

3 Transformada de Laplace i sèries de Fourier

1. Calculeu la transformada de Laplace de les funcions següents:

(a) $f(t) = \begin{cases} 2t + 1 & \text{si } 0 < t < 1 \\ 0 & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$ (Solució: $\frac{2}{s^2}(-e^{-s}(s+1) + 1) + \frac{1}{s}(1 - e^{-s})$.)

(b) $f(t) = t \sin t$ (Solució: $\frac{2s}{(s^2+1)^2}$.)

(c) $f(t) = (2t - 1)^3$ (Solució: $\frac{48}{s^4} - \frac{24}{s^3} + \frac{6}{s^2} - \frac{1}{s}$.)

(d) $f(t) = \cos^2 t$ (Solució: $\frac{s^2+2}{s(s^2+4)}$.)

(e) $f(t) = \sin t \sin 2t$ (Solució: $\frac{1}{2} \left(\frac{s}{s^2+1} - \frac{s}{s^2+9} \right)$.)

(f) $f(t) = e^t \sinh t$ (Solució: $\frac{1}{(s-1)^2-1}$.)

2. *

i) Demostreu que existeix la transformada de Laplace $\mathcal{L}(f(t))(s)$,

$s > 0$, de la funció $f(t) = t^\alpha \iff \alpha > -1$.

ii) Demostreu que si $\alpha > -1$ aleshores $\mathcal{L}(t^\alpha)(s) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}$,

on $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$, $x > 0$, és la funció Γ d'Euler.

iii) Què podem dir de la funció $f(t) = \frac{1}{t^2}$?

iv) Mateixa pregunta per a la funció $f(t) = t^{-1/2}$.

3. Calculeu una antitransformada de Laplace de les funcions següents:

(a) $g(s) = \frac{(s+2)^2}{s^3}$ (Solució: $1 + 4t + 2t^2$.)

(b) $g(s) = \frac{1}{5s-2}$ (Solució: $\frac{1}{5}e^{\frac{2t}{5}}$.)

(c) $g(s) = \frac{s+1}{(s^2-4s)(s+5)}$ (Solució: $-\frac{1}{20} + \frac{5}{36}e^{4t} - \frac{4}{45}e^{-5t}$.)

(d) $g(s) = \frac{1}{s^4-9}$ (Solució: $\frac{1}{6\sqrt{3}} \sinh \sqrt{3}t - \frac{1}{6\sqrt{3}} \sin \sqrt{3}t$.)

4. Calculeu la transformada de Laplace de la funció

$$f(t) = \begin{cases} e^{3t} & \text{si } t \geq 0, t \neq 5 \\ 1 & \text{si } t = 5 \end{cases}$$

Què podem dir de la unicitat de l'antitransformada de Laplace d'una funció?

5. * Demostreu que $\int_0^t \sin u \cos(t-u) du = \frac{1}{2}t \sin t$.

[Indicació: feu servir el teorema de convolució].

6. * Tenint en compte la definició de l'exponencial complexa: $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$, calculeu $\mathcal{L}(e^{iat})$ per a $a \in \mathbb{R}$ i comproveu que s'obté el mateix que si s'apliqués, formalment, la transformada de Laplace a una exponencial real.

7. Calculeu la transformada de Laplace de les funcions següents:

(a) $f(t) = e^{2-t}\mathcal{U}(t-2)$ (Solució: $\frac{e^{-2s}}{s+1}$.)

(b) $f(t) = e^t \cos^2 3t$ (Solució: $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{s-1} + \frac{s-1}{(s-1)^2+36} \right)$.)

(c) $f(t) = te^{-3t} \cos 3t$ (Solució: $\frac{-9+(s+3)^2}{((s+3)^2+9)^2}$.)

(d) $f(t) = t \int_0^t \tau e^{-\tau} d\tau$ (Solució: $\frac{1}{s(s+1)} \left(\frac{1}{s} + \frac{2}{s+1} \right)$.)

(e) $f(t) = e^{2t} * \sin t$ (Solució: $\frac{1}{(s-2)(s^2+1)}$.)

8. Calculeu una antitransformada de Laplace de les funcions següents:

(a) $g(s) = \frac{2s+5}{s^2+6s+34}$ (Solució: $e^{-3t} (2 \cos(5t) - \frac{1}{5} \sin(5t))$.)

(b) $g(s) = \frac{e^{-2s}}{s^2(s-1)}$ (Solució: $(1-t+e^{t-2})\mathcal{U}(t-2)$.)

9. Escriviu la funció

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t < \frac{3\pi}{2} \\ \sin t & \text{si } t \geq \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

en termes de "funcions esgraó unitàries" (això és, funcions del tipus $\mathcal{U}(t-a)$) i calculeu la seva transformada de Laplace. (Solució: $-\frac{se^{-\frac{3\pi s}{2}}}{s^2+1}$.)

10. Feu el mateix que al problema anterior amb la funció $f(t) = E[t]$ (part entera). (Solució: $\frac{1}{s(e^s-1)}$.)

11. Calculeu una antitransformada de Laplace de la funció $g(s) = \ln \left(\frac{s^2+1}{s^2+4} \right)$ fent servir que $\mathcal{L}(t^n f(t))(s) = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} \mathcal{L}(f(t))(s)$. (Solució: $-\frac{2}{t}(\cos(t) - \cos(2t))$.)

12. * Calculeu una antitransformada de Laplace de la funció $g(s) = \frac{1}{(s+1)^2}$ de la forma següent:

- fent servir la transformada de Laplace d'una convolució.
- pels teoremes de translació.

13. * Calculeu la transformada de Laplace de la funció "ona triangular" tenint en compte que és periòdica. (Solució: $-\frac{1}{1-e^{2s}} \left(\frac{1}{s^2} - 2\frac{e^{-s}(s+1)}{s^2} + \frac{e^{-2s}(2s+1)}{s^2} + \frac{2}{s} (e^{-s} - e^{-2s}) \right)$.)

14. *

i) Demostreu que si f és continua a trossos, d'ordre exponencial

i tal que existeix $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t)}{t}$, aleshores $\mathcal{L}\left(\frac{f(t)}{t}\right)(s) = \int_s^{+\infty} F(u)du$ on $F(s) = \mathcal{L}(f(t))(s)$.

ii) Calculeu la transformada de Laplace de la funció Sinus-integral:

$$f(t) = \int_0^t \frac{\sin u}{u} du := Si(t).$$

iii) Demostreu que $\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt = \int_0^{+\infty} F(u)du$ si existeixen les integrals. Com a aplicació calculeu $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$.

15. * Demostreu que $\mathcal{L}\left(\int_0^t \left(\int_0^{t_1} f(u)du\right) dt_1\right)(s) = \frac{\mathcal{L}(f(t))(s)}{s^2}$.

16. * Calculeu $\int_0^{+\infty} te^{-2t} \cos t dt$.

17. Segui la funció

$$f(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq 1 \\ 2t, & t > 1 \end{cases}$$

i) Calculeu $\mathcal{L}(f(t))$.

ii) Calculeu $\mathcal{L}(f'(t))$.

iii) Es compleix la fórmula $\mathcal{L}(f'(t))(s) = s\mathcal{L}(f(t))(s) - f(0)$? Què falla?

18. Calculeu $\mathcal{L}\left(\frac{e^{-2t}}{\sqrt{t}}\right)(s)$. Per a quins valors de s existeix aquesta transformada?
(Solució: $\sqrt{\frac{\pi}{s+2}}$, existeix per $s > -2$.)

19. * Calculeu $\mathcal{L}(tSi(t))$.

20. * Comproveu que $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} \sin t}{t} dt = \frac{\pi}{4}$.

[Indicació: feu servir l'apartat 14 i)].

21. * Si f és contínua a trossos i d'ordre exponencial, demostreu que:

$$\mathcal{L}\left(\int_a^t f(\tau) d\tau\right)(s) = \frac{\mathcal{L}(f(t))(s)}{s} + \frac{1}{s} \int_a^0 f(\tau) d\tau.$$

22. Calculeu $\mathcal{L}(t^2 \mathcal{U}(t-2))$. (Solució: $e^{-2s} \left[\frac{2}{s^3} + \frac{4}{s^2} + \frac{4}{s}\right]$.)

23. Feu servir la transformada de Laplace per resoldre els següents problemes de Cauchy:

- (a) $y' + 2y = t, \quad y(0) = -1$
 (b) $y'' - 4y' + 4y = t^3, \quad y(0) = 1, y'(0) = 0$
 (c) $y''' + 2y'' - y' - 2y = \sin 3t, \quad y(0) = 0, y'(0) = 0, y''(0) = 1$
 (d) $y'' - 5y' + 6y = \mathcal{U}(t - 1), \quad y(0) = 0, y'(0) = 1$

24. Resoleu l'equació diferencial amb condicions inicials:

$$y'' + 4y' + 13y = \delta(t - \pi) + \delta(t - 3\pi), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

on $\delta(t - t_0)$ és la delta de Dirac en el punt t_0 .

25. * Resoleu l'equació:

$$y'' + 2y' + 2y = \cos(t)\delta(t - 3\pi), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1.$$

26. Feu servir la transformada de Laplace per resoldre les equacions integrals següents:

(a) $f(t) + 2 \int_0^t f(\tau) \cos(t - \tau) d\tau = 4e^{-t} + \sin t$ (Solució: $4e^{-t} - 7te^{-t} + 4t^2e^{-t}$.)

(b) $t - 2f(t) = \int_0^t (e^\tau - e^{-\tau})f(t - \tau) d\tau$. (Solució: $\frac{1}{2}t - \frac{1}{12}t^3$.)

27. * Resoleu, fent servir la transformada de Laplace, el problema de Cauchy $ty'' - y' = t^2, \quad y(0) = 0$.

Noteu que, en aquest cas, no cal conèixer $y'(0)$.

28. * Considereu l'equació integro-diferencial

$$y'(x) + \int_0^x y(x - t)e^{-2t} dt = 0, \quad y(0) = 1.$$

- (a) Derivant en ambdós membres, deduiu l'equació diferencial ordinària de segon ordre que verifica la seva solució. Preciseu-ne igualment les condicions inicials que la determinen.
 (b) Alternativament, apliqueu directament la transformada de Laplace a l'equació inicial.

29. (a) Trobeu la sèrie de Fourier de la funció $f(x) = x + \pi$ a l'interval $-\pi < x < \pi$. (Solució: $a_0 = 2\pi, a_n = 0, b_n = \frac{2}{n}(-1)^{n+1}$).

(b) Useu a) per demostrar que

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

30. *

(a) Trobeu la sèrie de Fourier de

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } -\pi < x < 0 \\ x^2 & \text{per } 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

(Solució: $a_0 = \frac{\pi^2}{3}$, $a_n = \frac{2}{n^2}(-1)^n$, $b_{2n} = -\frac{\pi}{2n}$, $b_{2n+1} = \frac{\pi}{2n+1} + \frac{4}{\pi(2n+1)^2}$.)

(b) Useu a) per demostrar que

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots \quad \text{i que} \quad \frac{\pi^2}{12} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots$$

(c) Useu b) per trobar una sèrie numèrica tal que la seva suma sigui $\pi^2/8$.

31. Trobeu la sèrie de Fourier de

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\pi < x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

a l'interval $-\pi < x < \pi$. (Solució: $a_0 = \frac{\pi}{2}$, $a_n = \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2}$, $b_n = \frac{(-1)^n}{n}$.)

Quan val f a $x = \frac{7\pi}{2}$? I quan a $x = 401\pi$? (Solució: $f(\frac{7\pi}{2}) = 0$, $f(401\pi) = \frac{\pi}{2}$.)

32. * Trobeu, si és que existeix, una sèrie de Fourier que convergeix cap a $|\sin x|$ per a tot $x \in \mathbf{R}$. (Solució: $a_0 = \frac{4}{\pi}$, $a_{2n} = -\frac{2}{4n^2-1}$, $a_{2n+1} = 0$, $b_n = 0$.)

33. Trobeu la sèrie de Fourier de la funció

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \frac{\pi}{2} \leq |x| \leq \pi \\ \cos x & \text{si } |x| < \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

34. * Sigui $f(x)$ continua a $(-L, L)$ i siguin a_n i b_n els seus coeficients de Fourier.

(a) Proveu que si $S_M(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^M \left(a_n \cos \frac{n\pi}{L}x + b_n \sin \frac{n\pi}{L}x \right)$, aleshores

$$\int_{-L}^L f(x)S_M(x)dx = L \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^M (a_n^2 + b_n^2) \right).$$

(b) Proveu que $\int_{-L}^L S_M^2(x)dx = L \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^M (a_n^2 + b_n^2) \right)$.

(c) Proveu que $2 \int_{-L}^L f(x)S_M(x)dx - \int_{-L}^L S_M^2(x)dx \leq \int_{-L}^L (f(x))^2 dx$

(d) Fent servir els apartats anteriors proveu la anomenada "desigualtat de Bessel":

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{L} \int_{-L}^L (f(x))^2 dx.$$

35. Desenvolueu la funció

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{per } -1 < x < 0 \\ x-1 & \text{per } 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

en sèrie de sinus o cosinus, segons convingui. (Solució: $a_n = 0$, $b_n = -\frac{2}{n\pi}$).

36. Desenvolueu la funció

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } 0 < x < 1/2 \\ 1 & \text{per } 1/2 \leq x < 1 \end{cases}$$

en sèrie de cosinus en mig interval i en sèrie de sinus en mig interval.

37. Desenvolueu la funció $f(x) = x^2$, $0 < x < L$

(a) en sèrie de cosinus. (Solució: $\frac{L^2}{3} + \sum (-1)^n \frac{4L^2}{n^2\pi^3} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$).

(b) en sèrie de sinus. (Solució: $\sum \left(\frac{4L^2}{n^2\pi^3}((-1)^n - 1) - (-1)^n \frac{2L^2}{n\pi}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$).

(c) en sèrie de Fourier. (Solució: $\frac{L^2}{3} + \sum \frac{L^3}{n\pi^2} \cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) - \sum \frac{L^2}{n\pi} \sin\left(\frac{2n\pi x}{L}\right)$).

38. * (a) Trobeu la forma general de la sèrie de Fourier en cosinus i de la sèrie de Fourier en sinus a $[0, C]$ per a funcions que compleixen la relació $f(C-x) = f(x)$.

(b) Mateixa pregunta per $f(C-x) = -f(x)$.

39. Desenvolueu la funció $\cos xz$ en sèrie de Fourier en l'interval $[-\pi, \pi]$, on z és un paràmetre real. (Solució: $a_n = \frac{2z}{\pi(n^2-z^2)}(-1)^{n+1} \sin 2z$, $b_n = 0$).

