal{L}\{E(t)\}_{(s)} = \mathcal{L}\{\mathcal{U}(t-1)\}_{(s)} + \mathcal{L}\{\mathcal{U}(t-2)\}_{(s)} + \dots + \mathcal{L}\{\mathcal{U}(t-p)\}_{(s)} + \dots$$

$$= \frac{e^{-s}}{s} + \frac{e^{-2s}}{s} + \dots + \frac{e^{-ps}}{s} + \dots = \frac{1}{s}\left(\sum_{p=0}^{\infty} e^{-ps} - 1\right) = \frac{1/s}{1-e^{-s}} - \frac{1}{s}$$

$$= \frac{1-1+e^{-s}}{s(1-e^{-s})} = \frac{e^{-s}}{se^{-s}(e^{s}-1)} = \boxed{\frac{1}{s(e^{s}-1)}},\ (s>0)\ \square$$

11. Calculeu la antitransformada de Laplace de la funció $G(s)=\ln\left(\frac{s^2+1}{s^2+4}\right)$ fent servir que $\mathcal{L}\{t^n f(t)\}(s)=(-1)^n\frac{d^n}{ds^n}\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$.

Solució. Sigui $g(t)$ t.q.: $\mathcal{L}\{g(t)\}_{(s)}=G(s)$. Aleshores:

$$\mathcal{L}\{t g(t)\}_{(s)}=-\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{g(t)\}_{(s)}=-\frac{dG}{ds}(s)=-\frac{s^2+4}{s^2+1}\cdot\frac{2s(s^2+4)-2s(s^2+1)}{(s^2+4)^2}=\frac{-6s}{(s^2+1)(s^2+4)}$$
$$=\frac{As+B}{s^2+1}+\frac{Cs+D}{s^2+4}\overset{(\&)}{=}\frac{-2s}{s^2+1}+\frac{2s}{s^2+4}=-2\mathcal{L}\{\cos t\}_{(s)}+2\mathcal{L}\{\cos(2t)\}_{(s)}$$

(&) Descomposició en fraccions simples,

$$(As+B)(s^2+4)+(Cs+D)(s^2+1)=-6,\ \forall s$$
$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l}A+C=0\\4A+C=-6\end{array}\right\}:\ \begin{array}{l}3A=-6\Leftrightarrow A=-2\\C=-A=2\end{array}$$

i

$$\left.\begin{array}{l}B+D=0\\4B+D=0\end{array}\right\}:\ B=0=D$$

Aleshores

$$g(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{\ln\left(\frac{s^2+1}{s^2+4}\right)\right\}_{(s)}=\frac{1}{t}\mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{g(t)\}_{(s)}\right\}_{(t)}$$
$$=\frac{1}{t}\mathcal{L}^{-1}\left\{-2\mathcal{L}\{\cos t\}_{(s)}+2\mathcal{L}\{\cos(2t)\}_{(s)}\right\}$$
$$=\boxed{-\frac{2}{t}\left(\cos t-\cos(2t)\right)}\quad\square$$

12. Calculeu l'antitransformada de Laplace de la funció $F(s)=\frac{1}{(s+1)^2}$ de la forma següent

(i) Fent servir la transformada de Laplace de la convolució

(ii) Pels teoremes de translació

Solució.

(i) Recordem que $(f_1*f_2)(t)=\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)\,d\tau \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{L}\{(f_1*f_2)(t)\}_{(s)}=\mathcal{L}\{f_1(t)\}_{(s)}\cdot\mathcal{L}\{f_2(t)\}_{(s)}$,

on suposem que existeixen $F_1(s)=\mathcal{L}\{f_1(t)\}_{(s)}$ i $F_2(s)=\mathcal{L}\{f_2(t)\}_{(s)}$.

Siguin:

$$F_1(s)=\mathcal{L}\{f_1(t)\}_{(s)}=\frac{1}{s+1}=\mathcal{L}\{f_2(t)\}_{(s)}=F_2(s),$$

per tant:

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}_{(t)}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2}\right\}_{(t)}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\mathcal{L}\{e^{-t}\}_{(s)}\cdot\mathcal{L}\{e^{-t}\}_{(s)}\right\}_{(t)}=$$
$$=\mathcal{L}^{-1}\left\{\mathcal{L}\{e^{-t}*e^{-t}\}_{(s)}\right\}(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{\mathcal{L}\left\{\int_0^t e^{-\tau}e^{-(t-\tau)}d\tau\right\}_{(s)}\right\}(t)$$
$$=\int_0^t e^{-\tau}e^{-t}e^{\tau}d\tau=e^{-t}\int_0^t dt=\boxed{te^{-t}}.$$

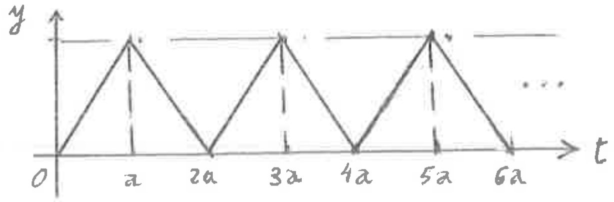
(ii) Recordem que $\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\}(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s-a)$, $s>a+c$;

on suposem que f és d'ordre exponencial, i.e, que $\exists\, M, t_0, c>0$ t.q. $|f(t)| \leq M e^{ct}\ \forall t \geq t_0$.

Així:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2}\right\}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\mathcal{L}\{t\}(s+1)\right\}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\mathcal{L}\{e^{-t}t\}(s)\right\}(t) = \boxed{te^{-t}}$$

13. Calculeu la transformada de Laplace de la funció "ona triangular".



Transformada de Laplace d'una funció periòdica. — suposem f contínua a trossos i periòdica de període T, i.e, $f(t+T) = f(t)\ \forall t>0$, $T>0$. Llavors, clarament, existeix la TL de $f(t)$, ja que llavors $f(t)$ és acotada i per tant, de creixement exponencial.