Proveu les igualtats

$$\frac{1}{\sin \pi z} = \frac{2z}{\pi} \left(\frac{1}{2z^2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2 - z^2} \right)$$

$$\cotg \pi z = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{z} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z}{k^2 - z^2} \right)$$

i deduiu que

$$\pi = 2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{k+1}}{4k^2 - 1}$$

$$\pi = 4 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{16k^2 - 1}$$

Taula de \mathcal{L} -transformades

Definició	
$f(t), t > 0$	$F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt$
Propietats	
$f_1(t) + f_2(t)$	$F_1(s) + F_2(s)$
$\lambda f(t)$	$\lambda F(s)$
$f(at), a > 0$	$(1/a)F(s/a)$
$e^{-at} f(t)$	$F(s + a)$
$f(t - a)\mathcal{U}(t - a), a > 0$	$e^{-as}F(s)$
$D^N f(t)$	$s^N F(s) - s^{N-1}f(0) - s^{N-2}f'(0) - \dots - D^{N-1}f(0)$
$t^N f(t)$	$(-1)^N D^N F(s)$
$\int_0^t f(\tau) d\tau$	$F(s)/s$
$f(t)/t$	$\int_s^{+\infty} F(\sigma) d\sigma$
$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau$	$F_1(s)F_2(s)$
$f(t + T) = f(t)$	$F(s) = 1/(1 - e^{-sT}) \int_0^T e^{-st} f(t) dt$
$\lim_{0+} f(t) = \lim_{+\infty} sF(s); \lim_{+\infty} f(t) = \lim_{0+} sF(s)$	
Exemples	
$\delta(t)$	1
$\delta(t - a)$	e^{-as}
1	$1/s$
e^{at}	$1/(s - a)$
t^N	$N!/s^{N+1}$
t^α	$\Gamma(\alpha + 1)/s^{\alpha+1}$
$\sin bt$	$b/(s^2 + b^2)$
$\cos bt$	$s/(s^2 + b^2)$
$\sinh bt$	$b/(s^2 - b^2)$
$\cosh bt$	$s/(s^2 - b^2)$
$(\sin bt - bt \cos bt)/(2b^3)$	$1/(s^2 + b^2)^2$
$(bt \cosh bt - \sinh bt)/(2b^3)$	$1/(s^2 - b^2)^2$
$(\sin bt)/t$	$\arctan(b/s)$
$\ln t$	$(\Gamma'(1) - \ln s)/s$

Transformada de Laplace i sèries de Fourier

1. Calculeu la transformada de Laplace de les funcions següents:

$$a) f(t) = \begin{cases} 2t+1, & \text{si } 0 < t < 1 \\ 0, & \text{si } t \geq 1. \end{cases}$$

$$b) f(t) = t \sin t$$

$$c) f(t) = (2t-1)^3$$

$$d) f(t) = \cos^2 t$$

$$e) f(t) = \sin t \sin(2t)$$

$$f) f(t) = e^t \sin ht$$

Solució.

$$a) f(t) = \begin{cases} 2t+1, & \text{si } 0 < t < 1 \\ 0, & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt = \int_0^1 e^{-st} (2t+1) dt + \int_1^{+\infty} e^{-st} \cdot 0 dt$$

integrant per parts

$$= -\frac{e^{-st}}{s} \Big|_{t=0}^{t=1} + \int_0^1 -\frac{2t}{s} d(e^{-st}) = \frac{1}{s} - \frac{e^{-s}}{s} + \left[-\frac{2t}{s} e^{-st} \right]_{t=0}^{t=1} + \frac{2}{s} \int_0^1 e^{-st} dt$$

$$= \frac{1}{s} - 3\frac{e^{-s}}{s} - 2 \left[e^{-st} \right]_{t=0}^{t=1} = \frac{1}{s} - \frac{3}{s} e^{-s} + \frac{2}{s^2} - 2\frac{e^{-s}}{s^2} = \frac{2}{s^2} (-e^{-s}(s+1)+1) + \frac{1}{s} (1-e^{-s}), s > 0$$

Alternativament: $f(t) = (1 - \mathcal{U}(t-1)) \cdot (2(t-1)+3)$ i llavors,

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \mathcal{L}\{2t+1\}(s) + \mathcal{L}\{(2(t-1)+3) \cdot \mathcal{U}(t-1)\}(s)$$

$$= \mathcal{L}\{2t+1\}(s) + e^{-s} \mathcal{L}\{2t+3\}(s) = \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s} - e^{-s} \left(\frac{2}{s^2} + \frac{3}{s} \right)$$

$$= \frac{2}{s^2} (-e^{-s}(s+1)+1) + \frac{1}{s} (1-e^{-s}), s > 0$$

$$b) f(t) = t \sin t,$$

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \mathcal{L}\{t \sin t\}(s) = -\frac{d}{ds} \mathcal{L}\{\sin t\}(s) = -\frac{d}{ds} \left(\frac{1}{s^2+1} \right) = \boxed{\frac{2s}{(s^2+1)^2}, s > 0}$$

$$c) f(t) = (2t-1)^3,$$

$$F(s) = \mathcal{L}\{(2t-1)^3\}(s) = \mathcal{L}\{4t^3 - 12t^2 + 6t - 1\}(s) = 48 \mathcal{L}\{t^3\}(s) - 12 \mathcal{L}\{t^2\}(s) + 6 \mathcal{L}\{t\}(s) - \mathcal{L}\{1\}(s) = \frac{48}{s^4} - \frac{24}{s^3} + \frac{6}{s^2} - \frac{1}{s}$$

$$d) f(t) = \cos^2 t = \frac{1 + \cos(2t)}{2}$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \mathcal{L}\{\cos^2 t\}(s) = \mathcal{L}\left\{\frac{1 + \cos(2t)}{2}\right\}(s) = \frac{1}{2s} + \frac{s}{2(s^2+4)} = \boxed{\frac{s^2+2}{s(s^2+4)}, s > 0}$$

$$e) f(t) = \sin t \sin(2t) = \frac{1}{2} (\cos(2t-t) - \cos(2t+t)) = \frac{1}{2} \cos t - \frac{1}{2} \cos(3t)$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \mathcal{L}\{\sin t \sin(2t)\}(s) = \frac{1}{2} \mathcal{L}\{\cos t\}(s) - \frac{1}{2} \mathcal{L}\{\cos(3t)\}(s) = \frac{s/2}{s^2+1} - \frac{s/2}{s^2+9}, s > 0$$

$$f) f(t) = e^t \sinh t$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \mathcal{L}\{e^t \sinh t\}(s) = \mathcal{L}\{\sinh t\}(s-1) = \frac{1}{(s-1)^2-1} = \boxed{\frac{1}{s(s-2)}, s > 2}$$

2. (i) Demostreu que existeix la transformada de Laplace $\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$, $s > 0$, de la funció $f(t) = t^\alpha \Leftrightarrow \alpha > -1$

(ii) Demostreu que si $\alpha > -1$ aleshores $\mathcal{L}\{t^\alpha\}(s) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}$, on $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$, $x > 0$, és la funció d'Euler.

(iii) Què podem dir de la funció $f(t) = 1/t^2$?

(iv) Mateixa pregunta per a la funció $f(t) = t^{-1/2}$

Solució.

$$(i) \int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-st} dt = \int_0^1 t^\alpha e^{-st} dt + \int_1^{+\infty} t^\alpha e^{-st} dt = I_1 + I_2, \text{ on } I_1 = \int_0^1 t^\alpha e^{-st} dt, I_2 = \int_1^{+\infty} t^\alpha e^{-st} dt.$$

L'integrand $t^\alpha e^{-st}$ de I_1 i de I_2 són funcions no negatives (per tant funcions de signe constant), per tant, podem fer servir el criteri de comparació per quocient:

$$I_2: \lim_{t \rightarrow +\infty} t^{-\alpha} t^\alpha e^{-st} = 0 \quad \forall s, \forall \alpha; \text{ llavors } \int_1^{+\infty} t^\alpha e^{-st} dt \ll \int_1^{+\infty} t^\alpha dt \quad \forall s \in \mathbb{R}$$

i com que $\int_0^1 t^\alpha dt$ conv. $\Leftrightarrow \alpha > -1$, tenim que $I_1 = \int_1^{+\infty} t^\alpha e^{-st} dt$ és convergent $\forall s \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \alpha > -1$.

$$I_2: \lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 t^\alpha e^{-st} = \lim_{t \rightarrow +\infty} t^{\alpha+2} e^{-st} = 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall s > 0.$$

Aleshores, com que $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ és convergent, $\int_1^{+\infty} t^\alpha e^{-st} dt$ també és convergent $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ i $\forall s > 0$.

En conclusió $I = \int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-st} dt$, $s > 0$ és convergent $\Leftrightarrow \alpha > -1$

(ii) $\mathcal{L}\{t^\alpha\}(s) = \int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-st} dt =$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{Considerem el canvi } t = \varphi(u) = \frac{u}{s}, \text{ per } u > 0, s > 0. \\ \text{Notem que llavors } \varphi \text{ és monòtona creixent per a qualsevol} \\ s > 0 \text{ fixada.} \\ dt = \varphi'(u) du = \frac{du}{s}, \\ t = 0 \Rightarrow u = 0 \\ t \rightarrow +\infty \Rightarrow u \rightarrow +\infty \text{ (} s > 0 \text{)} \end{array} \right.$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{u^\alpha}{s^\alpha} e^{-u} \frac{du}{s} = \frac{1}{s^{\alpha+1}} \int_0^{+\infty} u^{(\alpha+1)-1} e^{-u} du = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}.$$

$\alpha > -1$
 $\Leftrightarrow \alpha+1 > 0$
 Llavors $x = \alpha+1 > 0$
 i $\int_0^{+\infty} u^{(\alpha+1)-1} e^{-u} du = \Gamma(\alpha+1)$

Remarca: notem que, per $\alpha = n \in \mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, \dots\}$, llavors, $\mathcal{L}\{t^n\}(s) = \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}} = \frac{n!}{s^{n+1}}$.

(iii) La transformada de Laplace de $f(t) = t^{-2}$ no està definida, ja que la integral $\int_0^{+\infty} t^{-2} e^{-st} dt$, $s > 0$ és divergent ($\alpha = -2 < -1$).

(iv) $f(t) = t^{-1/2}$. Aquí $\alpha = -1/2$ i llavors: $\mathcal{L}\{t^{-1/2}\}(s) = \frac{\Gamma(-1/2+1)}{s^{-1/2+1}} = \sqrt{\frac{\pi}{s}}$, $s > 0$.
 (recordem que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$).

3. Calculeu l'antitransformada de Laplace de les funcions següents

a. $G(s) = \frac{(s+2)^2}{s^3}$ c. $G(s) = \frac{s+1}{(s^2-4s)(s+5)}$

b. $G(s) = \frac{1}{5s-2}$ d. $G(s) = \frac{1}{s^2-9}$

Solució.

$$a. \quad (s) = \frac{(s+2)^2}{s^3} = \frac{s^2+4s+4}{s^3} = \frac{1}{s} + \frac{4}{s^2} + \frac{4}{s^3} = \mathcal{L}\{1\}(s) + 4\mathcal{L}\{t\}(s) + \frac{4}{2!}\mathcal{L}\{t^2\}(s)$$

$$\text{Aleshores: } g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}(t) = 1 + 4t + 2t^2.$$

$$b. \quad G(s) = \frac{1}{5s-2} = \frac{1/5}{s-2/5} = \frac{1}{5}\mathcal{L}\{e^{2/5t}\}(s) = \frac{1}{5}e^{2/5t}.$$

$$c. \quad G(s) = \frac{s+1}{(s^2-4s)(s+5)} = \frac{s+1}{s(s-4)(s+5)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-4} + \frac{C}{s+5} \stackrel{(*)}{=} -\frac{1/20}{s} + \frac{5/36}{s-4} - \frac{4/45}{s+5}$$

$$= -\frac{1}{20}\mathcal{L}\{1\}(s) + \frac{5}{36}\mathcal{L}\{e^{4t}\}(s) - \frac{4}{45}\mathcal{L}\{e^{-5t}\}(s)$$

$$(*) \quad A(s-4)(s+5) + Bs(s+5) + Cs(s-4) = s+1 \quad \forall s$$

$$s=4: 36B=5 \Rightarrow B=5/36$$

$$s=-5: 45C=-4 \Rightarrow C=-4/45$$

$$s=0: -20A=1 \Rightarrow A=-1/20$$

$$\text{Aleshores: } g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}(t) = -\frac{1}{20}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}(t) + \frac{5}{36}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-4}\right\}(t) - \frac{4}{45}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+5}\right\}(t)$$

$$= -\frac{1}{20} + \frac{5}{36}e^{4t} - \frac{4}{45}e^{-5t}.$$

$$d. \quad G(s) = \frac{1}{s^4-9} = \frac{1}{(s^2+3)(s^2-3)} = \frac{As+B}{s^2+3} + \frac{C}{s-\sqrt{3}} + \frac{D}{s+\sqrt{3}}$$

$$\stackrel{(*)}{=} \frac{-1/6}{s^2+3} + \frac{\sqrt{3}/36}{s-\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}/36}{s+\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{18}\mathcal{L}\{\sin(\sqrt{3}t)\}(s) + \frac{\sqrt{3}}{36}\mathcal{L}\{e^{\sqrt{3}t}\}(s)$$

$$(*) \quad (As+B)(s^2-3) + C(s+\sqrt{3})(s^2+3) + D(s-\sqrt{3})(s^2+3) = 1 \quad \forall s \quad -\frac{\sqrt{3}}{36}\mathcal{L}\{e^{-\sqrt{3}t}\}(s)$$

$$s=\sqrt{3}: 12\sqrt{3}C=1 \Rightarrow C=\sqrt{3}/36.$$

$$s=-\sqrt{3}: -12\sqrt{3}D=1 \Rightarrow D=-\sqrt{3}/36.$$

$$s=0: -3B+3\sqrt{3}C-3\sqrt{3}D = -3B + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = -3B + \frac{1}{2} = 1 \Leftrightarrow B = -\frac{1}{6}.$$

$$s=2: (2A+B) + 7(2+\sqrt{3})\frac{\sqrt{3}}{36} - 7(2-\sqrt{3})\frac{\sqrt{3}}{36} = 2A - \frac{1}{6} + \frac{21}{36} + \frac{21}{36} = 2A + 1 = 1 \Rightarrow A=0.$$

Aleshores:

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}(t) = -\frac{\sqrt{3}}{18}\sin(\sqrt{3}t) + \frac{\sqrt{3}}{18} \cdot \frac{e^{\sqrt{3}t} - e^{-\sqrt{3}t}}{2}$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{18}\sin(\sqrt{3}t) + \frac{\sqrt{3}}{18}\sinh(\sqrt{3}t)$$

4. Calculeu la transformada de Laplace de la funció

$$f(t) = \begin{cases} e^{3t}, & \text{si } t \geq 0, t \neq 5 \\ 1, & \text{si } t = 5. \end{cases}$$

Què podem dir de la unicitat de l'antitransformada de Laplace d'una funció?

$$\begin{aligned} \text{Solució. } \mathcal{L}\{f(t)\}(s) &= \int_0^{+\infty} e^{3t} e^{-st} dt = \int_0^{5-\delta} e^{-(s-3)t} dt + \int_{5-\delta}^{5+\delta} e^{-(s-3)t} dt + \int_{5+\delta}^{+\infty} e^{-(s-3)t} dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-(s-3)t} dt - \int_{5-\delta}^{5+\delta} e^{-(s-3)t} dt = \mathcal{L}\{e^{3t}\}(s) - \int_{5-\delta}^{5+\delta} e^{-(s-3)t} dt \\ &= \frac{1}{s-3} - \int_{5-\delta}^{5+\delta} e^{-(s-3)t} dt, \quad s > 3; \quad \forall 0 < \delta < 5. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Però: } \int_{5-\delta}^{5+\delta} e^{-(s-3)t} dt &\leq 2\delta \quad \forall s > 3, \forall t > 0 \text{ i } \forall 0 < \delta < 5 \\ &\quad \frac{e^{-(s-3)t}}{e^{-(s-3)t}} < 1 \\ &\quad \forall s > 3 \\ &\quad \forall t > 0 \end{aligned}$$

$$\text{Aleshores } \mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \mathcal{L}\{e^{3t}\}(s) = \frac{1}{s-3}, \quad s > 3.$$

Per tant, veiem que la transformada de Laplace no és única. En particular, dues funcions que difereixen en un nombre finit (o infinit numerable, o conjunts encara més generals) tenen la mateixa transformada de Laplace. \square

5. Demostreu que $\int_0^t \sin u \cos(t-u) du = \frac{1}{2} \sin t$

Solució.

Si $F_1(s) = \mathcal{L}\{f_1(t)\}(s)$ i $F_2(s) = \mathcal{L}\{f_2(t)\}(s)$ existeixen, llavors la transformada de Laplace del seu producte de convolució, $(f_1 * f_2)(t) = \int_0^t f_1(u) f_2(t-u) du$,

$$\mathcal{L}\{(f_1 * f_2)(t)\}(s) = \mathcal{L}\{f_1(t)\}(s) \cdot \mathcal{L}\{f_2(t)\}(s)$$

En aquest cas,

$$\begin{aligned} \int_0^t \sin u \cos(t-u) du &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\mathcal{L}\{(\sin * \cos)(t)\}(s)\right\}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\mathcal{L}\{\sin t\}(s) \cdot \mathcal{L}\{\cos t\}(s)\right\}(t) \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+1)^2}\right\}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{d}{ds}\left(\frac{1/2}{s^2+1}\right)\right\}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{d}{ds}\mathcal{L}\left\{\frac{\sin t}{2}\right\}(s)\right\}(t) = \end{aligned}$$

$$= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \mathcal{L} \left\{ \frac{t}{2} \sin t \right\} (s) \right\} (t) = \boxed{\frac{t}{2} \sin t}$$

6. Tenint en compte la definició d'exponencial complexa: $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$, calculeu $\mathcal{L} \{ e^{iat} \} (s)$ per a $a \in \mathbb{R}$ i comprovem que s'obté el mateix que si s'apliqués, formalment, la transformada de Laplace a una exponencial real.