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\,dt \overset{(*)}{=} \lim_{A\to+\infty} \int_0^A e^{-st} f(t)\,dt = \lim_p \int_0^{pT} e^{-st} f(t)\,dt =$$

$$= \lim_p \left(\int_0^T e^{-st} f(t)\,dt + \int_T^{2T} e^{-st} f(t)\,dt + \int_{2T}^{3T} e^{-st} f(t)\,dt + \dots + \int_{(p-1)T}^{pT} e^{-st} f(t)\,dt \right)$$

$$= \lim_p \sum_{k=0}^{p-1} \int_{kT}^{(k+1)T} e^{-st} f(t)\,dt = \left\{ \begin{array}{l} \text{canvi de variable:} \\ t = \tau + kT \text{ : funció monòtona creixent} \\ t = kT : \tau = 0 : \quad t = \varphi(\tau) = \tau + kT : dt = \varphi'(\tau)\,d\tau = d\tau \\ t = (k+1)T : \tau = T \end{array} \right\}$$

$$= \lim_p \sum_{k=0}^{p-1} \int_0^T e^{-s(\tau+kT)} \underbrace{f(\tau+kT)}_{= f(\tau)}\,d\tau = \lim_p \sum_{k=0}^{p-1} e^{-skT} \int_0^T e^{-s\tau} f(\tau)\,d\tau$$

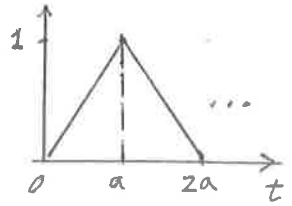
$$= \left(\int_0^T e^{-s\tau} f(\tau)\,d\tau \right) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} e^{-kTs} = \frac{1}{1-e^{-Ts}} \int_0^T e^{-st} f(t)\,dt, \text{ (veure taules).}$$

Suposem $s>0$, llavors $e^{-Ts} < 1$

i: $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} e^{-kTs} \underset{r = e^{-Ts} < 1}{=} \sum_{k=0}^{\infty} r^k = \frac{1}{1-r} = \frac{1}{1-e^{-Ts}}$

(*) Com que $\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\,dt$ és convergent ($f(t)$ és CT i d'ordre exponencial segons hem comentat dalt), llavors: $\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\,dt = \lim_{A\to+\infty} \int_0^A e^{-st} f(t)\,dt = \lim_p \int_0^{K_p} e^{-st} f(t)\,dt$, per qualsevol successió $\{K_p\}_{p\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ t.q. $K_p \to \infty$.

En el cas particular de l'ona triangular



$$f(t) = \begin{cases} t/a, & 0 \le t \le a \\ -t/a + 2, & a < t \le 2a \end{cases}$$

i $f(t+2a) = f(t)\ \forall\, t \ge 0$.

$$T = 2a: \int_0^{2a} e^{-st} f(t)\,dt = \int_0^a \frac{t}{a} e^{-st}\,dt + \int_a^{2a}\left(-\frac{t}{a}+2\right)e^{-st}\,dt \overset{(*)}{=} \left(-\frac{e^{-st}}{sa}\left(t+\frac{1}{s}\right)\right)\Bigg|_{t=0}^{t=a}$$

$$+ \frac{e^{-st}}{sa}\left(t+\frac{1}{s}\right)\Bigg|_{t=a}^{t=2a} - \frac{2}{s}e^{-st}\Bigg|_{t=a}^{t=2a} = \frac{1}{as^2} - \frac{e^{-as}}{as}\left(a+\frac{1}{s}\right) + \frac{e^{-2as}}{as}\left(2a+\frac{1}{s}\right)$$

$$- \frac{e^{-as}}{as}\left(a+\frac{1}{s}\right) + \frac{2}{s}e^{-as} - \frac{2}{s}e^{-2as}$$

$$= \frac{e^{-2as}}{s}\left(\cancel{2} + \frac{1}{as} - \cancel{2}\right) - \frac{e^{-as}}{s}\left(\cancel{2} + \frac{2}{as} - \cancel{2}\right) + \frac{1}{as^2} = \frac{1}{as^2}\left(1 - 2e^{-as} + e^{-2as}\right)$$

$$= \frac{1}{as^2}\cdot\left(1 - e^{-as}\right)^2$$

Aleshores:

$$\mathcal{L}\{f(t)\}_{(s)} = \frac{1}{1-e^{-2as}}\int_0^{2a} f(t)e^{-st}\,dt = \frac{1}{1-e^{-2as}}\cdot\frac{(1-e^{-as})^2}{as^2} = \frac{(1-e^{-as})^{2}}{as^2\cancel{(1-e^{-as})}(1+e^{-as})}$$

$$= \frac{e^{-as/2}\left(e^{as/2} - e^{-as/2}\right)}{as^2 e^{-as/2}\left(e^{as/2} + e^{-as/2}\right)} = \boxed{\frac{1}{as^2}\tanh\left(\frac{as}{2}\right)} \quad \square$$

14. (i) Demostreu que si f és contínua a trossos i d'ordre exponencial i tal que existeix $\lim_{t\to 0^+}\frac{f(t)}{t}$, aleshores $\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}_{(s)} = \int_s^{+\infty} F(u)\,du$, on $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}_{(s)}$.

(ii) Calculeu la transformada de Laplace de la funció Sinus-integral

$$f(t) = \int_0^t \frac{\sin u}{u}\,du =: Si(t)$$

(iii) Demostreu que $\int_0^{+\infty}\frac{f(t)}{t}\,dt = \int_0^{+\infty} F(u)\,du$ si existeixen les integrals. Com a aplicació calculeu $\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,dt$.

(*) Integració per parts:

$$\int t e^{-st}\,dt = \left\{\begin{array}{l} u = t \Rightarrow u' = 1 \\ v' = e^{-st} \Rightarrow v = -e^{-st}/s \end{array}\right\} = -\frac{e^{-st}}{s}t + \frac{1}{s}\int e^{-st}\,dt = -\frac{t}{s}e^{-st} - \frac{1}{s^2}e^{-st} = -\frac{e^{-st}}{s}\left(t+\frac{1}{s}\right)$$

Solució.

(i) Definim: $g(t) = \frac{f(t)}{t}$, $t>0 \Leftrightarrow f(t) = t\,g(t)$.

Aleshores $F(s) := \mathcal{L}\{f(t)\}_{(s)} = \mathcal{L}\{t\,g(t)\}_{(s)} = -\frac{dG}{ds}(s)$ on posem $G(s) := \mathcal{L}\{g(t)\}_{(s)}$.
Notem que $g(t)$ és contínua a trossos i d'ordre exponencial, per tant existeix $G(s)$. Integrant a l'interval $[s,A]$, $A>s>\varepsilon>0$.

$$G(s) - G(A) = \int_s^A F(u)\,du$$

prenent límits quan $A \to +\infty$ i tenint en compte que la integral $\int_s^{+\infty} F(u)\,du$ existeix i que, si $g(t)$ és d'ordre exponencial, llavors $\lim_{A\to+\infty} G(A) = \lim_{A\to+\infty} \mathcal{L}\{g(t)\}_{(A)} = 0$ (exercici: demostreu-lo!); llavors:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}_{(s)} = \mathcal{L}\{g(t)\}_{(s)} = G(s) = \int_s^{+\infty} F(u)\,du$$

(ii) $\mathcal{L}\{Si(t)\}_{(s)} = \mathcal{L}\left\{\int_0^t \frac{\sin u}{u}\,du\right\}_{(s)} = \frac{1}{s}\mathcal{L}\left\{\frac{\sin t}{t}\right\}_{(s)} = \frac{1}{s}\int_s^{+\infty} \mathcal{L}\{\sin t\}_{(u)}\,du = \frac{1}{s}\int_s^{+\infty} \frac{du}{1+u^2}$

$= \frac{1}{s}\lim_{A\to+\infty} \int_s^A \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{s}\left(\lim_{A\to+\infty} \arctan A - \arctan s\right) = \frac{\pi/2 - \arctan s}{s}$. □

(iii) $\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,dt = \int_0^{+\infty} F(u)\,du$.