Solució.

$$\mathcal{L} \{ e^{iat} \} (s) = \mathcal{L} \{ \cos(at) \} (s) + i \mathcal{L} \{ \sin(at) \} (s) = \frac{s}{s^2 + a^2} + i \frac{a}{s^2 + a^2}, s > 0.$$

mentre que si transformem e^{iat} com si fos una exponencial real,

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \{ e^{iat} \} (s) &= \int_0^{+\infty} e^{iat} e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} e^{-(s-ia)t} dt = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A e^{-(s-ia)t} dt = \\ &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[-\frac{e^{-(s-ia)t}}{s-ia} \right]_{t=0}^{t=A} = \frac{1}{s-ia} - \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{e^{-(s-ia)A}}{s-ia} = \begin{cases} \frac{1}{s-ia}, s > 0 \\ \text{indefinida}, s \leq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Lavors:

$$\mathcal{L} \{ e^{iat} \} (s) = \frac{1}{s-ia} \cdot \frac{s+ia}{s+ia} = \frac{s+ia}{s^2+a^2} = \frac{s}{s^2+a^2} + i \frac{a}{s^2+a^2}, s > 0$$

7. Calculeu la transformada de Laplace de les funcions següents:

a. $f(t) = e^{2-t} u(t-2)$

b. $f(t) = e^t \cos^2 3t$

c. $f(t) = t e^{-3t} \cos(3t)$

d. $f(t) = t \int_0^t \tau e^{-\tau} d\tau$

e. $f(t) = e^{2t} * \sin t$

Solució.

$$\begin{aligned} \text{a. } \mathcal{L} \{ f(t) \} (s) &= \mathcal{L} \{ e^{2-t} u(t-2) \} (s) = \mathcal{L} \{ e^{-(t-2)} u(t-2) \} (s) = e^{-2s} \mathcal{L} \{ e^{-t} \} (s) \\ &= \boxed{\frac{e^{-2s}}{s+1}, s > -1}. \end{aligned}$$

Nota. Recordem que: $\mathcal{L} \{ f(t-a) u(t-a) \} (s) = e^{-as} \mathcal{L} \{ f(t) \} (s), a > 0$

En efecte:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(t-a)U(t-a)\}(s) &= \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t-a)U(t-a) dt = \int_0^{+\infty} e^{-as} e^{-(t-a)s} f(t-a)U(t-a) dt \\ &= e^{-as} \int_0^{+\infty} e^{-(t-a)s} f(t-a)U(t-a) dt = e^{-as} \int_a^{+\infty} e^{-(t-a)s} f(t-a) dt = \begin{cases} \text{c.v.} \\ u=t-a \\ du=dt \\ t=a \Rightarrow u=0 \\ t \rightarrow +\infty \Rightarrow u \rightarrow +\infty \end{cases} \\ &= e^{-as} \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt = e^{-as} \mathcal{L}\{f(t)\}(s) \end{aligned}$$

b. $f(t) = e^t \cos^2(3t) = e^t \frac{1 + \cos(6t)}{2}$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(t)\}(s) &= \mathcal{L}\left\{e^t \cos^2(3t)\right\}(s) = \mathcal{L}\left\{e^t \frac{1 + \cos(6t)}{2}\right\}(s) = \mathcal{L}\left\{\frac{1 + \cos(6t)}{2}\right\}(s-1) \\ &= \frac{1/2}{s-1} + \frac{s-1}{2((s-1)^2 + 36)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s-1} + \frac{s-1}{(s-1)^2 + 36} \right), \quad s > 1 \end{aligned}$$

On hem fet servir que:

$$\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} e^{at} f(t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-(s-a)t} f(t) dt = \mathcal{L}\{f(t)\}(s-a), \quad s > a+c,$$

on suposem que $f(t)$ és d'ordre exponencial, ie, que existeixen $M, t_0, c > 0$ t.q.:

$$|f(t)| \leq M e^{ct} \quad \forall t \geq t_0.$$

c. $f(t) = t e^{-3t} \cos(3t)$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(t)\}(s) &= \mathcal{L}\{t e^{-3t} \cos(3t)\}(s) = \mathcal{L}\{t \cos(3t)\}(s+3) = -\frac{d}{dr} \bigg|_{r=s+3} \mathcal{L}\{\cos(3t)\}(r) \\ &= -\frac{d}{dr} \left(\frac{r}{r^2+9} \right) \bigg|_{r=s+3} = -\frac{r^2+9 - zr^2}{(r^2+9)^2} \bigg|_{r=s+3} = \frac{(s+3)^2 - 9}{((s+3)^2 + 9)^2} = \frac{s^2 + 6s}{(s^2 + 6s + 18)^2} \end{aligned}$$

d. $f(t) = t \int_0^t \tau e^{-\tau} d\tau$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(t)\}(s) &= \mathcal{L}\left\{t \int_0^t \tau e^{-\tau} d\tau\right\}(s) = -\frac{d}{ds} \mathcal{L}\left\{\int_0^t \tau e^{-\tau} d\tau\right\}(s) = -\frac{d}{ds} \frac{\mathcal{L}\{te^{-t}\}(s)}{s} \\ &= \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{s} \frac{d}{ds} \mathcal{L}\{e^{-t}\}(s) \right) = \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{s} \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{s+1} \right) \right) = -\frac{d}{ds} \left(\frac{1}{s(s+1)^2} \right) \\ &= \frac{(s+1)^2 + 2s(s+1)}{s^2(s+1)^4} = \frac{1}{s^2(s+1)^2} + \frac{2}{s(s+1)^3} = \frac{1}{s(s+1)^2} \left(\frac{1}{s} + \frac{2}{s+1} \right) = \boxed{\frac{3s+1}{s^2(s+1)^3}} \end{aligned}$$

$$e) f(t) = e^{2t} * \sin t = (\exp(2 \cdot) * \sin)(t) = \int_0^t e^{2u} \sin(t-u) du,$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \mathcal{L}\{(\exp(2 \cdot) * \sin)(t)\}(s) = \mathcal{L}\{e^{2t}\}(s) \cdot \mathcal{L}\{\sin t\}(s) = \boxed{\frac{1}{(s-2)(s^2+1)}, s > 2}$$

8. Calculeu l'antitransformada de Laplace de les funcions següents

$$a. G(s) = \frac{2s+5}{s^2+6s+34}$$

$$b. G(s) = \frac{e^{-2s}}{s^2(s-1)}$$

Solució

$$a. G(s) = \frac{2s+5}{s^2+6s+34} = \frac{2(s+3)-1}{(s+3)^2+5^2} = 2 \frac{s+3}{(s+3)^2+5^2} - \frac{1}{5} \frac{5}{(s+3)^2+5^2}$$

$$= 2 \mathcal{L}\left\{\cos(5t)\right\}_{(s+3)} - \frac{1}{5} \mathcal{L}\left\{\sin(5t)\right\}_{(s+3)}$$

$$= 2 \mathcal{L}\left\{e^{-3t} \cos(5t)\right\}(s) - \frac{1}{5} \mathcal{L}\left\{e^{-3t} \sin(5t)\right\}(s)$$

Aleshores:

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}(t) = \left(2 \cos(5t) - \frac{1}{5} \sin(5t)\right) e^{-3t}$$

$$b. G(s) = \frac{e^{-2s}}{s^2(s-1)} = e^{-2s} \left(\frac{A}{s^2} + \frac{B}{s} + \frac{C}{s-1} \right) \stackrel{(*)}{=} e^{-2s} \left(-\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s-1} \right) = \textcircled{*}$$

$$(*) A(s-1) + Bs(s-1) + Cs^2 = 1;$$

$$s=1: C=1$$

$$s=0: -A=1 \Leftrightarrow A=-1$$

$$s=2: A+2B+4C = -1+2B+4=1 \Leftrightarrow 2B=-2 \Leftrightarrow B=-1$$

$$\textcircled{*} = -e^{-2s} \mathcal{L}\{t\}(s) - e^{-2s} \mathcal{L}\{1\}(s) + e^{-2s} \mathcal{L}\{e^t\}(s)$$

$$= -\mathcal{L}\{(t-2)u(t-2)\}(s) - \mathcal{L}\{u(t-2)\}(s) + \mathcal{L}\{e^{t-2}u(t-2)\}(s)$$

Aleshores:

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}(t) = -(t-2)u(t-2) - u(t-2) + e^{t-2}u(t-2)$$

$$= \boxed{(1-t+e^{t-2})u(t-2)} \quad \square$$

9. Escriviu la funció

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \leq t < \frac{3\pi}{2} \\ \sin t, & \text{si } t \geq \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

en termes de "funcions esgraió unitàries" (això és, funcions del tipus $\mathcal{U}(t-)$) i calculeu la seva transformada de Laplace.

Solució

$$f(t) = \mathcal{U}\left(t - \frac{3\pi}{2}\right) \cdot \sin t = \mathcal{U}\left(t - \frac{3\pi}{2}\right) \sin\left(t - \frac{3\pi}{2} + \frac{3\pi}{2}\right) = \mathcal{U}\left(t - \frac{3\pi}{2}\right) \cdot \left(\sin\left(t - \frac{3\pi}{2}\right) \overset{=0}{\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)} + \cos\left(t - \frac{3\pi}{2}\right) \underset{1}{\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)}\right) = -\cos\left(t - \frac{3\pi}{2}\right) \mathcal{U}\left(t - \frac{3\pi}{2}\right)$$

Lavors:

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \mathcal{L}\left\{-\cos\left(t - \frac{3\pi}{2}\right) \cdot \mathcal{U}\left(t - \frac{3\pi}{2}\right)\right\}(s) = -e^{-\frac{3\pi}{2}s} \mathcal{L}\{\cos t\}(s) = \boxed{-\frac{se^{-\frac{3\pi}{2}s}}{s^2+1}}$$

10. Feu el mateix que al problema anterior però amb la funció $f(t) = E(t)$ (part entera).

Solució. Suposem $s > 0$, d'altra banda, si $s \leq 0$, és $\lim_{t \rightarrow +\infty} E(t) e^{-st} = +\infty$ i la integral no convergeix

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{E(t)\}(s) &= \int_0^{+\infty} E(t) e^{-st} dt = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A E(t) e^{-st} dt \stackrel{(*)}{=} \lim_P \int_0^P E(t) e^{-st} dt \\ &= \lim_P \left(\int_0^1 E(t) e^{-st} dt + \int_1^2 E(t) e^{-st} dt + \int_2^3 E(t) e^{-st} dt + \dots + \int_{P-1}^P E(t) e^{-st} dt \right) \\ &= \lim_P \left(\int_0^1 0 \cdot e^{-st} dt + \int_1^2 1 \cdot e^{-st} dt + \int_2^3 2 \cdot e^{-st} dt + \dots + \int_{P-1}^P (P-1) e^{-st} dt \right) \\ &= \lim_P \left(\frac{e^{-s}}{s} - \frac{e^{-2s}}{s} + 2 \frac{e^{-2s}}{s} - 2 \frac{e^{-3s}}{s} + 3 \frac{e^{-3s}}{s} - 3 \frac{e^{-4s}}{s} + 4 \frac{e^{-4s}}{s} - 4 \frac{e^{-5s}}{s} + \dots \right. \\ &\quad \left. \dots + \frac{P-2}{s} e^{-\frac{(P-2)s}{s}} - \frac{P-2}{s} e^{-\frac{(P-1)s}{s}} + \frac{P-1}{s} e^{-\frac{(P-1)s}{s}} - \frac{P-1}{s} e^{-\frac{Ps}{s}} \right) \\ &= \lim_P \frac{1}{s} \left(1 + e^{-s} + e^{-2s} + \dots + e^{-(P-1)s} + e^{-Ps} - 1 - Pe^{-Ps} \right) = \lim_P \left(\frac{1}{s} \sum_{k=0}^P e^{-ks} - \frac{1}{s} - \frac{P}{s} e^{-Ps} \right) \end{aligned}$$

(*) Recordem que si $f(t)$ és una funció de signe constant en $[a, +\infty)$, aleshores $\int_a^{+\infty} f(t) dt =$

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(t) dt = \lim_P \int_a^P f(t) dt.$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_P \frac{1}{s} \left(-1 + \sum_{k=0}^P e^{-ks} \right) \stackrel{(*)}{=} \frac{1}{s} \sum_{p=0}^{\infty} e^{-pk} - \frac{1}{s} \stackrel{(*)}{=} \frac{1}{s} \left(\frac{1}{1-e^{-s}} - 1 \right) \\
&= \frac{1}{s} \cdot \frac{1-1+e^{-s}}{1-e^{-s}} = \frac{1}{s} \cdot \frac{e^{-s}}{e^{-s}(e^s-1)} = \boxed{\frac{1}{s(e^s-1)}}, (s>0)
\end{aligned}$$

$$(*) \lim_P \sum_{k=0}^P e^{-ks} = \sum_{p=0}^{\infty} e^{-ks} = \sum_{p=0}^{\infty} r^p = \frac{1}{1-r} = \frac{1}{1-e^{-s}}$$

$r = e^{-s} < 1, (s > 0)$

Alternativament, tenint en compte la definició de la funció esglaió $U(t-a) = \begin{cases} 0, & t < a \\ 1, & t \geq a \end{cases}$

podem posar:

- $0 \leq t < 1 : E(t) = U(t-1) + U(t-2) + \dots = 0,$
- $1 \leq t < 2 : E(t) = U(t-1) + U(t-2) + \dots = 1,$
- $2 \leq t < 3 : E(t) = U(t-1) + U(t-2) + U(t-3) + \dots = 2, \dots$

i llavors:

$$E(t) = U(t-1) + U(t-2) + \dots + U(t-p) + \dots, t > 0$$

d'on aplicant — formalment —, la transformada de Laplace terme-a-terme (no justificarem aquest pas), s'obté:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{E(t)\}_{(s)} &= \mathcal{L}\{U(t-1)\}_{(s)} + \mathcal{L}\{U(t-2)\}_{(s)} + \dots + \mathcal{L}\{U(t-p)\}_{(s)} + \dots \\
&= \frac{e^{-s}}{s} + \frac{e^{-2s}}{s} + \dots + \frac{e^{-ps}}{s} + \dots = \frac{1}{s} \left(\sum_{p=0}^{\infty} e^{-ps} - 1 \right) = \frac{1/s}{1-e^{-s}} - \frac{1}{s} \\
&= \frac{1-1+e^{-s}}{s(1-e^{-s})} = \frac{e^{-s}}{s e^{-s}(e^s-1)} = \boxed{\frac{1}{s(e^s-1)}}, (s>0) \square
\end{aligned}$$

11. Calculeu la antitransformada de Laplace de la funció $G(s) = \ln\left(\frac{s^2+1}{s^2+4}\right)$ fent servir que $\mathcal{L}\{t^m f(t)\}(s) = (-1)^m \frac{d^m}{ds^m} \mathcal{L}\{f(t)\}(s)$.

Solució. Sigui $g(t)$ t.q.: $\mathcal{L}\{g(t)\}(s) = G(s)$. Aleshores:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{tg(t)\}(s) &= -\frac{d}{ds} \mathcal{L}\{g(t)\}(s) = -\frac{dG}{ds}(s) = -\frac{s^2+4}{s^2+1} \cdot \frac{2s(s^2+4) - 2s(s^2+1)}{(s^2+4)^2} = \frac{-6s}{(s^2+1)(s^2+4)} \\ &= \frac{As+B}{s^2+1} + \frac{Cs+D}{s^2+4} \stackrel{(*)}{=} \frac{-2s}{s^2+1} + \frac{2s}{s^2+4} = -2\mathcal{L}\{\cos t\}(s) + 2\mathcal{L}\{\cos(2t)\}(s) \end{aligned}$$

(*) Descomposició en fraccions simples,

$$(As+B)(s^2+4) + (Cs+D)(s^2+1) = -6, \forall s$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A+C=0 \\ 4A+C=-6 \end{cases}; \quad \begin{cases} 3A=-6 \Leftrightarrow A=-2 \\ C=-A=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} B+D=0 \\ 4B+D=0 \end{cases}; \quad B=0=D$$

Aleshores

$$\begin{aligned} g(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\ln\left(\frac{s^2+1}{s^2+4}\right)\right\}(s) = \frac{1}{t} \mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{d}{ds} \mathcal{L}\{g(t)\}(s)\right\}(t) \\ &= \frac{1}{t} \mathcal{L}^{-1}\left\{-2\mathcal{L}\{\cos t\}(s) + 2\mathcal{L}\{\cos(2t)\}(s)\right\} \\ &= \boxed{-\frac{2}{t}(\cos t - \cos(2t))} \quad \square \end{aligned}$$

12. Calculeu l'antitransformada de Laplace de la funció $F(s) = \frac{1}{(s+1)^2}$ de la forma següent

(i) Fent servir la transformada de Laplace de la convolució

(ii) Pels teoremes de translació

Solució.

(i) Recordem que $(f_1 * f_2)(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{L}\{(f_1 * f_2)(t)\}(s) = \mathcal{L}\{f_1(t)\}(s) \cdot \mathcal{L}\{f_2(t)\}(s)$.

on suposem que existeixen $F_1(s) = \mathcal{L}\{f_1(t)\}(s)$ i $F_2(s) = \mathcal{L}\{f_2(t)\}(s)$.

Siguin:

$$F_1(s) = \mathcal{L}\{f_1(t)\}(s) = \frac{1}{s+1} = \mathcal{L}\{f_2(t)\}(s) = F_2(s),$$

per tant:

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2}\right\}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\mathcal{L}\{e^{-t}\}(s) \cdot \mathcal{L}\{e^{-t}\}(s)\right\}(t) \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\mathcal{L}\{e^{-t} * e^{-t}\}(s)\right\}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\mathcal{L}\left\{\int_0^t e^{-\tau} e^{-(t-\tau)} d\tau\right\}(s)\right\}(t) \\ &= \int_0^t e^{-\tau} e^{-t} e^{\tau} d\tau = e^{-t} \int_0^t dt = \boxed{te^{-t}}. \end{aligned}$$

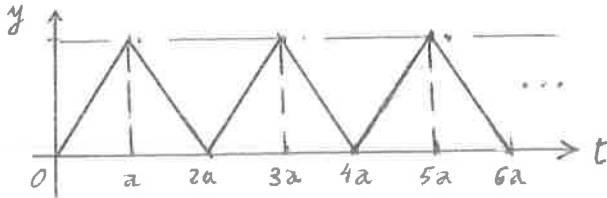
(ii) Recordem que $\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\}(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s-a)$, $s > a + c$;

ou suposem que f és d'ordre exponencial, i.e., que $\exists M, t_0, c > 0$ t.q. $|f(t)| \leq M e^{ct} \forall t \geq t_0$.

Així:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2}\right\}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\mathcal{L}\{t\}(s+1)\right\}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\mathcal{L}\{e^{-t}t\}(s)\right\}(t) = \boxed{te^{-t}}$$

13. Calculeu la transformada de Laplace de la funció "ona triangular".



Transformada de Laplace d'una funció periòdica. — suposem f contínua a trossos i periòdica de període T , i.e., $f(t+T) = f(t) \forall t > 0, T > 0$. Llavors, clarament, existeix la TL de $f(t)$, ja que llavors $f(t)$ és acotada i per tant, de creixement exponencial.

$$\begin{aligned} F(s) &= \mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt \stackrel{(*)}{=} \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A e^{-st} f(t) dt = \lim_P \int_0^{PT} e^{-st} f(t) dt = \\ &= \lim_P \left(\int_0^T e^{-st} f(t) dt + \int_T^{2T} e^{-st} f(t) dt + \int_{2T}^{3T} e^{-st} f(t) dt + \dots + \int_{(P-1)T}^{PT} e^{-st} f(t) dt \right) \\ &= \lim_P \sum_{k=0}^{P-1} \int_{kT}^{(k+1)T} e^{-st} f(t) dt = \left\{ \begin{array}{l} \text{canvi de variable:} \\ t = \tau + kT : \text{ funció monòtona creixent} \\ t = kT : \tau = 0 : t = \varphi(\tau) = \tau + kT ; dt = \varphi'(\tau) d\tau = d\tau \\ t = (k+1)T : \tau = T \end{array} \right\} \\ &= \lim_P \sum_{k=0}^{P-1} \int_0^T e^{-s(\tau+kT)} \underbrace{f(\tau+kT)}_{f(\tau)} d\tau = \lim_P \sum_{k=0}^{P-1} e^{-s k T} \int_0^T e^{-s\tau} f(\tau) d\tau \\ &= \left(\int_0^T e^{-s\tau} f(\tau) d\tau \right) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} e^{-kTs} = \frac{1}{1 - e^{-Ts}} \int_0^T e^{-s\tau} f(\tau) d\tau, \text{ (veure taules).} \end{aligned}$$

Suposem $s > 0$,

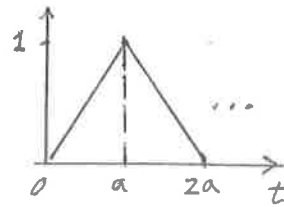
llavors $e^{-Ts} < 1$

$$\therefore \sum_{k=0}^{\infty} e^{-kTs} = \sum_{k=0}^{\infty} r^k = \frac{1}{1-r} = \frac{1}{1 - e^{-Ts}}$$

$r = e^{-Ts} < 1$

(*) Com que $\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt$ és convergent ($f(t)$ és CT i d'ordre exponencial segons hem comentat dalt), llavors: $\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A e^{-st} f(t) dt = \lim_P \int_0^{PT} e^{-st} f(t) dt$, per qualsevol successió $\{k_p\}_{p \in \mathbb{N}} \setminus \{0\}$ t.q. $k_p \rightarrow \infty$.

Em el cas particular de l'ona triangular



$$f(t) = \begin{cases} t/a, & 0 \leq t \leq a \\ -t/a + 2, & a < t \leq 2a \end{cases}$$

i $f(t+2a) = f(t) \forall t \geq 0$.

$$\begin{aligned} T=2a: \int_0^{2a} e^{-st} f(t) dt &= \int_0^a \frac{t}{a} e^{-st} dt + \int_a^{2a} \left(-\frac{t}{a} + 2\right) e^{-st} dt \stackrel{(*)}{=} \left(-\frac{e^{-st}}{sa} \left(t + \frac{1}{s}\right)\right) \Big|_{t=0}^{t=a} \\ &+ \frac{e^{-st}}{sa} \left(t + \frac{1}{s}\right) \Big|_{t=a}^{t=2a} - \frac{2}{s} e^{-st} \Big|_{t=a}^{t=2a} = \frac{1}{as^2} - \frac{e^{-as}}{as} \left(a + \frac{1}{s}\right) + \frac{-2as}{as} \left(2a + \frac{1}{s}\right) \\ &\quad - \frac{e^{-as}}{as} \left(a + \frac{1}{s}\right) + \frac{2}{s} e^{-as} - \frac{2}{s} e^{-2as} \\ &= \frac{e^{-2as}}{s} \left(2 + \frac{1}{as} - 2\right) - \frac{e^{-as}}{s} \left(2 + \frac{2}{as} - 2\right) + \frac{1}{as^2} = \frac{1}{as^2} \left(1 - 2e^{-as} + e^{-2as}\right) \\ &= \frac{1}{as^2} \cdot (1 - e^{-as})^2 \end{aligned}$$

Aleshores:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(t)\}(s) &= \frac{1}{1 - e^{-2as}} \int_0^{2a} f(t) e^{-st} dt = \frac{1}{1 - e^{-2as}} \cdot \frac{(1 - e^{-as})^2}{as^2} = \frac{(1 - e^{-as})^2}{as^2 (1 - e^{-as})(1 + e^{-as})} \\ &= \frac{e^{-as/2} (e^{as/2} - e^{-as/2})}{as^2 e^{-as/2} (e^{as/2} + e^{-as/2})} = \boxed{\frac{1}{as^2} \tanh\left(\frac{as}{2}\right)} \quad \square \end{aligned}$$

14. (i) Demostreu que si f és contínua a trossos i d'ordre exponencial i tal que existeix $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t)}{t}$, aleshores $\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}(s) = \int_s^{+\infty} F(u) du$, on $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s)$.

(ii) Calculeu la transformada de Laplace de la funció Sinus-integral

$$f(t) = \int_0^t \frac{\sin u}{u} du =: \text{Si}(t)$$

(iii) Demostreu que $\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt = \int_0^{+\infty} F(u) du$ si existeixen les integrals. Com a aplicació calculeu $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$.

(*) Integració per parts:

$$\int t e^{-st} dt = \left\{ \begin{array}{l} u=t \Rightarrow u'=1 \\ v=e^{-st} \Rightarrow v'=-e^{-st}/s \end{array} \right\} = -\frac{e^{-st}}{s} t + \frac{1}{s} \int e^{-st} dt = -\frac{t}{s} e^{-st} - \frac{1}{s^2} e^{-st} = -\frac{e^{-st}}{s} \left(t + \frac{1}{s}\right)$$

Solució.

(i) Definim: $g(t) = \frac{f(t)}{t}, t > 0 \Leftrightarrow f(t) = tg(t)$.

Aleshores $F(s) := \mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \mathcal{L}\{tg(t)\}(s) = -\frac{dG}{ds}(s)$ on posem $G(s) := \mathcal{L}\{g(t)\}(s)$.
 Notem que $g(t)$ és contínua a trossos i d'ordre exponencial, per tant existeix $G(s)$. Integrant a l'interval $[s, A], A > s > \epsilon > 0$,

$$G(s) - G(A) = \int_s^A F(u) du$$

prenent límits quan $A \rightarrow +\infty$ i tenint en compte que la integral $\int_s^{+\infty} F(u) du$ existeix i que, si $g(t)$ és d'ordre exponencial, llavors $\lim_{A \rightarrow +\infty} G(A) = \lim_{A \rightarrow +\infty} \mathcal{L}\{g(t)\}(A) = 0$ (exercici: demostreu-lo!);
 llavors:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}(s) = G(s) = \int_s^{+\infty} F(u) du$$

(ii) $\mathcal{L}\{Si(t)\}(s) = \mathcal{L}\left\{\int_0^t \frac{\sin u}{u} du\right\}(s) = \frac{1}{s} \mathcal{L}\left\{\frac{\sin t}{t}\right\}(s) = \frac{1}{s} \int_s^{+\infty} \mathcal{L}\{\sin t\}(u) du = \frac{1}{s} \int_s^{+\infty} \frac{du}{1+u^2}$
 $= \frac{1}{s} \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_s^A \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{s} (\lim_{A \rightarrow +\infty} \arctan A - \arctan s) = \frac{\pi/2 - \arctan s}{s} \square$

(iii) $\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt = \int_0^{+\infty} F(u) du$.

A partir de (ii) $\int_s^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt = \int_s^{+\infty} F(u) du$, si les integrals existeixen. Prenent $s \rightarrow 0^+$, tenim

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt = \int_0^{+\infty} F(u) du \text{ (si les integrals existeixen)}$$

Aplicació: $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \lim_{s \rightarrow 0^+} \int_s^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \lim_{s \rightarrow 0^+} \int_s^{+\infty} \mathcal{L}\{\sin t\}(u) du = \lim_{s \rightarrow 0^+} \int_s^{+\infty} \frac{du}{1+u^2} =$
 $= \int_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^2} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \frac{du}{1+u^2} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \arctan A - \arctan 0 = \boxed{\pi/2}$.

15. Demostreu que $\mathcal{L}\left\{\int_0^t \left(\int_0^{t_1} f(u) du\right) dt_1\right\}(s) = \frac{1}{s^2} \mathcal{L}\{f(t)\}(s)$

Solució.

Definim $g(t) := \int_0^t f(u) du$, don: $\mathcal{L}\{g(t)\}(s) = \frac{\mathcal{L}\{f(t)\}(s)}{s} = \frac{F(s)}{s}$, on posem $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s)$.

aleshores $\mathcal{L}\left\{\int_0^t \left(\int_0^{t_1} f(u) du\right) dt_1\right\}(s) = \mathcal{L}\left\{\int_0^t g(t_1) dt_1\right\}(s) = \frac{1}{s} \mathcal{L}\{g(t)\}(s) = \frac{1}{s^2} \mathcal{L}\{f(t)\}(s) \square$

16. Calculeu $\int_0^{+\infty} t e^{-2t} \cos t dt$,

Solució:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} t e^{-2t} \cos t dt &= \mathcal{L}\{t \cos t\}(z) = -\frac{d}{ds} \Big|_{s=2} \mathcal{L}\{\cos t\}(s) = -\frac{d}{ds} \Big|_{s=2} \left(\frac{s}{s^2+1} \right) \\ &= -\frac{s^2+1-2s^2}{(s^2+1)^2} \Big|_{s=2} = \frac{s^2-1}{(s^2+1)^2} \Big|_{s=2} = \boxed{\frac{3}{25}} \quad \square \end{aligned}$$

17. Sigui la funció $f(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq 1 \\ 2t, & t > 1 \end{cases}$

(i) Calculeu $\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$

(ii) Calculeu $\mathcal{L}\{f'(t)\}(s)$

(iii) És compleix la fórmula $\mathcal{L}\{f'(t)\} = s \mathcal{L}\{f(t)\}(s) - f(0)$. Què falla?

Solució:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad f(t) &= (1 - \mathcal{U}(t-1))(t-1) + 1 - \mathcal{U}(t-1) + 2(t-1)\mathcal{U}(t-1) + 2\mathcal{U}(t-1) \\ &= 1 + t - 1 + \mathcal{U}(t-1) + (t-1)\mathcal{U}(t-1) = t + \mathcal{U}(t-1) + (t-1)\mathcal{U}(t-1) \end{aligned}$$

Nota: més fàcil: $f(t) = t + t\mathcal{U}(t-1) = t + (1+t-1)\mathcal{U}(t-1) = t + \mathcal{U}(t-1) + (t-1)\mathcal{U}(t-1)$,

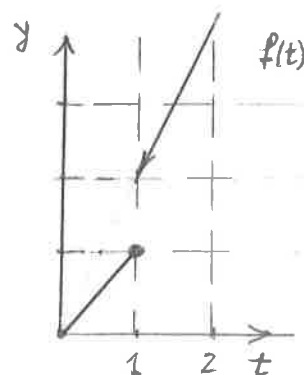
$$\begin{aligned} \text{d'on: } \mathcal{L}\{f(t)\}(s) &= \mathcal{L}\{t\}(s) + \mathcal{L}\{(1+t-1)\mathcal{U}(t-1)\}(s) = \mathcal{L}\{t\}(s) + e^{-s} \mathcal{L}\{1+t\}(s) \\ &= \frac{1}{s^2} + e^{-s} \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} \right). \end{aligned}$$

(ii) Veiem que f no és contínua en $t=1$. En canvi és contínua i derivable en $]0, 1[\cup]1, +\infty[$, amb $f(0^+) = 0$, $f(1^-) = 1$

$\neq f(1^+) = 2$, i:

$$f'(t) = 1 + \mathcal{U}(t-1),$$

per $t \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$, amb $f'(0^+) = 1$, $f'(1^-) = 1 \neq 2 = f'(1^+)$.



Si calculem la transformada de Laplace de $f'(t)$ directament: (*)

$$\mathcal{L}\{f'(t)\}(s) = \mathcal{L}\{1 + \mathcal{U}(t-1)\}(s) = \frac{1}{s}(1 + e^{-s}) \quad (**)$$

(*) Notem que f' és contínua a trossos i d'ordre exponencial, per tant la seva transformada de Laplace està definida. De fet (exercici!) es comprova que existeix per $s > 0$.

(iii) En canvi:

$$s\mathcal{L}\{f(t)\}(s) - f(0) = \frac{1}{s} + e^{-s}\left(1 + \frac{1}{s}\right) - 0$$

i per tant no es satisfà la fórmula. Això és degut a que $f(t)$ no és contínua, sinó que té una discontinuïtat de salt en $t=1$. Si fem el càlcul "correcte": $\mathcal{L}\{f'(t)\}(s) =$

$$\begin{aligned} &= \int_0^{+\infty} f'(t) e^{-st} dt = \int_0^1 f'(t) e^{-st} dt + \int_1^{+\infty} f'(t) e^{-st} dt \\ &= f(t) e^{-st} \Big|_0^1 + s \int_0^1 f(t) e^{-st} dt + f(t) e^{-st} \Big|_1^{+\infty} + s \int_1^{+\infty} f(t) e^{-st} dt \\ &= \lim_{t \rightarrow 1^-} f(t) e^{-st} - \lim_{t \rightarrow 1^+} f(t) e^{-st} - f(0^+) + \lim_{A \rightarrow +\infty} f(A) e^{-sA} + s \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt \end{aligned}$$

$$= s\mathcal{L}\{f(t)\}(s) - f(0^+) + \overbrace{\lim_{t \rightarrow 1^-} f(t) e^{-st} - \lim_{t \rightarrow 1^+} f(t) e^{-st}}^{(*)}$$

(si f és d'ordre exponencial)

$$= s \left[\frac{1}{s^2} + e^{-s} \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} \right) \right] - 0 + e^{-s} - 2e^{-s} = \frac{1}{s} + e^{-s} \left(1 + \frac{1}{s} \right) - e^{-s} = \frac{1}{s} (1 + e^{-s})$$

i aquest resultat coincideix amb (*) obtingut a (ii). Notem, a més que si f fos contínua llavors (*) seria = 0 i aleshores la fórmula seria vàlida. \square

18. Calculeu $\mathcal{L}\left\{\frac{e^{-2t}}{\sqrt{t}}\right\}(s)$. Per a quins valors de s existeix la transformada?

Solució.

$$\mathcal{L}\left\{\frac{e^{-2t}}{\sqrt{t}}\right\}(s) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-2t}}{\sqrt{t}} e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(s+2)t}}{\sqrt{t}} dt.$$

Veiem que, per qualsevol $a > 0$ $\int_a^{+\infty} \frac{e^{-(s+2)t}}{\sqrt{t}} dt$ és convergent $\Leftrightarrow s > -2$, mentre que $\int_0^a \frac{e^{-(s+2)t}}{\sqrt{t}} dt$

és convergent per qualsevol $a > 0$ i $\forall s \in \mathbb{R}$.

Aleshores la integral és convergent $\Leftrightarrow s > -2$ i llavors la corresponent transformada de Laplace val:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{e^{-2t}}{\sqrt{t}}\right\}(s) = \mathcal{L}\left\{t^{-1/2}\right\}(s+2) = \frac{\Gamma(-1/2+1)}{(s+2)^{-1/2+1}} = \frac{\Gamma(1/2)}{(s+2)^{1/2}} = \sqrt{\frac{\pi}{s+2}}, \quad s > -2. \quad \square$$

19. Calculeu: $\mathcal{L}\{t \operatorname{Si}(t)\}(s) = -\frac{d}{ds} \mathcal{L}\{\operatorname{Si}(t)\}(s) = -\frac{d}{ds} \left(\frac{\pi/2 - \arctan s}{s} \right)$

↑ problema 14(ii)

$$= \frac{\pi/2}{s^2} + \frac{\frac{s}{1+s^2} - \arctan s}{s^2} = \frac{\pi/2}{s^2} + \frac{1}{s(1+s^2)} - \frac{\arctan s}{s^2} = \frac{\pi/2 - \arctan s}{s^2} + \frac{1}{s(1+s^2)}$$

$$= \boxed{\frac{\operatorname{arccot} s}{s^2} + \frac{1}{s(1+s^2)}} \quad \square$$

20. Comproveu que $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} \sin t}{t} dt = \frac{\pi}{4}$. [Indicació: feu servir l'apuntat 14 iii]

Solució.