A partir de (ii) $\int_s^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,dt = \int_s^{+\infty} F(u)\,du$, si les integrals existeixen. Prenent $s \to 0^+$, tenim
$\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,dt = \int_0^{+\infty} F(u)\,du$ (si les integrals existeixen)

Aplicació: $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt = \lim_{s\to0^+} \int_s^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt = \lim_{s\to0^+} \int_s^{+\infty} \mathcal{L}\{\sin t\}_{(u)}\,du = \lim_{s\to0^+} \int_s^{+\infty} \frac{du}{1+u^2} =$

$= \int_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^2} = \lim_{A\to+\infty} \int_0^A \frac{du}{1+u^2} = \lim_{A\to+\infty} \arctan A - \arctan 0 = \boxed{\pi/2}$.

15. Demostreu que $\mathcal{L}\left\{\int_0^t \left(\int_0^{t_1} f(u)\,du\right) dt_1\right\}_{(s)} = \frac{1}{s^2}\mathcal{L}\{f(t)\}_{(s)}$

Solució.

Definim $g(t) := \int_0^t f(u)\,du$, d'on: $\mathcal{L}\{g(t)\}_{(s)} = \frac{\mathcal{L}\{f(t)\}_{(s)}}{s} = \frac{F(s)}{s^2}$, on posem $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}_{(s)}$.
aleshores $\mathcal{L}\left\{\int_0^t \left(\int_0^{t_1} f(u)\,du\right) dt_1\right\}_{(s)} = \mathcal{L}\left\{\int_0^t g(t_1)\,dt_1\right\}_{(s)} = \frac{1}{s}\mathcal{L}\{g(t)\}_{(s)} = \frac{1}{s^2}\mathcal{L}\{f(t)\}_{(s)}$. □

16. Calculeu $\int_0^{+\infty} t e^{-2t}\cos t\,dt$.

Solució:

$$\int_0^{+\infty} t e^{-2t}\cos t\,dt = \mathcal{L}\{t\cos t\}_{(2)} = -\frac{d}{ds}\Big|_{s=2} \mathcal{L}\{\cos t\}_{(s)} = -\frac{d}{ds}\Big|_{s=2}\left(\frac{s}{s^2+1}\right)$$

$$= -\frac{s^2+1-2s^2}{(s^2+1)^2}\Big|_{s=2} = \frac{s^2-1}{(s^2+1)^2}\Big|_{s=2} = \boxed{\frac{3}{25}} \quad \square$$

17. Sigui la funció $f(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t \le 1 \\ 2t, & t > 1 \end{cases}$

(i) Calculeu $\mathcal{L}\{f(t)\}_{(s)}$

(ii) Calculeu $\mathcal{L}\{f'(t)\}_{(s)}$

(iii) Es compleix la fórmula $\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\}_{(s)} - f(0)$. Què falla?

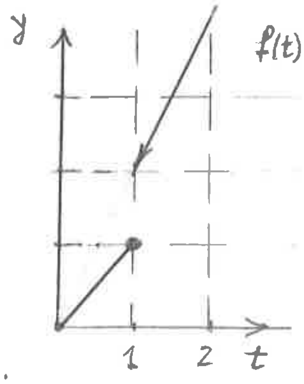
Solució.

(i) $f(t) = \big(1-\mathcal{U}(t-1)\big)(t-1) + 1 - \mathcal{U}(t-1) + 2(t-1)\,\mathcal{U}(t-1) + 2\,\mathcal{U}(t-1)$

$= 1 + t - 1 + \mathcal{U}(t-1) + (t-1)\,\mathcal{U}(t-1) = t + \mathcal{U}(t-1) + (t-1)\,\mathcal{U}(t-1)$

Nota. més fàcil: $f(t) = t + t\,\mathcal{U}(t-1) = t + (1+t-1)\,\mathcal{U}(t-1) = t + \mathcal{U}(t-1) + (t-1)\,\mathcal{U}(t-1)$,
d'on: $\mathcal{L}\{f(t)\}_{(s)} = \mathcal{L}\{t\}_{(s)} + \mathcal{L}\{(1+(t-1))\,\mathcal{U}(t-1)\}_{(s)} = \mathcal{L}\{t\}_{(s)} + e^{-s}\mathcal{L}\{1+t\}_{(s)}$

$$= \frac{1}{s^2} + e^{-s}\left(\frac{1}{s}+\frac{1}{s^2}\right).$$



(ii) Veiem que f no és contínua en $t=1$. En canvi és contínua i derivable en $]0,1[\,\cup\,]1,+\infty[$, amb $f(0^+)=0$, $f(1^-)=1$ $\neq f(1^+)=2$, i:

$$f'(t) = 1 + \mathcal{U}(t-1),$$

per $t \in\,]0,1[\,\cup\,]1,+\infty[$, amb $f'(0^+)=1$, $f'(1^-)=1 \neq 2 = f'(1^+)$.

Si calculem la transformada de Laplace de $f'(t)$ directament(*):

$$\mathcal{L}\{f'(t)\}_{(s)} = \mathcal{L}\{1+\mathcal{U}(t-1)\}_{(s)} = \frac{1}{s}\left(1+e^{-s}\right) \qquad (\&)$$

(*) Notem que f' és contínua a trossos i d'ordre exponencial, per tant la seva transformada de Laplace està definida. De fet (exercici!) es comprova que existeix per $s>0$.