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} \sin t}{t} dt = \int_0^{+\infty} \mathcal{L}\{e^{-t} \sin t\}(u) du = \int_0^{+\infty} \mathcal{L}\{\sin t\}(u+1) du = \int_0^{+\infty} \frac{du}{(u+1)^2 + 1}$$

$$= \lim_{u \rightarrow +\infty} \arctan(u+1) - \arctan 1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \boxed{\frac{\pi}{4}}$$

21. Si f és contínua a trossos i d'ordre exponencial, demostreu que

$$\mathcal{L}\left\{\int_a^t f(\tau) d\tau\right\}(s) = \frac{\mathcal{L}\{f(t)\}(s)}{s} + \frac{1}{s} \int_a^0 f(\tau) d\tau$$

Solució.

$$\mathcal{L}\left\{\int_a^t f(\tau) d\tau\right\}(s) = \mathcal{L}\left\{\int_0^a f(\tau) d\tau + \int_a^t f(\tau) d\tau - \int_0^a f(\tau) d\tau\right\}(s) = \mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau) d\tau\right\}(s)$$

$$- \mathcal{L}\left\{\int_0^a f(\tau) d\tau\right\}(s) = \frac{\mathcal{L}\{f(t)\}(s)}{s} - \left(\int_0^a f(\tau) d\tau\right) \mathcal{L}\{1\}(s)$$

$$= \frac{\mathcal{L}\{f(t)\}(s)}{s} - \frac{1}{s} \int_0^a f(\tau) d\tau \quad \square$$

22. Calculeu $\mathcal{L}\{t^2 \mathcal{U}(t-2)\}(s)$.

Solució.-

$$\mathcal{L}\{t^2 \mathcal{U}(t-2)\}(s) = \mathcal{L}\{(t-2+2)^2 \mathcal{U}(t-2)\}(s) = \mathcal{L}\{(t-2)^2 \mathcal{U}(t-2)\}(s) + 4 \mathcal{L}\{(t-2) \mathcal{U}(t-2)\}(s)$$

$$+ 4 \mathcal{L}\{\mathcal{U}(t-2)\}(s) = e^{-2s} \mathcal{L}\{t^2\}(s) + 4e^{-2s} \mathcal{L}\{t\}(s) + 4e^{-2s} \mathcal{L}\{1\}(s)$$

$$= \left(\frac{2}{s^3} + \frac{4}{s^2} + \frac{4}{s}\right) e^{-2s} = \boxed{\frac{2}{s} \left(\frac{1}{s^2} + \frac{2}{s} + 2\right) e^{-2s}} \quad \square$$

23. Feu servir la transformada de Laplace per resoldre els següents problemes de Cauchy:

(a) $y' + 2y = t, y(0) = -1$

(b) $y'' - 4y' + 4y = t^3, y(0) = 1, y'(0) = 0.$

(c) $y''' + 2y'' - y' - 2y = \sin 3t, y(0) = 0, y'(0) = 0, y''(0) = 1.$

(d) $y'' - 5y' + 6y = u(t-1), y(0) = 0, y'(0) = 1.$

Solució.

Anomenarem $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}(s)$; aplicant la TL a totes dues bandes de l'EDO:

(a) $sY(s) - y(0) + 2Y(s) = (s+2)Y(s) - y'(0) = (s+2)Y(s) + 1 = \frac{1}{s^2}$, on $\frac{1}{s^2} = \mathcal{L}\{t\}(s)$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{1}{s^2(s+2)} - \frac{1}{s+2} = \mathcal{L}\left\{\int_0^t \tau e^{-2(t-\tau)} d\tau\right\}(s) - \mathcal{L}\{e^{-2t}\}(s)$$

Aleshores:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}(t) = e^{-2t} \int_0^t \tau e^{2\tau} d\tau - e^{-2t} \stackrel{(*)}{=} -\frac{1}{4} + \frac{t}{2} + \frac{e^{-2t}}{4} - e^{-2t}$$

$$= \boxed{-\frac{1}{4} + \frac{t}{2} - \frac{3}{4} e^{-2t}}$$

(*) Integrant per parts:

$$\int_0^t \tau e^{2\tau} d\tau = \left\{ \begin{array}{l} u = \tau \Rightarrow u' = 1 \\ v' = e^{2\tau} \Rightarrow v = e^{2\tau}/2 \end{array} \right\} = \tau \frac{e^{2\tau}}{2} \Big|_0^t - \frac{1}{2} \int_0^t e^{2\tau} d\tau = \frac{t}{2} e^{2t} + \frac{1}{4} (1 - e^{2t})$$

(b) $s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) - 4sY(s) + 4y(0) + 4Y(s) = (s^2 - 4s + 4)Y(s) - (s-4)y(0) - y'(0)$

$$= \frac{6}{s^4}, \text{ on } \mathcal{L}\{t^3\}(s) = \frac{6}{s^4}$$

$$\Leftrightarrow Y(s) = \frac{6}{s^4(s-2)^2} + \frac{s-4}{(s-2)^2} = \frac{6}{s^4(s-2)^2} + \frac{s-2}{(s-2)^2} - \frac{2}{(s-2)^2}$$

$$= \frac{6}{s^4(s-2)^2} - \frac{2}{(s-2)^2} + \frac{1}{s-2}$$

$$\frac{6}{s^4(s-2)^2} = \frac{A}{s^4} + \frac{B}{s^3} + \frac{C}{s^2} + \frac{D}{s} + \frac{E}{(s-2)^2} + \frac{F}{s-2}$$

$$\Leftrightarrow A(s-2)^2 + Bs(s-2)^2 + Cs^2(s-2)^2 + Ds^3(s-2)^2 + Es^4 + Fs^4(s-2) = 6 \forall s$$

$$\Leftrightarrow A(s^2 - 4s + 4) + B(s^3 - 4s^2 + 4s) + C(s^4 - 4s^3 + 4s^2) + D(s^5 - 4s^4 + 4s^3) +$$

$$+ Es^4 + F(s^5 - 2s^4) = 6 \forall s$$

$$\begin{array}{rcl}
 4A & = & 6 \\
 -4A + 4B & = & 0 \\
 A = 4B + 4C & = & 0 \\
 B - 4C + 4D & = & 0 \\
 C - 4D + E - 2F & = & 0 \\
 D + F & = & 0
 \end{array}
 \quad \left| \begin{array}{l}
 \text{don:} \\
 A = 3/2, B = 3/2 \\
 3/2 - 6 + 4C = -9/2 + 4C = 0 \Rightarrow C = 9/8 \\
 3/2 - 9/2 + 4D = -3 + 4D = 0 \Rightarrow D = 3/4 \\
 C - 2D + E = 9/8 - 3/2 + E = 0 \Rightarrow E = 3/8 \\
 F = -D = -3/4
 \end{array} \right.$$

Aleshores:

$$Y(s) = \frac{3/2}{s^4} + \frac{3/2}{s^3} + \frac{9/8}{s^2} + \frac{3/4}{s} + \frac{3/8}{(s-2)^2} - \frac{3/4}{s-2} - \frac{2}{(s-2)^2} + \frac{1}{s-2}$$

$$= \frac{1}{4} \mathcal{L}\{t^3\}(s) + \frac{3}{4} \mathcal{L}\{t^2\}(s) + \frac{9}{8} \mathcal{L}\{t\}(s) + \frac{3}{4} \mathcal{L}\{1\}(s)$$

$$- \frac{13}{8} \mathcal{L}\{t\}(s-2) + \frac{1}{4} \mathcal{L}\{e^{2t}\}(s)$$

$$= \frac{1}{4} \mathcal{L}\{t^3\}(s) + \frac{3}{4} \mathcal{L}\{t^2\}(s) + \frac{9}{8} \mathcal{L}\{t\}(s) + \frac{3}{4} \mathcal{L}\{1\}(s) - \frac{13}{8} \mathcal{L}\{te^{2t}\}(s) + \frac{1}{4} \mathcal{L}\{e^{2t}\}(s)$$

i llavors, la solució del PVI resulta:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}(t) = \frac{1}{4} e^{2t} - \frac{13}{8} t e^{2t} + \frac{t^3}{4} + \frac{3}{4} t^2 + \frac{9}{8} t + \frac{3}{4}$$

$$\begin{aligned}
 (c) \quad & s^3 Y(s) - s^2 y(0) - s y'(0) - y''(0) + 2s^2 Y(s) - 2s y(0) - 2y'(0) - s Y(s) + y(0) - 2Y(s) \\
 & = (s^3 + 2s^2 - s - 2) Y(s) - (s^2 + 2s - 1) y''(0) - (s + 2) y'(0) - y(0) = \frac{3}{s^2 + 9}
 \end{aligned}$$

on l'últim terme és la TL de $f(t) = \sin(3t)$, ie: $\mathcal{L}\{\sin(3t)\}(s) = \frac{3}{s^2 + 9}$. Aleshores,

$$Y(s) = \frac{3}{(s^2 + 9)(s-1)(s+1)(s+2)} + \frac{1}{(s+2)(s+1)(s-1)}$$

Descomposició en fraccions simples

$$\frac{3}{(s^2 + 9)(s-1)(s+1)(s+2)} = \frac{As+B}{s^2+9} + \frac{C}{s-1} + \frac{D}{s+1} + \frac{E}{s+2}$$

$$\begin{aligned}
 \Leftrightarrow & (As+B)(s-1)(s+1)(s+2) + C(s^2+9)(s+1)(s+2) + D(s^2+9)(s-1)(s+2) \\
 & + E(s^2+9)(s+1)(s-1) = 3 \quad \forall s \quad (*)
 \end{aligned}$$

$$s=1: 60C = 3 \Rightarrow C = 1/20$$

$$s=-1: -20D = 3 \Rightarrow D = -3/20$$

$$s=-2: 39E = 3 \Rightarrow E = 1/13$$

$$\begin{aligned}
 S=0: -2B+18C-18D-9E=3 &\Leftrightarrow -2B=3-18C+18D+9E \\
 &= 3-\frac{18}{20}-\frac{54}{20}+\frac{9}{13}=3-\frac{36}{10}+\frac{9}{13}=\frac{390-378+90}{130} \\
 &= \frac{12}{130}; B=-\frac{6}{130}
 \end{aligned}$$

Per últim, si considerem els coeficients de grau 4 de la banda de l'esquerra de l'equació (*):

$$A+C+D+E=0 \Leftrightarrow A=-\frac{1}{20}+\frac{3}{20}-\frac{1}{13}=\frac{1}{10}-\frac{1}{13}=\frac{3}{130}$$

Aleshores, l'antitransformada val:

$$\begin{aligned}
 y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{(s^2+9)(s-1)(s+1)(s+2)}\right\}(t) + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)(s+1)(s-1)}\right\}(t) \\
 &\stackrel{(b)}{=} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s/130}{s^2+9} - \frac{6/130}{s^2+9} + \frac{1/20}{s-1} - \frac{3/20}{s+1} + \frac{1/13}{s+2}\right\}(t) \\
 &\quad + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1/3}{s+2} - \frac{1/2}{s+1} + \frac{1/6}{s-1}\right\}(t) \\
 &= \frac{3}{130} \cos(3t) - \frac{1}{65} \sin(3t) + \frac{1}{20} e^t - \frac{3}{20} e^{-t} + \frac{1}{13} e^{-2t} + \frac{1}{3} e^{-2t} - \frac{1}{2} e^{-t} + \frac{1}{6} e^t \\
 &= \boxed{\frac{3}{130} \cos(3t) - \frac{1}{65} \sin(3t) + \frac{13}{60} e^t - \frac{13}{20} e^{-t} + \frac{16}{39} e^{-2t}}
 \end{aligned}$$

(c) De la mateixa manera, calculem la descomposició en fraccions simples de:

$$\frac{1}{(s+2)(s+1)(s-1)} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s-1} = \frac{1/3}{s+2} - \frac{1/2}{s+1} + \frac{1/6}{s-1}$$

$$A(s+1)(s-1) + B(s+2)(s-1) + C(s+2)(s+1) = 1 \quad \forall s$$

$$s = -1: -2B = 1 \Leftrightarrow B = -1/2$$

$$s = 1: 6C = 1 \Leftrightarrow C = 1/6$$

$$s = -2: 3A = 1 \Leftrightarrow A = 1/3$$

$$\begin{aligned}
 (d) \quad s^2 Y(s) - s y(0) - y'(0) - 5s Y(s) + 5y(0) + 6 Y(s) &= (s^2 - 5s + 6) Y(s) - (s-5) y(0) - y'(0) \\
 &= (s-3)(s-2) Y(s) - 1 = \frac{e^{-s}}{s}, \text{ on el terme } \frac{e^{-s}}{s} \text{ és la TL de } u(t-1), \text{ i.e.,}
 \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}\{u(t-1)\}(s) = \frac{e^{-s}}{s}$$

$$\text{Aïllant } Y(s): Y(s) = \frac{e^{-s}}{s(s-3)(s-2)} + \frac{1}{(s-3)(s-2)}$$

Descomposició en fraccions simples:

$$\frac{1}{s(s-3)(s-2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-3} + \frac{C}{s-2} = \frac{1/6}{s} + \frac{1/3}{s-3} - \frac{1/2}{s-2}$$

$$A(s-3)(s-2) + Bs(s-2) + Cs(s-3) = 1 \quad \forall s$$

$$s=3: 3B=1 \Leftrightarrow B=1/3; s=2: -2C=1 \Leftrightarrow C=-1/2; s=0: 6A=1 \Leftrightarrow A=1/6$$

$$\frac{1}{(s-3)(s-2)} = \frac{A}{s-3} + \frac{B}{s-2} = \frac{1}{s-3} + \frac{-1}{s-2}$$

$$A(s-2) + B(s-3) = 1$$

$$s=2: -B=1 \Leftrightarrow B=-1$$

$$s=3: A=1$$

Aleshores: $Y(s) = \frac{e^{-s}}{s(s-3)(s-2)} + \frac{1}{(s-3)(s-2)}$

$$= \frac{e^{-s}}{6s} + \frac{e^{-s}/3}{s-3} - \frac{e^{-s}/2}{s-2} + \frac{1}{s-3} - \frac{1}{s-2}$$

$$= \frac{e^{-s}}{6} \mathcal{L}\{1\}(s) + \frac{e^{-s}}{3} \mathcal{L}\{e^{3t}\}(s) - \frac{e^{-s}}{2} \mathcal{L}\{e^{2t}\}(s)$$

$$+ \mathcal{L}\{e^{3t}\}(s) - \mathcal{L}\{e^{2t}\}(s)$$

$$= \frac{1}{6} \mathcal{L}\{u(t-1)\}(s) + \frac{1}{3} \mathcal{L}\{e^{3(t-1)}u(t-1)\}(s)$$

$$- \frac{1}{2} \mathcal{L}\{e^{2(t-1)}u(t-1)\}(s) + \mathcal{L}\{e^{3t}\}(s) - \mathcal{L}\{e^{2t}\}(s),$$

i llavors la solució del PVI ve donada per l'antitransformada de $Y(s)$:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}(t) = u(t-1) \cdot \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{3} e^{3(t-1)} - \frac{1}{2} e^{2(t-1)} \right) + e^{3t} - e^{2t} \quad \square$$

24. Resoleu l'equació diferencial amb condicions inicials:

$$y'' + 4y' + 13y = \delta(t-\pi) + \delta(t-3\pi), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

on $\delta(t-t_0)$ és la delta de Dirac en el punt t_0 .

Solució.

$$s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) + 4sY(s) - 4y(0) + 13Y(s) = (s^2 + 4s + 13)Y(s) - (s+4)y(0) - y'(0)$$

$$= e^{-\pi s} + e^{-3\pi s}, \quad \text{on: } e^{-\pi s} = \mathcal{L}\{\delta(t-\pi)\}(s), \quad e^{-3\pi s} = \mathcal{L}\{\delta(t-3\pi)\}(s),$$

d'on:

$$Y(s) = \frac{e^{-\pi s} + e^{-3\pi s}}{(s+2)^2 + 3^2} + \frac{s+4}{(s+2)^2 + 3^2} = \frac{e^{-\pi s}}{3} \frac{3}{(s+2)^2 + 3^2} + \frac{e^{-3\pi s}}{3} \frac{3}{(s+2)^2 + 3^2}$$

$$+ \frac{s+2}{(s+2)^2 + 3^2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{(s+2)^2 + 3^2}$$

$$= \frac{e^{-\pi s}}{3} \mathcal{L}\{\sin(3t)\}(s+2) + \frac{e^{-3\pi s}}{3} \mathcal{L}\{\sin(3t)\}(s+2) + \mathcal{L}\{\cos(3t)\}(s+2) + \frac{2}{3} \mathcal{L}\{\sin(3t)\}(s+2)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{e^{-11s}}{3} \mathcal{L}\{e^{-2t} \sin(3t)\}(s) + \frac{e^{-3\pi s}}{3} \mathcal{L}\{e^{-2t} \sin(3t)\}(s) + \mathcal{L}\{e^{-2t} \cos(3t)\}(s) \\
&\quad + \frac{2}{3} \mathcal{L}\{e^{-2t} \sin(3t)\}(s) \\
&= \frac{1}{3} \mathcal{L}\{e^{-2(t-\pi)} \sin(3t-3\pi) \mathcal{U}(t-\pi)\}(s) + \frac{1}{3} \mathcal{L}\{e^{-2(t-3\pi)} \sin(3t-9\pi) \mathcal{U}(t-3\pi)\}(s) \\
&\quad + \mathcal{L}\{e^{-2t} \cos(3t)\}(s) + \frac{2}{3} \mathcal{L}\{e^{-2t} \sin(3t)\}(s) \\
&= -\frac{1}{3} \mathcal{L}\{e^{-2t+2\pi} \sin(3t) \mathcal{U}(t-\pi)\}(s) - \frac{1}{3} \mathcal{L}\{e^{-2t+6\pi} \sin(3t) \mathcal{U}(t-3\pi)\}(s) \\
&\quad + \mathcal{L}\{e^{-2t} \cos(3t)\}(s) + \frac{2}{3} \mathcal{L}\{e^{-2t} \sin(3t)\}(s)
\end{aligned}$$

Llavors la solució del PVI s'obté de l'antitransformada de $Y(s)$; i.e.:

$$\begin{aligned}
y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}(t) &= -\frac{1}{3} \left(\mathcal{U}(t-\pi) + e^{3\pi} \mathcal{U}(t-3\pi) \right) e^{-2t+2\pi} \sin(3t) \\
&\quad + \left(\cos(3t) + \frac{2}{3} \sin(3t) \right) e^{-2t} \quad \square
\end{aligned}$$

25. Resoleu l'equació

$$y'' + 2y' + 2y = \delta(t-3\pi) \cos t, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1$$

Solució.

$$\begin{aligned}
s^2 Y(s) - s y(0) - y'(0) + 2s Y(s) - 2y(0) + 2Y(s) &= (s^2 + 2s + 2) Y(s) - (s+2) y(0) - y'(0) \\
&= \cos(3\pi) e^{-3\pi s} = -e^{-3\pi s}
\end{aligned}$$

on: $\cos(3\pi) e^{-3\pi s} = \mathcal{L}\{\delta(t-3\pi) \cos t\}(s)$. Llavors:

$$\begin{aligned}
Y(s) &= -\frac{e^{-3\pi s}}{s^2 + 2s + 2} + \frac{s+2}{s^2 + 2s + 2} - \frac{1}{s^2 + 2s + 1} = -\frac{e^{-3\pi s}}{(s+1)^2 + 1} + \frac{s+1}{(s+1)^2 + 1} \\
&= -e^{-3\pi s} \mathcal{L}\{\sin t\}_{(s+1)} + \mathcal{L}\{\cos t\}_{(s+1)} \\
&= -e^{-3\pi s} \mathcal{L}\{e^{-t} \sin t\}(s) + \mathcal{L}\{e^{-t} \cos t\}(s) \\
&= -\mathcal{L}\{e^{-(t-3\pi)} \sin(t-3\pi) \mathcal{U}(t-3\pi)\}(s) + \mathcal{L}\{e^{-t} \cos t\}(s).
\end{aligned}$$

Per tant la solució $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}(t)$ del PVI donat, resulta:

$$\boxed{y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}(t) = \left(\cos t + e^{3\pi} \sin t \cdot \mathcal{U}(t-3\pi) \right) e^{-t}} \quad \square$$

26. Feu servir la transformada de Laplace per resoldre les equacions integrals següents:

$$(a) f(t) + 2 \int_0^t f(\tau) \cos(t-\tau) d\tau = 4e^{-t} + \sin t$$

$$(b) t - 2f(t) = \int_0^t (e^{\tau} - e^{-\tau}) f(t-\tau) d\tau$$

Solució

(a) Apliquem la TL a totes dues bandes tenint en compte que $\int_0^t f(\tau) \cos(t-\tau) d\tau = (f * \cos)(t)$:

$$F(s) + \frac{2sF(s)}{s^2+1} = \frac{4}{s+1} + \frac{1}{s^2+1}, \text{ on } F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s)$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow F(s) &= \frac{4(s^2+1)}{(s+1)^3} + \frac{1}{(s+1)^2} = 4 \frac{s^2+2s+1}{(s+1)^3} - \frac{8s}{(s+1)^3} + \frac{1}{(s+1)^2} \\ &= \frac{4}{s+1} - 8 \frac{s+1}{(s+1)^3} + \frac{8}{(s+1)^3} + \frac{1}{(s+1)^2} \\ &= \frac{4}{s+1} - \frac{7}{(s+1)^2} + \frac{8}{(s+1)^3} = 4 \mathcal{L}\{e^{-t}\}(s) - 7 \mathcal{L}\{t\}(s) + 4 \mathcal{L}\{t^2\}(s) \\ &= 4 \mathcal{L}\{e^{-t}\}(s) - 7 \mathcal{L}\{e^{-t}t\}(s) + 4 \mathcal{L}\{e^{-t}t^2\}(s). \end{aligned}$$

Llavors la solució de l'equació integral s'obté com l'antitransformada de $F(s)$,

ie:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(t) = \boxed{(4 - 7t + 4t^2)e^{-t}}$$

(b) Idènticament: apliquem la TL a tots dos termes tenint ara en compte que $\int_0^t (e^{\tau} - e^{-\tau}) f(t-\tau) d\tau = 2 \int_0^t \sinh \tau f(t-\tau) d\tau = 2 (\sinh * f)(t)$, on demostrem per $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s)$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{s^2} - 2F(s) &= \frac{2F(s)}{s^2-1} \Leftrightarrow \frac{2s^2}{s^2-1} F(s) = \frac{1}{s^2} \Leftrightarrow F(s) = \frac{s^2-1}{2s^4} = \frac{1}{2s^2} - \frac{1}{2s^4} \\ &= \frac{1}{2} \mathcal{L}\{t\}(s) - \frac{1}{12} \mathcal{L}\{t^3\}(s) \end{aligned}$$

i la solució de l'equació integral s'obté com l'antitransformada de $F(s)$, i.e.:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(t) = \boxed{\frac{t}{2} - \frac{t^3}{12}} \quad \square$$

27. Resolou, fent servir la transformada de Laplace, el problema de Cauchy $ty'' - y' = -t^2$, $y(0) = 0$. Remarca: noteu que, en aquest cas, no cal conèixer $y'(0)$.

Solució.

$$\mathcal{L}\{ty''\}(s) = -\frac{d}{ds} \mathcal{L}\{y''\}(s) = -\frac{d}{ds} (s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0)) = -2sY(s) - s^2 Y'(s) + y(0),$$

on posem $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}(s)$. Llavors:

$$-2sY(s) - s^2 Y'(s) + y(0) - sY(s) + y'(0) = -s^2 Y'(s) - 3sY(s) + 2y'(0) = \frac{2}{s^3}$$

Hem de resoldre doncs una EDO lineal de 1^{er} ordre en $Y(s)$: $+s^2 Y'(s) + 3sY(s) = -\frac{2}{s^3}$.

- Solució general de l'EDO homogènia associada ($s^2 Y'(s) + 3sY(s) = 0$), $Y_h(s) = \frac{C}{s^3}$, $C \in \mathbb{R}$ cnt.
- Es comprova que una solució particular de l'EDO lineal no homogènia, $Y_p(s)$ ve donada per: $Y_p(s) = \frac{2}{s^4}$

Aleshores la solució general de l'EDO lineal no homogènia resulta:

$$Y(s) = \frac{C}{s^3} + \frac{2}{s^4}, \text{ amb } C \in \mathbb{R} \text{ cnt.}$$

i la solució del PVI l'obtenim com l'antitransformada de $Y(s)$. Així:

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}(t) = C \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3}\right\}(t) + 2 \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^4}\right\}(t) \\ &= \frac{C}{2} t^2 + \frac{1}{3} t^3 = \boxed{K t^2 + \frac{t^3}{3}}, \quad K \in \mathbb{R} \text{ cnt.}, \end{aligned}$$

on hem posat $K = \frac{C}{2}$ i per tant $K \in \mathbb{R}$ constant arbitrària. \square

28. Consideren l'equació integro-diferencial:

$$y'(x) + \int_0^x y(x-t) e^{-2t} dt = 0, \quad y(0) = 1$$

(a) Derivant ambdós membres, deduiu l'equació diferencial ordinària de segon ordre que verifica la seva solució. Preuen-me les condicions inicials que determinem.

(B) Alternativament, apliqueu directament la transformada de Laplace a les condicions inicials que la determinem.

Solució

(a) $y(0) = 1, y'(0) + \int_0^0 \dots = 0 \Leftrightarrow y'(0) = 0$. Llavors, c.i.: $y(0) = 1$
 $y'(0) = 0$

Derivant l'equació integro-diferencial:

$$y''(x) + y(0) e^{-2x} + \int_0^x y'(x-t) e^{-2t} dt =$$

$$= y''(x) + y(0) e^{-2x} - y(x-t) e^{-2t} \Big|_{t=0}^{t=x} - 2 \int_0^x y(x-t) e^{-2t} dt$$

$$= y''(x) + y(0) e^{-2x} - y(0) e^{-2x} + y(x) + 2y'(x) = y''(x) + 2y'(x) + y(x) = 0$$

Rem. A partir de l'eq. integro-diferencial tenim que:

$$\int_0^x y(x-t) e^{-2t} dt = -y'(x)$$

Ara, aplicant la TL a l'EDO de 2^{on} ordre obtinguda, tenim:

$$\begin{aligned} s^2 Y(s) - s y(0) - y'(0) + 2s Y(s) - 2y(0) + Y(s) &= \\ = (s^2 + 2s + 1) Y(s) - (s+2) y(0) - y'(0) &= (s+1)^2 Y(s) - (s+2) \cdot 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

en hem posat $Y(s) = \mathcal{L}\{y(x)\}(s)$ i hem aplicat les condicions inicials $y(0) = 1$ i $y'(0) = 0$.

Aïllant $Y(s)$:

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{s+2}{(s+1)^2} = \frac{s+1}{(s+1)^2} + \frac{1}{(s+1)^2} = \frac{1}{(s+1)^2} + \frac{1}{s+1} = \mathcal{L}\{x\}(s+1) + \mathcal{L}\{e^{-x}\}(s) \\ &= \mathcal{L}\{x e^{-x}\}(s) + \mathcal{L}\{e^{-x}\}(s) \end{aligned}$$

Aleshores, la solució de l'EDO -i de l'equació integro-diferencial- buscada l'obtidrem prenent la TL inversa, i.e.:

$$y(x) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}(x) = (1+x)e^{-x}$$

(b) Alternativament, aplicant la TL a totes dues bandes de l'equació integro-diferencial, tot tenint en compte que $\int_0^x y(x-t)e^{-2t} dt = (\exp(-2 \cdot) * y)(x)$, resulta:

$$sY(s) - y(0) + \frac{Y(s)}{s+2} = \left(s + \frac{1}{s+2}\right) Y(s) - y(0) = \frac{s^2+2s+1}{s+2} Y(s) - 1 = 0,$$

$$\text{d'on: } Y(s) = \frac{s+2}{(s+1)^2} = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{(s+1)^2} = \mathcal{L}\{e^{-x}\}(s) + \mathcal{L}\{xe^{-x}\}(s) \quad (\text{com abans})$$

I, aplicant la TL com abans, resulta la solució buscada:

$$y(x) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}(x) = e^{-x} + xe^{-x} = (1+x)e^{-x} \quad \square$$

29. (a) Trobeu la sèrie de Fourier de la funció $f(x) = x + \pi$ a l'interval $-\pi < x < \pi$.

(b) Useu (a) per demostrar que

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

◁ **Solució.** (a) Calculem primer els coeficients del desenvolupament.

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (x + \pi) dx = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} x dx + \pi \int_{-\pi}^{\pi} dx \right) = 2\pi,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos nx dx + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \pi \cos nx dx = 0,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{x}{n} d(-\cos nx) = \frac{2}{\pi} \left[-\frac{x}{n} \cos nx \right]_0^{\pi} + \frac{2}{n\pi} \int_0^{\pi} \cos nx dx = -\frac{2}{n}(-1)^n,$$

per $n = 1, 2, 3, \dots$ on s'ha tingut en compte que x i $x \cos nx$ són funcions senars i per tant,

$$\int_{-\pi}^{\pi} x dx = \int_{-\pi}^{\pi} x \cos nx dx = 0.$$

El desenvolupament de Fourier de la funció $f(x)$ resulta doncs:

$$\mathcal{F}[f](x) = \pi + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx,$$

i pel que fa a la convergència, aplicant el teorema de Dirichlet tenim d'una banda:

$$\mathcal{F}[f](x) = x + \pi, \tag{1}$$

per tot $-\pi < x < \pi$, mentre que de l'altra:

$$\mathcal{F}[f](\pi) = \mathcal{F}[f](-\pi) = \frac{1}{2} (f(-\pi^+) + f(\pi^-)) = \frac{1}{2} (0 + 2\pi) = \pi.$$

(b) $x = -\pi/2$ és un punt de continuïtat de la funció $f(x) = x + \pi$ a l'interval $-\pi < x < \pi$. Aleshores, segons (1) és $\mathcal{F}[f](-\pi/2) = -\pi/2 + \pi = \pi/2$. Per tant, substituïnt a (1):

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f]\left(-\frac{\pi}{2}\right) &= \pi + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin \frac{n\pi}{2} = \pi + 2 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2p+1}}{2p-1} \sin \frac{(2p-1)\pi}{2} \\ &= \pi + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^p}{2p-1} = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

on a la segona igualtat hem fet servir que $\sin \frac{n\pi}{2} = 0$, si n és parell i quan n és senar, posem: $n = 2p - 1$ per $p = 1, 2, 3, \dots$ d'on, clarament, $\sin \frac{(2p-1)\pi}{2} = (-1)^{p+1}$. A partir d'això, es dedueix d'immediat:

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{2p-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

que és el que es volia provar. ▷

30. (a) Trobeu la sèrie de Fourier de

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{per } -\pi < x < 0, \\ x^2, & \text{per } 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$

(b) Useu (a) per demostrar que

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots, \quad \text{i que} \quad \frac{\pi^2}{12} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots$$

(c) Useu (b) per trobar una sèrie numèrica tal que la seva suma sigui $\frac{\pi^2}{8}$.

◁ **Solució.** (a) Com al problema anterior comencem calculant els coeficients de Fourier

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 0 \cdot dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{\pi^2}{3}; \\
 a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 0 \cdot \cos nx dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos nx dx \stackrel{\text{parts}}{=} \frac{1}{\pi} \underbrace{\left[\frac{x^2}{n} \sin nx \right]_0^{\pi}}_{=0} - \frac{2}{n\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx dx \\
 &\stackrel{\text{parts}}{=} \left[\frac{2x}{n^2\pi} \cos nx \right]_0^{\pi} - \frac{2}{n^2\pi} \underbrace{\int_0^{\pi} \cos nx dx}_{=0} = \frac{2}{n^2} (-1)^n, \\
 b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 0 \sin nx dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \sin nx dx \\
 &\stackrel{\text{parts}}{=} \frac{1}{\pi} \left[-\frac{x^2}{n} \cos nx \right]_0^{\pi} + \frac{2}{n\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{n} + \frac{2}{n^2\pi} \int_0^{\pi} x d(\sin nx) \\
 &\stackrel{\text{parts}}{=} \frac{\pi}{n} (-1)^{n+1} + \underbrace{\left[\frac{2x}{n^2\pi} \sin nx \right]_0^{\pi}}_{=0} - \frac{2}{n^3\pi} \int_0^{\pi} \sin nx dx = \frac{\pi}{n} (-1)^{n+1} + \frac{2}{n^2\pi} [\cos nx]_0^{\pi} \\
 &= \frac{\pi}{n} (-1)^{n+1} + \frac{2}{n^3\pi} ((-1)^n - 1) = \begin{cases} -\frac{\pi}{n}, & n = 2 \text{ (i. e., si } n \text{ parell)}, \\ \frac{\pi}{n} - \frac{4}{n^3\pi}, & n \neq 2 \text{ (i. e., si } n \text{ senar)}, \end{cases}
 \end{aligned}$$

per $n = 1, 2, 3, \dots$

REMARCA 3.1 (notació). A la literatura, sovint apareix: $p = m$ per denotar “ p és múltiple de m ”. Llavors per establir que $n \in \mathbb{N}$ és parell (és múltiple de 2) o senar (no és múltiple de 2) posarem $n = 2$ ó $n \neq 2$ respectivament.