(iii) En canvi:

$$s\mathcal{L}\{f(t)\}(s) - f(0) = \frac{1}{s} + e^{-s}\left(1+\frac{1}{s}\right) - 0$$

i per tant no es satisfà la fórmula. Això és degut a que $f(t)$ no és contínua, sinó que té una discontinuïtat de salt en $t=1$. Si fem el càlcul "correcte": $\mathcal{L}\{f'(t)\}(s) =$

$$= \int_0^{+\infty} f'(t)e^{-st}dt = \int_0^1 f'(t)e^{-st}dt + \int_1^{+\infty} f'(t)e^{-st}dt$$

$$= f(t)e^{-st}\Big|_0^{1^-} + s\int_0^1 f(t)e^{-st}dt + f(t)e^{-st}\Big|_{1^+}^{+\infty} + s\int_1^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$$

$$= \lim_{t\to 1^-} f(t)e^{-st} - \lim_{t\to 1^+} f(t)e^{-st} - f(0^+) + \underbrace{\lim_{A\to+\infty} f(A)e^{-sA}}_{\substack{= \\ 0 \\ \text{(si } f \text{ és d'ordre} \\ \text{exponencial)}}} + s\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$$

$$= s\mathcal{L}\{f(t)\}(s) - f(0^+) + \overbrace{\lim_{t\to 1^-} f(t)e^{-st} - \lim_{t\to 1^+} f(t)e^{-st}}^{(*)}$$

$$= s\left[\frac{1}{s^2} + e^{-s}\left(\frac{1}{s}+\frac{1}{s^2}\right)\right] - 0 + e^{-s} - 2e^{-s} = \frac{1}{s} + e^{-s}\left(1+\frac{1}{s}\right) - e^{-s} = \frac{1}{s}\left(1+e^{-s}\right)$$

i aquest resultat coincideix amb (&) obtingut a (ii). Notem, a més que si f fos contínua llavors (*) seria $=0$ i aleshores la fórmula seria vàlida. □

18. Calculeu $\mathcal{L}\left\{\frac{e^{-2t}}{\sqrt{t}}\right\}(s)$. Per a quins valors de s existeix la transformada?

Solució.

$$\mathcal{L}\left\{\frac{e^{-2t}}{\sqrt{t}}\right\}(s) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-2t}}{\sqrt{t}} e^{-st}dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(s+2)t}}{\sqrt{t}}dt.$$

Veiem que, per qualsevol $a>0$ $\int_a^{+\infty} \frac{e^{-(s+2)t}}{\sqrt{t}}dt$ és convergent $\Leftrightarrow s>-2$, mentre que $\int_0^a \frac{e^{-(s+2)t}}{\sqrt{t}}dt$ és convergent per qualsevol $a>0$ i $\forall s\in\mathbb{R}$.

Aleshores la integral és convergent $\Leftrightarrow s>-2$ i llavors la corresponent transformada de Laplace val:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{e^{-2t}}{\sqrt{t}}\right\}(s) = \mathcal{L}\left\{t^{-1/2}\right\}(s+2) = \frac{\Gamma(-\frac{1}{2}+1)}{(s+2)^{-\frac{1}{2}+1}} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{(s+2)^{1/2}} = \sqrt{\frac{\pi}{s+2}},\quad s>-2. \ □$$

19. Calculeu: $\mathcal{L}\{t\,Si(t)\}_{(s)} = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{Si(t)\}_{(s)} = -\underset{\nwarrow \text{problema } 14(ii)}{\frac{d}{ds}}\left(\frac{\pi/2 - \arctan s}{s}\right)$

$$= \frac{\pi/2}{s^2} + \frac{\frac{s}{1+s^2} - \arctan s}{s^2} = \frac{\pi/2}{s^2} + \frac{1}{s(1+s^2)} - \frac{\arctan s}{s^2} = \frac{\pi/2 - \arctan s}{s^2} + \frac{1}{s(1+s^2)}$$

$$= \boxed{\frac{\text{arc cot } s}{s^2} + \frac{1}{s(1+s^2)}} \quad \square$$

20. Comproveu que $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}\sin t}{t}\,dt = \frac{\pi}{4}$. [Indicació: feu servir l'apartat 14 iii]

Solució.

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}\sin t}{t}\,dt = \int_0^{+\infty} \mathcal{L}\{e^{-t}\sin t\}_{(u)}\,du = \int_0^{+\infty} \mathcal{L}\{\sin t\}_{(u+1)}\,du = \int_0^{+\infty} \frac{du}{(u+1)^2+1}$$

$$= \lim_{u\to+\infty} \arctan(u+1) - \arctan 1 = \pi/2 - \pi/4 = \boxed{\pi/4}$$

21. Si f és contínua a trossos i d'ordre exponencial, demostreu que

$$\mathcal{L}\left\{\int_a^t f(\tau)\,d\tau\right\}_{(s)} = \frac{\mathcal{L}\{f(t)\}_{(s)}}{s} + \frac{1}{s}\int_a^0 f(\tau)\,d\tau$$

Solució.

$$\mathcal{L}\left\{\int_a^t f(\tau)\,d\tau\right\}_{(s)} = \mathcal{L}\left\{\int_0^a f(\tau)\,d\tau + \int_a^t f(\tau)\,d\tau - \int_0^a f(\tau)\,d\tau\right\}_{(s)} = \mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)\,d\tau\right\}_{(s)}$$

$$- \mathcal{L}\left\{\int_0^a f(\tau)\,d\tau\right\}_{(s)} = \frac{\mathcal{L}\{f(t)\}_{(s)}}{s} - \left(\int_0^a f(\tau)\,d\tau\right)\mathcal{L}\{1\}_{(s)}$$

$$= \frac{\mathcal{L}\{f(t)\}_{(s)}}{s} - \frac{1}{s}\int_0^a f(\tau)\,d\tau \quad \square$$

22. Calculeu $\mathcal{L}\{t^2\mathcal{U}(t-2)\}_{(s)}$.

Solució.-

$$\mathcal{L}\{t^2\mathcal{U}(t-2)\}_{(s)} = \mathcal{L}\{(t-2+2)^2\mathcal{U}(t-2)\}_{(s)} = \mathcal{L}\{(t-2)^2\mathcal{U}(t-2)\}_{(s)} + 4\mathcal{L}\{(t-2)\mathcal{U}(t-2)\}_{(s)}$$

$$+ 4\mathcal{L}\{\mathcal{U}(t-2)\}_{(s)} = e^{-2s}\mathcal{L}\{t^2\}_{(s)} + 4e^{-2s}\mathcal{L}\{t\}_{(s)} + 4e^{-2s}\mathcal{L}\{1\}_{(s)}$$

$$= \left(\frac{2}{s^3} + \frac{4}{s^2} + \frac{4}{s}\right)e^{-2s} = \boxed{\frac{2}{s}\left(\frac{1}{s^2} + \frac{2}{s} + 2\right)e^{-2s}} \quad \square$$

23. Feu servir la transformada de Laplace per resoldre els següents problemes de Cauchy:

(a) $y'+2y=t,\ y(0)=-1$

(b) $y''-4y'+4y=t^3,\ y(0)=1,\ y'(0)=0.$

(c) $y'''+2y''-y'-2y=\sin 3t,\ y(0)=0,\ y'(0)=0,\ y''(0)=1.$

(d) $y''-5y'+6y=\mathcal{U}(t-1),\ y(0)=0,\ y'(0)=1.$

Solució.