Un cop calculat els coeficients, la sèrie de Fourier es pot escriure de la manera següent,

$$\mathcal{F}[f](x) = \frac{\pi^2}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2} (-1)^n \cos nx - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{2n} \sin 2nx + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\pi}{2n+1} - \frac{4}{(2n+1)^3\pi} \right) \sin(2n+1)x$$

i pel teorema de Dirichlet es té:

$$\mathcal{F}[f](x) = f(x), \quad -\pi < x < \pi; \tag{2}$$

$$\mathcal{F}[f](\pi) = \mathcal{F}[f](-\pi) = \frac{1}{2} (f(-\pi^+) + f(+\pi^-)) = \frac{1}{2} (0 + \pi^2) = \frac{\pi^2}{2}. \tag{3}$$

(b) $x = 0$ és un punt de continuïtat de la funció. Llavors, d'acord amb (2) és $\mathcal{F}[f](0) = 0$. Sabent això, substituïm $x = 0$ a la sèrie de Fourier trobada a l'apartat (a), amb la qual cosa:

$$\mathcal{F}[f](0) = \frac{\pi^2}{6} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = 0 \implies \frac{\pi^2}{12} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots \tag{4}$$

De la mateixa manera, per $x = \pi$, substituïm com abans a la sèrie i ara tenim en compte (3). Amb això s'obté:

$$\mathcal{F}[f](\pi) = \frac{\pi^2}{6} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{2} \implies \frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots \tag{5}$$

(c) Sumant (4) i (5):

$$\frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi^2}{12} + \frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} + 1}{n^2} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$$

d'on finalment:

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots \triangleright$$

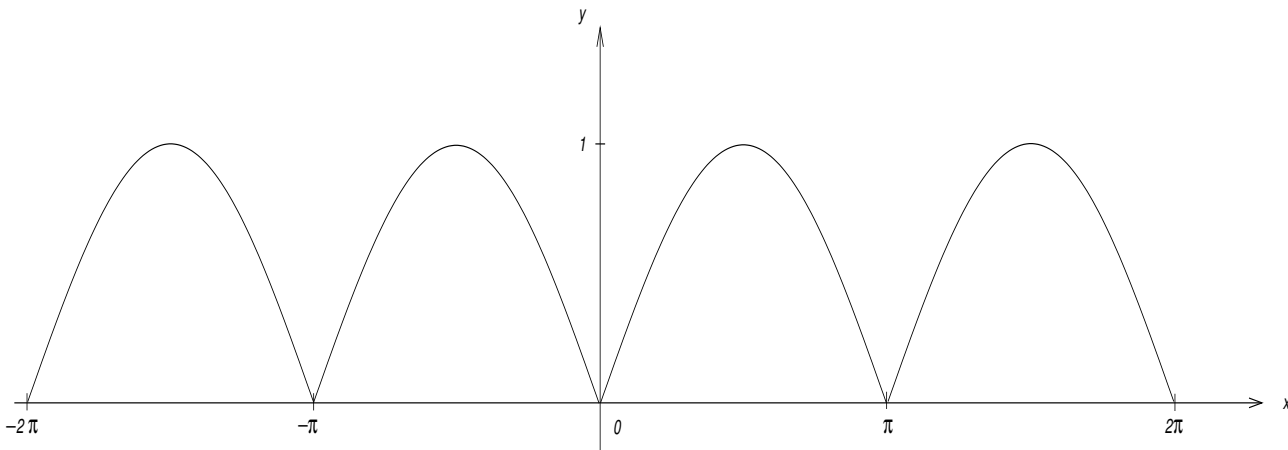


Figura 1. Representació gràfica de la funció $f(x) = |\sin x|$ (problema 32).

31. (a) Trobeu la sèrie de Fourier de

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } -\pi < x < 0 \\ x, & \text{si } 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

a l'interval $-\pi < x < \pi$.

(b) On convergeix la sèrie trobada en (a) quan $x = \frac{7\pi}{2}$? I quan $x = 401\pi$?

◁ **Solució.** (a) Calculem els coeficients de la sèrie,

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 0 \, dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \, dx = \frac{\pi}{2};$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 0 \cdot \cos nx \, dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi} \underbrace{\left[\frac{x}{n} \sin nx \right]_0^{\pi}}_{=0} - \frac{1}{n\pi} \int_0^{\pi} \sin nx \, dx = \left[\frac{\cos nx}{n^2\pi} \right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{n^2\pi} ((-1)^n - 1) = \begin{cases} 0, & n = 2 \\ -\frac{2}{n^2\pi}, & n \neq 2 \end{cases}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 0 \cdot \sin nx \, dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx \, dx = \frac{1}{\pi} \left[-\frac{x}{n} \cos nx \right]_0^{\pi} + \frac{1}{\pi} \underbrace{\int_0^{\pi} \cos nx \, dx}_{=0} = \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Amb aquests coeficients es té la sèrie de Fourier:

$$\mathcal{F}[f](x) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos(2n-1)x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx, \quad (6)$$

mentre que pel teorema de Dirichlet,

$$\mathcal{F}[f](x) = f(x), \quad -\pi < x < \pi; \quad \mathcal{F}[f](\pm\pi) = \frac{1}{2} (f(-\pi^+) + f(\pi^-)) = \frac{1}{2}(0 + \pi) = \frac{\pi}{2}. \quad (7)$$

(c) La sèrie de Fourier, $\mathcal{F}[f](x)$ donada per (6) és 2π -periòdica i tenint en compte (7):

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f](401\pi) &= \mathcal{F}[f](200 \times (2\pi) + \pi) = \mathcal{F}[f](\pi) = \frac{\pi}{2}, \\ \mathcal{F}[f]\left(\frac{7\pi}{2}\right) &= \mathcal{F}[f]\left(4\pi - \frac{\pi}{2}\right) = \mathcal{F}[f]\left(-\frac{\pi}{2}\right) = f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0, \end{aligned}$$

ja que π és un punt de l'extrem de l'interval però en canvi $-\frac{\pi}{2} \in (-\pi, \pi)$ i la funció és contínua a l'interval. ▷

32. Trobeu, si es que existeix, una sèrie de Fourier que convergeix cap a $|\sin x|$ per a tot $x \in \mathbb{R}$.

◁ **Solució.** La funció $f(x) = |\sin x|$ és parella (figura 1) i per tant els coeficients dels termes en sinus de la sèrie són tots zero, i. e.: $b_n = 0, n = 1, 2, 3, \dots$

Aleshores tindrem una sèrie en cosinus amb:

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin nx \, dx = \frac{4}{\pi}, \quad a_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin x \cos x \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin 2x \, dx = 0;$$

i per $\mathbb{N} \ni n > 1$:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin x \cos nx \, dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\sin(n+1)x - \sin(n-1)x) \, dx = -\frac{1}{\pi} \left[\frac{\cos(n+1)x}{n+1} - \frac{\cos(n-1)x}{n-1} \right]_0^\pi \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{n+1} (1 + (-1)^n) - \frac{1}{n-1} (1 + (-1)^n) \right] = \frac{-2}{(n^2-1)\pi} (1 + (-1)^n) = \begin{cases} \frac{-4}{(n^2-1)\pi}, & n = 2, \\ 0, & n \neq 2. \end{cases} \end{aligned}$$

REMARCA 3.2. A la segona igualtat hem aplicat la identitat trigonomètrica:

$$\cos a \sin b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) - \sin(a-b)]$$

La corresponent sèrie de Fourier ve donada doncs per:

$$\mathcal{F}[f](x) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{4n^2 - 1}$$

i com que $f(x) = |\sin x| \in CT[-\pi, \pi]$ (de fet $f \in C^0(\mathbb{R})$) i $f' \in CT[-\pi, \pi]$, pel teorema de convergència (Dirichlet): $\mathcal{F}[f](x) = |\sin x|$ per $-\pi < x < \pi$ i $\mathcal{F}[f](\pi) = \mathcal{F}[f](-\pi) = \frac{1}{2}(f(-\pi^+) + f(+\pi^-)) = \frac{1}{2}(0+0) = 0$ als extrems (notem que $f(x) = |\sin x|$ és contínua en \mathbb{R} i $|\sin(\pm\pi)| = 0$). D'altra banda $f(x) = |\sin x|$ és π -periòdica (en particular també 2π -periòdica). Llavors es té:

$$\mathcal{F}[f](x) = |\sin x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{4n^2 - 1},$$

per tot $x \in \mathbb{R}$. ▷

33. Trobeu la sèrie de Fourier de la funció

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } \frac{\pi}{2} \leq |x| \leq \pi \\ \cos x, & \text{si } |x| < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

◁ **Solució.** Com al problema anterior, la funció $f(x)$ (veure figura 2) és parella, per tant els coeficients dels termes en sinus seran tots zero, i. e.: $b_n = 0$ per $n = 1, 2, 3, \dots$. Així, només ens caldrà calcular el terme independent, a_0 , i els coeficients dels termes en cosinus $a_n, n = 1, 2, 3, \dots$. Tanmateix recordem que, debut a la simetria parella, tan sols s'ha d'integrar sobre la meitat de l'interval (multiplicant després per 2, es clar!). Així, d'acord amb les fórmules deduïdes a la teoria:

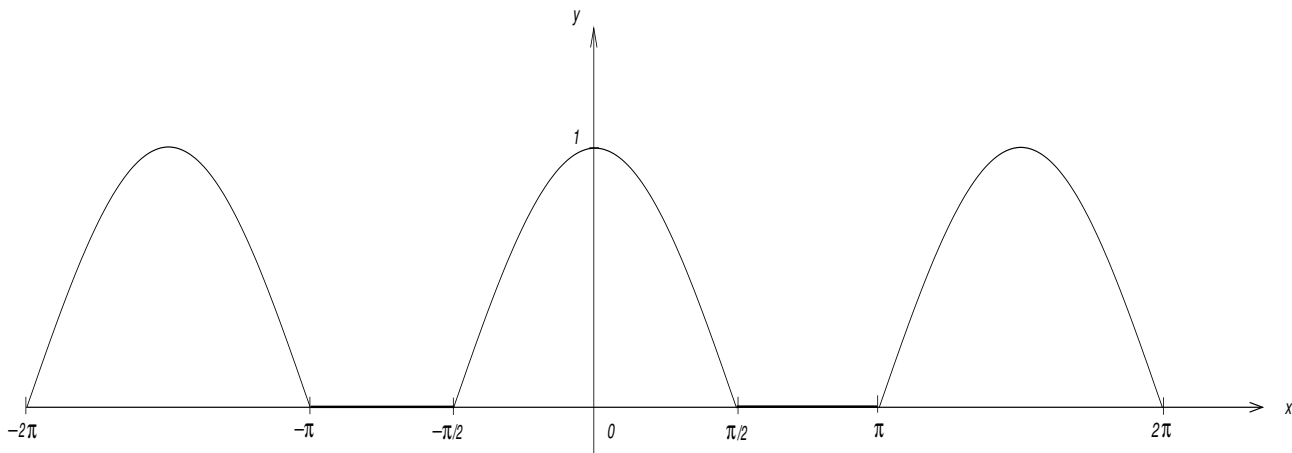


Figura 2. Representació gràfica de l'extensió 2π -periòdica de la funció $f(x)$ definida a l'interval $[-\pi, \pi]$ segons: $f(x) = \cos x$, per $|x| < \frac{\pi}{2}$ i $f(x) = 0$, per $\frac{\pi}{2} < |x| < \pi$ (problema 33).

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos x \, dx = \frac{2}{\pi} \times \frac{\pi}{4} = \frac{2}{\pi}, \\
 a_1 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos^2 x \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos 2x}{2} \, dx = \frac{2}{\pi} \left[\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} \right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}; \\
 a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos x \cos nx \, dx \stackrel{(*)}{=} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} (\cos(n+1)x + \cos(n-1)x) \, dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin(n+1)x}{n+1} + \frac{\sin(n-1)x}{n-1} \right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin\left(\frac{n}{2}\pi + \frac{\pi}{2}\right)}{n+1} + \frac{\sin\left(\frac{n}{2}\pi - \frac{\pi}{2}\right)}{n-1} \right] \\
 &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\cos \frac{n\pi}{2}}{n+1} - \frac{\cos \frac{n\pi}{2}}{n-1} \right] = \begin{cases} 0, & n \neq 2, \\ \frac{2(-1)^{1+n/2}}{\pi(n^2-1)}, & n = 2. \end{cases} \quad \text{per } n = 2, 3, 4, \dots
 \end{aligned} \tag{8}$$

Finalment,

$$\mathcal{F}[f](x) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \cos x + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1} \cos 2nx$$

és la sèrie de Fourier buscada. \triangleright

REMARCA 3.3. En calcular els coeficients a (8) s'ha tingut en compte, a més de la simetria parella ja comentada de la funció, el fet que aquesta és idènticament zero a $[\pi/2, \pi]$, és per això que només s'integra a l'interval $[0, \pi/2]$.

34. Sigui $f(x)$ contínua a $(-L, L)$ i siguin a_n i b_n els seus coeficients de Fourier.

(a) Proveu que si $S_M(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^M \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right)$, aleshores

$$\int_{-L}^L f(x) S_M(x) \, dx = L \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^M (a_n^2 + b_n^2) \right).$$

(b) Proveu que $\int_{-L}^L S_M^2(x) \, dx = L \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^M (a_n^2 + b_n^2) \right)$.

(*) Hem utilitzat la identitat trigonomètrica: $\cos a \cos b = \frac{1}{2} (\cos(a+b) + \cos(a-b))$, prenent $a = nx$ i $b = x$.

(c) Proveu que $2 \int_{-L}^L f(x)S_M(x) dx - \int_{-L}^L S_M^2(x) dx \leq \int_{-L}^L (f(x))^2 dx$.

(d) Fent servir els apartats anteriors proveu la anomenada “desigualtat de Bessel”:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{L} \int_{-L}^L (f(x))^2 dx.$$

◁ **Solució.** Considerem el producte:

$$\langle f, g \rangle = \int_{-L}^L f(x)g(x) dx \quad \text{amb} \quad f, g \in CT[-L, L]. \quad (9)$$

Aquest és un producte escalar (amb les propietats habituals: simetria, bilinealitat,...)¹. Agafem:

$$\left. \begin{aligned} \psi_0(x) &= \frac{1}{2}, & \psi_{2n-1}(x) &= \sin \frac{n\pi x}{L}, & \psi_{2n}(x) &= \cos \frac{n\pi x}{L}, \\ c_0 = a_0 &= \frac{\langle \psi_0, f \rangle}{\langle \psi_0, \psi_0 \rangle}, & c_{2n-1} = b_n &= \frac{\langle \psi_{2n-1}, f \rangle}{\langle \psi_{2n-1}, \psi_{2n-1} \rangle}, & c_{2n} = a_n &= \frac{\langle \psi_{2n}, f \rangle}{\langle \psi_{2n}, \psi_{2n} \rangle}, \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

per $n = 1, 2, 3, \dots, M$. A més, sabem de la teoria que $\{\psi_i\}_{i=0,1,2,\dots,2M}$ formen una família de $2M + 1$ funcions ortogonals respecte del producte (9). En particular:

$$\langle \psi_n, \psi_m \rangle = \begin{cases} 0, & \text{si } n \neq m, \\ L/2, & \text{si } n = m = 0, \\ L, & \text{si } m \geq 1. \end{cases} \quad (11)$$

REMARCA 3.4. Sigui $S(x)$ la sèrie de Fourier de f , i. e., $S(x) = \lim_{M \rightarrow \infty} S_M(x)$. Llavors, amb la notació (10) pels coeficients i per les funcions, el polinomi trigonomètric, $S_M(x)$, i la sèrie, $S(x)$, es poden escriure de manera més “compacta” com:

$$S_M(x) = \sum_{n=0}^M c_n \psi_n(x), \quad S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \psi_n(x).$$

Això i l’ortogonalitat de la família de funcions (segons (11)), permet —com es veurà d’immediat—, simplificar enormement els càlculs.

Aleshores:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \langle f, S_M \rangle &= \int_{-L}^L f(x)S_M(x) dx = \left\langle f, \sum_{n=0}^{2M} c_n \psi_n \right\rangle = \sum_{n=0}^{2M} c_n \langle f, \psi_n \rangle = \sum_{n=0}^{2M} c_n^2 \langle \psi_n, \psi_n \rangle \\ &= L \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^M (a_n^2 + b_n^2) \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad \langle S_M, S_M \rangle &= \int_{-L}^L (S_M(x))^2 dx = \langle S_M, S_M \rangle = \left\langle \sum_{n=0}^{2M} c_n \psi_n, \sum_{m=0}^{2M} c_m \psi_m \right\rangle = \\ &= \sum_{m,n=0}^{2M} c_n c_m \langle \psi_n, \psi_m \rangle \stackrel{(11)}{=} \sum_{n=0}^{2M} c_n^2 \langle \psi_n, \psi_n \rangle = L \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^M (a_n^2 + b_n^2) \right). \end{aligned}$$

(c) $0 \leq \langle f - S_M, f - S_M \rangle = \langle f, f \rangle - 2\langle f, S_M \rangle + \langle S_M, S_M \rangle \Rightarrow 2\langle f, S_M \rangle - \langle S_M, S_M \rangle \leq \langle f, f \rangle$, que és la desigualtat que es volia demostrar.