Anomenarem $Y(s)=\mathcal{L}\{y(t)\}_{(s)}$; aplicant la TL a totes dues bandes de l'EDO:

(a) $sY(s)-y(0)+2Y(s)=(s+2)Y(s)-\overset{-1}{y(0)}=(s+2)Y(s)+1=\frac{1}{s^2}$, on $\frac{1}{s^2}=\mathcal{L}\{t\}_{(s)}$

$$\Rightarrow Y(s)=\frac{1}{s^2(s+2)}-\frac{1}{s+2}=\mathcal{L}\left\{\int_0^t \tau e^{-2(t-\tau)}d\tau\right\}_{(s)}-\mathcal{L}\left\{e^{-2t}\right\}_{(s)}$$

Aleshores:

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{Y(s)\right\}_{(t)}=e^{-2t}\int_0^t \tau e^{2\tau}d\tau-e^{-2t}\overset{(*)}{=}-\frac{1}{4}+\frac{t}{2}+\frac{e^{-2t}}{4}-e^{-2t}$$

$$=\boxed{-\frac{1}{4}+\frac{t}{2}-\frac{3}{4}e^{-2t}}$$

(*) Integrant per parts:

$$\int_0^t \tau e^{2\tau}d\tau=\left\{\begin{array}{l}u=\tau\Rightarrow u'=1\\ v'=e^{2\tau}\Rightarrow v=e^{2\tau}/2\end{array}\right\}=\tau\frac{e^{2\tau}}{2}\Big|_0^t-\frac{1}{2}\int_0^t e^{2\tau}d\tau=\frac{t}{2}e^{2t}+\frac{1}{4}\left(1-e^{2t}\right)$$

(b) $s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)-4sY(s)+4y(0)+4Y(s)=(s^2-4s+4)Y(s)-(s-4)\overset{=1}{y(0)}-\overset{=0}{y'(0)}$

$=\frac{6}{s^4}$, on $\mathcal{L}\{t^3\}_{(s)}=\frac{6}{s^4}$

$$\Leftrightarrow Y(s)=\frac{6}{s^4(s-2)^2}+\frac{s-4}{(s-2)^2}=\frac{6}{s^4(s-2)^2}+\frac{s-2}{(s-2)^2}-\frac{2}{(s-2)^2}$$

$$=\frac{6}{s^4(s-2)^2}-\frac{2}{(s-2)^2}+\frac{1}{s-2}$$

$$\frac{6}{s^4(s-2)^2}=\frac{A}{s^4}+\frac{B}{s^3}+\frac{C}{s^2}+\frac{D}{s}+\frac{E}{(s-2)^2}+\frac{F}{s-2}$$

$$\Leftrightarrow A(s-2)^2+Bs(s-2)^2+Cs^2(s-2)^2+Ds^3(s-2)^2+Es^4+Fs^4(s-2)=6\ \forall s$$

$$\Leftrightarrow A(s^2-4s+4)+B(s^3-4s^2+4s)+C(s^4-4s^3+4s^2)+D(s^5-4s^4+4s^3)+$$

$$+Es^4+F(s^5-2s^4)=6\ \forall s$$

$$\begin{aligned}
4A \quad &= 6 \\
-4A + 4B \quad &= 0 \\
A - 4B + 4C \quad &= 0 \\
B - 4C + 4D \quad &= 0 \\
C - 4D + E - 2F \quad &= 0 \\
D \quad + F \quad &= 0
\end{aligned}$$

d'on:

$A = 3/2$, $B = 3/2$

$3/2 - 6 + 4C = -9/2 + 4C = 0 \Rightarrow C = 9/8$

$3/2 - \frac{9}{2} + 4D = -3 + 4D = 0 \Rightarrow D = 3/4$

$C - 2D + E = 9/8 - 3/2 + E = 0 \Rightarrow E = 3/8$

$F = -D = -3/4$

Aleshores:

$$Y(s) = \frac{3/2}{s^4} + \frac{3/2}{s^3} + \frac{9/8}{s^2} + \frac{3/4}{s} + \frac{3/8}{(s-2)^2} - \frac{3/4}{s-2} - \frac{2}{(s-2)^2} + \frac{1}{s-2}$$

$$= \frac{1}{4}\mathcal{L}\{t^3\}_{(s)} + \frac{3}{4}\mathcal{L}\{t^2\}_{(s)} + \frac{9}{8}\mathcal{L}\{t\}_{(s)} + \frac{3}{4}\mathcal{L}\{1\}_{(s)}$$

$$- \frac{13}{8}\mathcal{L}\{t\}_{(s-2)} + \frac{1}{4}\mathcal{L}\{e^{2t}\}_{(s)}$$

$$= \frac{1}{4}\mathcal{L}\{t^3\}_{(s)} + \frac{3}{4}\mathcal{L}\{t^2\}_{(s)} + \frac{9}{8}\mathcal{L}\{t\}_{(s)} + \frac{3}{4}\mathcal{L}\{1\}_{(s)} - \frac{13}{8}\mathcal{L}\{te^{2t}\}_{(s)} + \frac{1}{4}\mathcal{L}\{e^{2t}\}_{(s)}$$

i llavors, la solució del PVI resulta:

$$\boxed{y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}_{(t)} = \frac{1}{4}e^{2t} - \frac{13}{8}te^{2t} + \frac{t^3}{4} + \frac{3}{4}t^2 + \frac{9}{8}t + \frac{3}{4}}$$

(c) $s^3Y(s) - s^2y(0) - sy'(0) - y''(0) + 2s^2Y(s) - 2sy(0) - 2y'(0) - sY(s) + y(0) - 2Y(s)$

$$= (s^3 + 2s^2 - s - 2)Y(s) - (s^2 + 2s - 1)\overset{=0}{y(0)} - (s+2)\overset{=0}{y'(0)} - \overset{=1}{y''(0)} = \frac{3}{s^2+9},$$

on l'últim terme és la TL de $f(t) = \sin(3t)$, ie: $\mathcal{L}\{\sin(3t)\}_{(s)} = \frac{3}{s^2+9}$. Aleshores,

$$Y(s) = \frac{3}{(s^2+9)(s-1)(s+1)(s+2)} + \frac{1}{(s+2)(s+1)(s-1)}$$

Descomposició en fraccions simples

$$\frac{3}{(s^2+9)(s-1)(s+1)(s+2)} = \frac{As+B}{s^2+9} + \frac{C}{s-1} + \frac{D}{s+1} + \frac{E}{s+2}$$

$$\Leftrightarrow (As+B)(s-1)(s+1)(s-2) + C(s^2+9)(s+1)(s+2) + D(s^2+9)(s-1)(s+2)$$

$$+E(s^2+9)(s+1)(s-1) = 3 \quad \forall s \qquad (*)$$

$s = 1$: $60C = 3 \Rightarrow C = 1/20$

$s = -1$: $-20D = 3 \Rightarrow D = -3/20$

$s = -2$: $39E = 3 \Rightarrow E = 1/13$

$s=0: -2B+18C-18D-9E=3 \Leftrightarrow -2B = 3-18C+18D+9E$
$= 3-\frac{18}{20}-\frac{54}{20}+\frac{9}{13} = 3-\frac{36}{10}+\frac{9}{13} = \frac{390-378+90}{130}$
$= \frac{12}{130}$; $B = -\frac{6}{130}$

Per últim, si considerem els coeficients de grau 4 de la banda de l'esquerra de l'equació (*):

$A+C+D+E=0 \Leftrightarrow A = -\frac{1}{20}+\frac{3}{20}-\frac{1}{13} = \frac{1}{10}-\frac{1}{13} = \frac{3}{130}$.

Aleshores, l'antitransformada val:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{(s^2+9)(s-1)(s+1)(s+2)}\right\}(t) + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)(s+1)(s-1)}\right\}(t)$$

$$\overset{(\&)}{=} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s/130}{s^2+9} - \frac{6/130}{s^2+9} + \frac{1/20}{s-1} - \frac{3/20}{s+1} + \frac{1/13}{s+2}\right\}(t)$$
$$+ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1/3}{s+2} - \frac{1/2}{s+1} + \frac{1/6}{s-1}\right\}(t)$$

$$= \frac{3}{130}\cos(3t) - \frac{1}{65}\sin(3t) + \frac{1}{20}e^{t} - \frac{3}{20}e^{-t} + \frac{1}{13}e^{-2t} + \frac{1}{3}e^{-2t} - \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{6}e^{t}$$

$$= \boxed{\frac{3}{130}\cos(3t) - \frac{1}{65}\sin(3t) + \frac{13}{60}e^{t} - \frac{13}{20}e^{-t} + \frac{16}{39}e^{-2t}}$$

(&) De la mateixa manera, calculem la descomposició en fraccions simples de:

$$\frac{1}{(s+2)(s+1)(s-1)} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s-1} = \frac{1/3}{s+2} - \frac{1/2}{s+1} + \frac{1/6}{s-1}$$

$A(s+1)(s-1) + B(s+2)(s-1) + C(s+2)(s+1) = 1 \ \forall s$

$s=-1: -2B=1 \Leftrightarrow B=-1/2$

$s=1: 6C=1 \Leftrightarrow C=1/6$

$s=-2: 3A=1 \Leftrightarrow A=1/3$

(d) $s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) - 5sY(s) + 5y(0) + 6Y(s) = (s^2-5s+6)Y(s) - (s-5)\overset{=0}{y(0)} - \overset{=1}{y'(0)}$

$= (s-3)(s-2)Y(s) - 1 = \frac{e^{-s}}{s}$, on el terme e^{-s}/s és la TL de $\mathcal{U}(t-1)$, i.e,

$\mathcal{L}\{\mathcal{U}(t-1)\}(s) = \frac{e^{-s}}{s}$.

Aïllant $Y(s)$: $Y(s) = \frac{e^{-s}}{s(s-3)(s-2)} + \frac{1}{(s-3)(s-2)}$

Descomposició en fraccions simples:

$$\frac{1}{s(s-3)(s-2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-3} + \frac{C}{s-2} = \frac{1/6}{s} + \frac{1/3}{s-3} - \frac{1/2}{s-2}$$

$A(s-3)(s-2) + Bs(s-2) + Cs(s-3) = 1 \ \forall s$

$s=3: 3B=1 \Leftrightarrow B=1/3$; $s=2: -2C=1 \Leftrightarrow C=-1/2$; $s=0: 6A=1 \Leftrightarrow A=1/6$

$$\frac{1}{(s-3)(s-2)} = \frac{A}{s-3} + \frac{B}{s-2} = \frac{1}{s-3} + \frac{-1}{s-2}$$

$$A(s-2) + B(s-3) = 1$$

$s=2:\ -B=1 \Leftrightarrow B=-1$

$s=3:\ \ A=1$

Aleshores:
$$Y(s) = \frac{e^{-s}}{s(s-3)(s-2)} + \frac{1}{(s-3)(s-2)}$$

$$= \frac{e^{-s}}{6s} + \frac{e^{-s}/3}{s-3} - \frac{e^{-s}/2}{s-2} + \frac{1}{s-3} - \frac{1}{s-2}$$

$$= \frac{e^{-s}}{6}\mathcal{L}\{1\}_{(s)} + \frac{e^{-s}}{3}\mathcal{L}\{e^{3t}\}_{(s)} - \frac{e^{-s}}{2}\mathcal{L}\{e^{2t}\}_{(s)}$$

$$+ \mathcal{L}\{e^{3t}\}_{(s)} - \mathcal{L}\{e^{2t}\}_{(s)}$$

$$= \frac{1}{6}\mathcal{L}\{\mathcal{U}(t-1)\}_{(s)} + \frac{1}{3}\mathcal{L}\{e^{3(t-1)}\mathcal{U}(t-1)\}_{(s)}$$

$$- \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{2(t-1)}\mathcal{U}(t-1)\}_{(s)} + \mathcal{L}\{e^{3t}\}_{(s)} - \mathcal{L}\{e^{2t}\}_{(s)},$$

i llavors la solució del PVI ve donada per l'antitransformada de $Y(s)$:

$$\boxed{y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}(t) = \mathcal{U}(t-1)\cdot\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{3}e^{3(t-1)} - \frac{1}{2}e^{2(t-1)}\right) + e^{3t} - e^{2t}} \quad \square$$

24. Resoleu l'equació diferencial amb condicions inicials:

$$y'' + 4y' + 13y = \delta(t-\pi) + \delta(t-3\pi),\ y(0)=1,\ y'(0)=0$$

on $\delta(t-t_0)$ és la delta de Dirac en el punt t_0.

Solució.

$$s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) + 4sY(s) - 4y(0) + 13Y(s) = (s^2+4s+13)Y(s) - (s+4)\overset{1}{y(0)} - \overset{0}{y'(0)}$$

$$= e^{-\pi s} + e^{-3\pi s}, \quad \text{on}: e^{-\pi s} = \mathcal{L}\{\delta(t-\pi)\}_{(s)},\ e^{-3\pi s} = \mathcal{L}\{\delta(t-3\pi)\}_{(s)},$$

d'on:

$$Y(s) = \frac{e^{-\pi s} + e^{-3\pi s}}{(s+2)^2+3^2} + \frac{s+4}{(s+2)^2+3^2} = \frac{e^{-\pi s}}{3}\frac{3}{(s+2)^2+3^2} + \frac{e^{-3\pi s}}{3}\frac{3}{(s+2)^2+3^2}$$

$$+ \frac{s+2}{(s+2)^2+3^2} + \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{(s+2)^2+3^2}$$

$$= \frac{e^{-\pi s}}{3}\mathcal{L}\{\sin(3t)\}_{(s+2)} + \frac{e^{-3\pi s}}{3}\mathcal{L}\{\sin(3t)\}_{(s+2)} + \mathcal{L}\{\cos(3t)\}_{(s+2)} + \frac{2}{3}\mathcal{L}\{\sin 3t\}_{(s+2)}$$

$$= \frac{e^{-\pi s}}{3}\mathcal{L}\{e^{-2t}\sin(3t)\}_{(s)} + \frac{e^{-3\pi s}}{3}\mathcal{L}\{e^{-2t}\sin(3t)\}_{(s)} + \mathcal{L}\{e^{-2t}\cos(3t)\}_{(s)}$$
$$+ \tfrac{2}{3}\mathcal{L}\{e^{-2t}\sin(3t)\}_{(s)}$$

$$= \frac{1}{3}\mathcal{L}\{e^{-2(t-\pi)}\sin(3t-3\pi)\,\mathcal{U}(t-\pi)\}_{(s)} + \frac{1}{3}\mathcal{L}\{e^{-2(t-3\pi)}\sin(3t-9\pi)\,\mathcal{U}(t-3\pi)\}_{(s)}$$
$$+ \mathcal{L}\{e^{-2t}\cos(3t)\}_{(s)} + \tfrac{2}{3}\mathcal{L}\{e^{-2t}\sin(3t)\}_{(s)}$$

$$= -\tfrac{1}{3}\mathcal{L}\{e^{-2t+2\pi}\sin(3t)\,\mathcal{U}(t-\pi)\}_{(s)} - \frac{1}{3}\mathcal{L}\{e^{-2t+6\pi}\sin(3t)\,\mathcal{U}(t-3\pi)\}_{(s)}$$
$$+ \mathcal{L}\{e^{-2t}\cos(3t)\}_{(s)} + \tfrac{2}{3}\mathcal{L}\{e^{-2t}\sin(3t)\}_{(s)}$$

Llavors la solució del PVI s'obté de l'antitransformada de $Y(s)$; ie:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}_{(t)} = -\frac{1}{3}\left(\mathcal{U}(t-\pi) + e^{4\pi}\,\mathcal{U}(t-3\pi)\right) e^{-2t+2\pi}\sin(3t)$$
$$+ \left(\cos(3t) + \tfrac{2}{3}\sin(3t)\right) e^{-2t}. \quad \square$$

25. Resoleu l'equació

$$y'' + 2y' + 2y = \delta(t-3\pi)\cos t, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1$$

Solució.

$$s^2 Y(s) - s\,y(0) - y'(0) + 2s\,Y(s) - 2y(0) + 2Y(s) = (s^2+2s+2)Y(s) - (s+2)\overset{1}{y(0)} - \overset{-1}{y'(0)}$$
$$= \cos(3\pi)\,e^{-3\pi s} = -e^{-3\pi s},$$

On: $\cos(3\pi)\,e^{-3\pi s} = \mathcal{L}\{\delta(t-3\pi)\cos t\}_{(s)}$. Llavors:

$$Y(s) = -\frac{e^{-3\pi s}}{s^2+2s+2} + \frac{s+2}{s^2+2s+2} - \frac{1}{s^2+2s+1} = -\frac{e^{-3\pi s}}{(s+1)^2+1} + \frac{s+1}{(s+1)^2+1}$$
$$= -e^{-3\pi s}\mathcal{L}\{\sin t\}_{(s+1)} + \mathcal{L}\{\cos t\}_{(s+1)}$$
$$= -e^{-3\pi s}\mathcal{L}\{e^{-t}\sin t\}_{(s)} + \mathcal{L}\{e^{-t}\cos t\}_{(s)}$$
$$= -\mathcal{L}\{e^{-(t-3\pi)}\sin(t-3\pi)\,\mathcal{U}(t-3\pi)\}_{(s)} + \mathcal{L}\{e^{-t}\cos t\}_{(s)}.$$

Per tant la solució $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}_{(t)}$ del PVI donat, resulta:

$$\boxed{y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}_{(t)} = \left(\cos t + e^{3\pi}\sin t\cdot\mathcal{U}(t-3\pi)\right) e^{-t}} \quad \square$$

26. Feu servir la transformada de Laplace per resoldre les equacions integrals següents:

(a) $f(t) + 2\int_0^t f(t)\cos(t-\tau)\,d\tau = 4e^{-t} + \sin t$

(b) $t - 2f(t) = \int_0^t \left(e^{\tau} - e^{-\tau}\right) f(t-\tau)\,d\tau$

Solució.

(a) Apliquem la TL a totes dues bandes tenint en compte que $\int_0^t f(\tau)\cos(t-\tau)\,d\tau = (f * \cos)(t)$:

$$F(s) + \frac{2sF(s)}{s^2+1} = \frac{4}{s+1} + \frac{1}{s^2+1}, \quad \text{on } F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s)$$

$$\Leftrightarrow F(s) = \frac{4(s^2+1)}{(s+1)^3} + \frac{1}{(s+1)^2} = 4\,\frac{s^2+2s+1}{(s+1)^3} - \frac{8s}{(s+1)^3} + \frac{1}{(s+1)^2}$$

$$= \frac{4}{s+1} - 8\,\frac{s+1}{(s+1)^3} + \frac{8}{(s+1)^3} + \frac{1}{(s+1)^2}$$

$$= \frac{4}{s+1} - \frac{7}{(s+1)^2} + \frac{8}{(s+1)^3} = 4\mathcal{L}\{e^{-t}\}(s) - 7\mathcal{L}\{t\}(s+1) + 4\mathcal{L}\{t^2\}(s+1)$$

$$= 4\mathcal{L}\{e^{-t}\}(s) - 7\mathcal{L}\{e^{-t}t\}(s) + 4\mathcal{L}\{e^{-t}t^2\}(s).$$

Llavors la solució de l'equació integral s'obté com l'antitransformada de $F(s)$, ie:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(t) = \boxed{\left(4 - 7t + 4t^2\right)e^{-t}.}$$

(b) Idènticament apliquem la TL a tots dos termes tenint ara en compte que $\int_0^t \left(e^{\tau} - e^{-\tau}\right) f(t-\tau)\,dt = 2\int_0^t \sinh\tau\, f(t-\tau)\,d\tau = 2(\sinh * f)(t)$, on denotem per $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s)$:

$$\frac{1}{s^2} - 2F(s) = \frac{2F(s)}{s^2-1} \Leftrightarrow \frac{2s^2}{s^2-1}F(s) = \frac{1}{s^2} \Leftrightarrow F(s) = \frac{s^2-1}{2s^4} = \frac{1}{2s^2} - \frac{1}{2s^4}$$

$$= \frac{1}{2}\mathcal{L}\{t\}(s) - \frac{1}{12}\mathcal{L}\{t^3\}(s)$$

i la solució de l'equació integral s'obté com l'antitransformada de $F(s)$, i.e.:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(t) = \boxed{\frac{t}{2} - \frac{t^3}{12}} \quad \square$$

27. Resoleu, fent servir la transformada de Laplace, el problema de Cauchy $ty''-y' = t^2$, $y(0)=0$. Remarca: noteu que, en aquest cas, no cal conèixer $y'(0)$.

Solució.

$$\mathcal{L}\{ty''\}(s) = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{y''\}(s) = -\frac{d}{ds}\left(s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)\right) = -2sY(s) - s^2Y'(s) + y(0),$$

on posem $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}(s)$. Llavors:

$$-2sY(s) - s^2Y'(s) + y(0) - sY(s) + y(0) = -s^2Y'(s) - 3sY(s) + 2\overset{0}{y(0)} = \frac{2}{s^3}.$$

Hem de resoldre doncs una EDO lineal de 1er ordre en $Y(s)$: $+s^2Y'(s) + 3sY(s) = -2/s^3$.

- Solució general de l'EDO homogènia associada $\left(s^2Y(s) + 3sY(s) = 0\right)$, $Y_H(s) = C_1/s^3$, $C_1 \in \mathbb{R}$ ctnt.
- Es comprova que una solució particular de l'EDO lineal no homogènia, $Y_p(s)$ ve donada per: $Y_p(s) = 2/s^4$

Aleshores la solució general de l'EDO lineal no homogènia resulta:

$$Y(s) = \frac{C_1}{s^3} + \frac{2}{s^4}, \quad \text{amb } C_1 \in \mathbb{R} \text{ ctnt.}$$

i la solució del PVI l'obtenim com l'antitransformada de $Y(s)$. Així:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}(t) = C_1\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3}\right\}(t) + 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^4}\right\}(t)$$

$$= \frac{C_1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3 = \boxed{Kt^2 + t^3/3}, \quad K \in \mathbb{R} \text{ ctnt.},$$

on hem posat $K = C_1/2$ i per tant $K \in \mathbb{R}$ constant arbitrària. $\square$

28. Considereu l'equació integro-diferencial:

$$y'(x) + \int_0^x y(x-t)\, e^{-2t}\, dt = 0, \quad y(0)=1$$

(a) Derivant ambdós membres, deduiu l'equació diferencial ordinària de segon ordre que verifica la seva solució. Preciseu-me les condicions inicials que determinen.

(b) Alternativament, apliqueu directament la transformada de Laplace a les condicions inicials que la determinen

Solució

(a) $y(0)=1$, $y'(0) + \int_0^0 \cdots = 0 \Leftrightarrow y'(0)=0$. Llavors, c.i.: $\begin{matrix} y(0)=1 \\ y'(0)=0 \end{matrix}$

Derivant l'equació integro-diferencial:

integrem per parts, tenint en compte que: $\frac{d}{dt}y(x-t) = -y'(x-t)$

$$y''(x) + y(0)\,e^{-2x} + \int_0^x y'(x-t)\, e^{-2t}\, dt =$$

$$= y''(x) + y(0)\,e^{-2x} - y(x-t)\, e^{-2t}\Big|_{t=0}^{t=x} - 2\int_0^x y(x-t)\, e^{-2t}\, dt$$

$$= y''(x) + y(0)\,e^{-2x} - y(0)\,e^{-2x} + y(x) + 2y'(x) = y''(x) + 2y'(x) + y(x) = 0$$

Rem. A partir de l'eq. integro-diferencial tenim que: $\int_0^x y(x-t)\, e^{-2t}\, dt = -y'(x)$

Ara, aplicant la TL a l'EDO de 2^{on} ordre obtinguda, tenim:

$$s^2 Y(s) - s\,y(0) - y'(0) + 2s\,Y(s) - 2y(0) + Y(s) =$$

$$= (s^2+2s+1)\,Y(s) - (s+2)\,\overset{1}{y(0)} - \overset{0}{y'(0)} = (s+1)^2\,Y(s) - (s+2)\cdot 1$$

$$= 0$$

on hem posat $Y(s) = \mathcal{L}\{y(x)\}(x)$ i hem aplicat les condicions inicials $y(0)=1$ i $y'(0)=0$.

Aïllant $Y(s)$:

$$Y(s) = \frac{s+2}{(s+1)^2} = \frac{s+1}{(s+1)^2} + \frac{1}{(s+1)^2} = \frac{1}{(s+\ )^2} + \frac{1}{s+1} = \mathcal{L}\{x\}_{(s+1)} + \mathcal{L}\{e^{-x}\}_{(s)}$$

$$= \mathcal{L}\{x e^{-x}\}(s) + \mathcal{L}\{e^{-x}\}(s)$$

Aleshores, la solució de l'EDO —i de l'equació integro-diferencial— buscada l'obtindrem prenent la TL inversa, i.e.:

$$\boxed{y(x) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}(x) = (1+x)\,e^{-x}}$$

(b) Alternativament, aplicant la TL a totes dues bandes de l'equació integro-diferencial, tot tenint en compte que $\int_0^x y(x-t)\,e^{-2t}\,dt = \left(\exp(-2\cdot) * y\right)(x)$, resulta:

$$s\,Y(s) - y(0) + \frac{Y(s)}{s+2} = \left(s + \frac{1}{s+2}\right) Y(s) - \overset{1}{\overset{\shortparallel}{y(0)}} = \frac{s^2+2s+1}{s+2}\,Y(s) - 1 = 0,$$

d'on: $$Y(s) = \frac{s+2}{(s+1)^2} = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{(s+1)^2} \underset{(\text{com abans})}{=} \mathcal{L}\{e^{-x}\}(s) + \mathcal{L}\{x e^{-x}\}(s)$$

I, aplicant la TL com abans, resulta la solució buscada:

$$\boxed{y(x) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}(x) = e^{-x} + x e^{-x} = (1+x)\,e^{-x}} \quad \square$$