¹En canvi però, no és definit positiu: si $f \in CT[-T, T]$, $\langle f, f \rangle = 0 \not\Rightarrow f \equiv 0$. De fet es diu que és “gairebé” definit positiu: si $\langle f, f \rangle = 0$ amb $f \in CT[-T, T]$, podem assegurar que f val zero en tots els punts de l’interval $[-T, T]$ llevat, com a màxim, en un nombre finit.

(d) $\int_{-L}^L (f(x))^2 dx = \langle f, f \rangle \stackrel{(c)}{\geq} 2\langle f, S_M \rangle - \langle S_M, S_M \rangle \stackrel{(a),(b)}{=} L \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^M (a_n^2 + b_n^2) \right)$; dividint per $L (> 0)$ i prenent límit quan $M \rightarrow \infty$ a totes dues bandes, s'obté:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{L} \int_{-L}^L (f(x))^2 dx$$

(desigualtat de Bessel). \triangleright

35. Desenvolueu la funció

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{per } -1 < x < 0 \\ x - 1, & \text{per } 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

en sèrie de sinus o cosinus segons convingui.

\triangleleft **Solució.** Com que f és una funció senar (vegeu figura 3), li correspondrà un desenvolupament en sèrie de sinus del tipus $\mathcal{F}[f](x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x$, amb els coeficients

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{1} \int_{-1}^1 f(x) \sin n\pi x dx = 2 \int_0^1 f(x) \sin n\pi x dx = 2 \int_0^1 (x - 1) \sin n\pi x dx \\ &= -\frac{2}{n\pi} \int_0^1 (x - 1) d(\cos n\pi x) \stackrel{(\text{parts})}{=} -2 \left[(x - 1) \frac{\cos n\pi x}{n\pi} \right]_0^1 + \frac{2}{n\pi} \int_0^1 \cos n\pi x dx = -\frac{2}{n\pi}, \end{aligned}$$

ja que, obviament:

$$\left[(x - 1) \frac{\cos n\pi x}{n\pi} \right]_0^1 = \frac{1}{n\pi}, \quad \int_0^1 \cos n\pi x dx = 0.$$

Per tant:

$$\mathcal{F}[f](x) = -\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\pi x}{n}.$$

Quant a la convergència a l'interval $[-1, 1]$ tenim, pel teorema de Dirichlet:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f](x) &= x + 1, & \text{per } -1 < x < 0, \\ \mathcal{F}[f](x) &= x - 1, & \text{per } 0 < x < 1, \\ \mathcal{F}[f](0) &= \frac{1}{2} (f(0^+) + f(0^-)) = \frac{1}{2}(-1 + 1) = 0, & \text{per } x = 0, \\ \mathcal{F}[f](1) &= \mathcal{F}[f](-1) = \frac{1}{2} (f(-1^+) + f(+1^-)) = \frac{1}{2}(0 + 0) = 0, & \text{per } x = \pm 1. \triangleright \end{aligned}$$

36. Desenvolueu la funció

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } 0 < x < 1/2 \\ 1 & \text{per } 1/2 \leq x < 1 \end{cases}$$

en sèrie de cosinus en mig interval i en sèrie de sinus en mig interval.

\triangleleft **Solució.** Primer trobarem la sèrie de cosinus. Llavors considerarem l'extensió parella, $f_p(x)$, de la funció:

$$f_p(x) = \begin{cases} f(x), & 0 \leq x < 1, \\ f(-x), & -1 < x < 0. \end{cases}$$

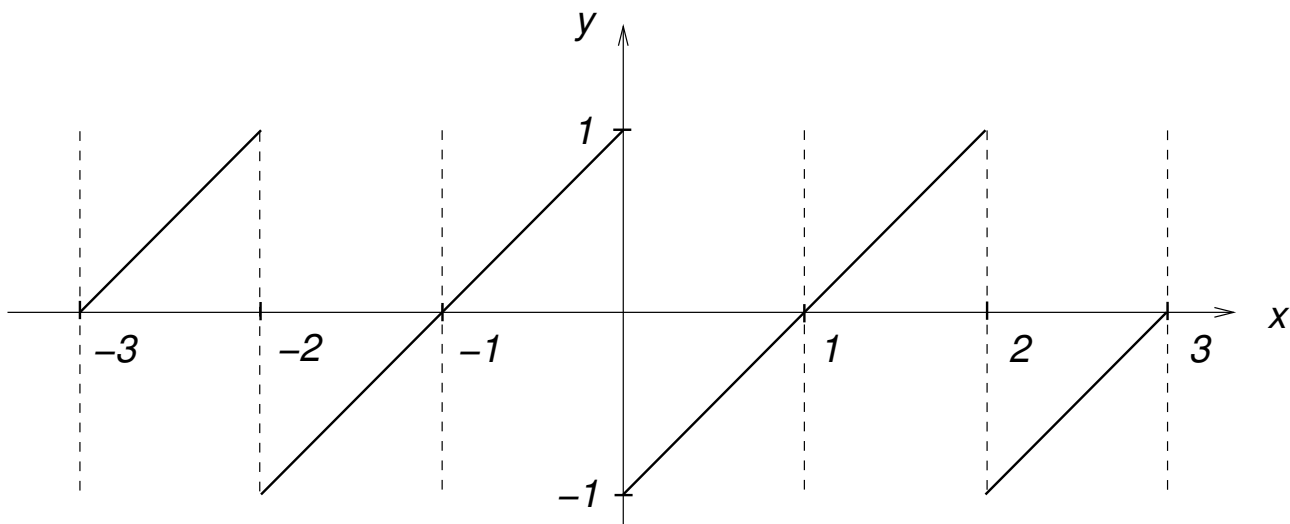


Figura 3. Extensió 2-periòdica de la funció $f(x) = x + 1$, per $-1 < x < 0$ i $f(x) = x - 1$, per $0 \leq x < 1$, donada al problema 35.

i sabent (per la simetria parella) que els coeficients dels termes en sinus de $f_p(x)$ són zero (i. e., $b_n = 0$ per tot $n \in \mathbb{N}$), calcularem els coeficients del terme independent i dels termes en cosinus:

$$a_0 = \frac{1}{1} \int_{-1}^1 f_p(x) dx = 2 \int_0^1 f(x) dx = 2 \int_0^{1/2} 0 \cdot dx + 2 \int_{1/2}^1 1 \cdot dx = 1;$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{1} \int_{-1}^1 f_p(x) \cos n\pi x dx = 2 \int_0^1 f(x) \cos n\pi x dx = 2 \int_0^{1/2} 0 \cdot \cos n\pi x dx + 2 \int_{1/2}^1 1 \cdot \cos n\pi x dx \\ &= 2 \left[\frac{\sin n\pi x}{n\pi} \right]_{1/2}^1 = -\frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} = \begin{cases} \frac{2}{n\pi} (-1)^{\frac{n+1}{2}}, & n \neq 2, \\ 0, & n = 2, \end{cases} \end{aligned}$$

per $n = 1, 2, 3, \dots$. La sèrie en cosinus de la funció és doncs:

$$\mathcal{F}[f_p](x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{(2n-1)\pi} \cos(2n-1)\pi x.$$

A continuació, per trobar la sèrie en sinus s'ha de construir l'extensió senar de la funció que, de manera genèrica, ve donada per

$$f_s(x) = \begin{cases} f(x), & 0 \leq x < 1, \\ -f(-x), & -1 < x < 0. \end{cases}$$

En aquest cas sabem —debut a la obvia simetria imparella de $f_s(x)$ —, que són zero els coeficients del terme independent i dels termes en cosinus. Així només s'han de calcular els coeficients dels termes en sinus. Explícitament:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{1} \int_{-1}^1 f_s(x) \sin n\pi x dx = 2 \int_0^1 f(x) \sin n\pi x dx = 2 \int_0^{1/2} 0 \cdot \sin n\pi x dx + 2 \int_{1/2}^1 1 \cdot \sin n\pi x dx \\ &= -2 \left[\frac{\cos n\pi x}{n\pi} \right]_{1/2}^1 - \frac{2}{n\pi} \left((-1)^n - \cos \frac{n\pi}{2} \right) = \begin{cases} \frac{2}{n\pi}, & n \neq 2, \\ \frac{2}{n\pi} \left((-1)^{n/2} - 1 \right), & n = 2, \end{cases} \end{aligned}$$

per $n = 1, 2, 3, \dots$

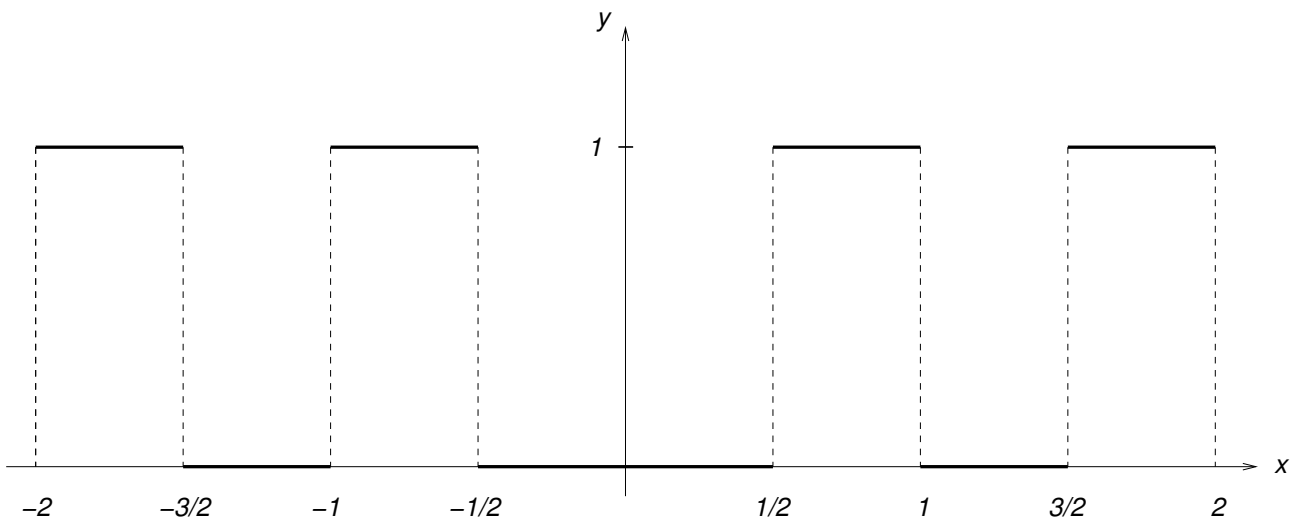


Figura 4. Extensió parella de la funció $f(x) = 0$, per $0 < x < 1/2$ i $f(x) = 1$, per $1/2 \leq x < 1$, donada al problema 36

Aleshores la sèrie de Fourier en sinus es podrà escriure de la manera següent:

$$\mathcal{F}[f_s](x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)\pi x}{2n-1} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2(2n-1)\pi x}{2n-1}.$$

A la figura 4 es representem l'extensió parella de la funció de l'eneunciat. Deixem al lector la representació gràfica de l'extensió senar. \triangleright

37. Desenvolpeu la funció $f(x) = x^2$, $0 < x < \ell$

- (a) En sèrie de cosinus.
- (b) En sèrie de sinus.
- (c) En sèrie de Fourier.

\triangleleft **Solució.** (a) Considerem l'extensió parella de la funció donada:

$$f_p(x) = \begin{cases} f(x) = x^2, & 0 \leq x < \ell, \\ f(-x) = x^2, & -\ell \leq x < 0 \end{cases} \quad (12)$$

i trobem els coeficients del desenvolupament en sèrie de Fourier de $f_p(x)$ a l'interval $(-\ell, \ell)$. Com que –evidentment–, $f_p(x)$ és una funció parella, tindrem $b_n = 0$ per tot $n = 1, 2, 3, \dots$ (i. e., els coeficients dels termes en sinus seran tots zero). Fem doncs els càlculs pels coeficients del terme independent i dels termes en cosinus:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f_p(x) \, dx = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \, dx = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} x^2 \, dx = \frac{2}{\ell} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{\ell} = \frac{2}{3} \ell^2, \\ a_n &= \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f_p(x) \cos \frac{n\pi x}{\ell} \, dx = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} x^2 \cos \frac{n\pi x}{\ell} \, dx = \frac{2}{n\pi} \int_0^{\ell} x^2 \, d \left(\sin \frac{n\pi x}{\ell} \right) = \frac{2}{n\pi} \underbrace{\left[x^2 \sin \frac{n\pi x}{\ell} \right]_0^{\ell}}_{=0} \\ &\quad + \frac{4\ell}{n^2\pi^2} \int_0^{\ell} x \, d \left(\cos \frac{n\pi x}{\ell} \right) = \frac{4\ell}{n^2\pi^2} \left[x \cos \frac{n\pi x}{\ell} \right]_0^{\ell} - \frac{4\ell}{n^2\pi^2} \underbrace{\int_0^{\ell} \cos \frac{n\pi x}{\ell} \, dx}_{=0} = \frac{4\ell^2}{n^2\pi^2} (-1)^n \end{aligned}$$

per $n = 1, 2, 3, \dots$

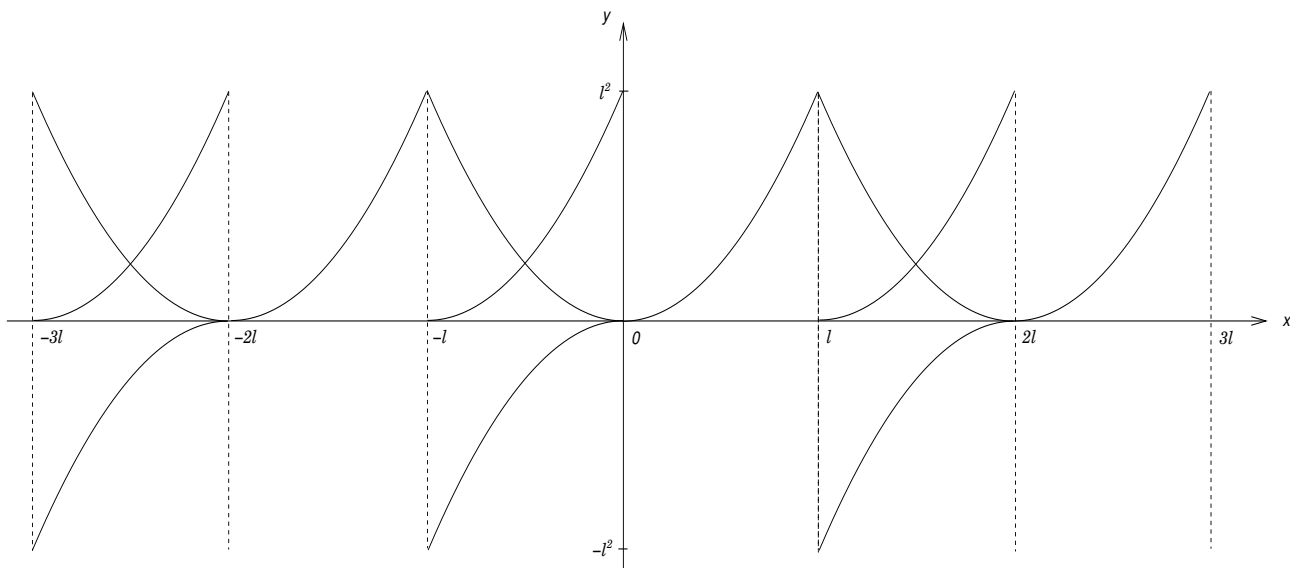


Figura 5. A partir de $f(x) = x^2$, definida a l'interval $0 < x < \ell$, es representen les seves extensions parella, senar i ℓ -periòdica.

En resum, tenim que la sèrie de Fourier en cosinus (és a dir, la corresponent a l'extensió parella) de la funció ve donada per

$$\mathcal{F}[f_p](x) = \frac{\ell^2}{3} + \frac{4\ell^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos \frac{n\pi x}{\ell},$$

amb $\mathcal{F}[f_p](x) = x^2$ a $0 < x < \ell$. *Observació:* de fet també a $-\ell \leq x \leq \ell$ atès que —en aquest cas—, la funció $f(x) = x^2$ coincideix amb la seva extensió parella a l'interval $-\ell < x < \ell$ i a més pren els mateixos valors als extrems.

(b) Ara considerarem l'extensió senar:

$$f_s(x) = \begin{cases} f(x) = x^2, & 0 < x < \ell, \\ -f(-x) = -x^2, & -\ell < x \leq 0. \end{cases} \quad (13)$$

Com que obviament $f_s(x)$ és una funció senar, els coeficients del terme independent i dels termes en cosinus són tots nuls, i. e.: $a_0 = 0$ i $a_n = 0$ per tot $n = 1, 2, 3, \dots$. Els coeficients dels termes en sinus es calculen per la fórmula:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f_s(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell} dx = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell} dx = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} x^2 \sin \frac{n\pi x}{\ell} dx = -\frac{2}{n\pi} \int_0^{\ell} x^2 d\left(\cos \frac{n\pi x}{\ell}\right) \\ &\stackrel{\text{parts}}{=} -\frac{2}{n\pi} \left[x^2 \cos \frac{n\pi x}{\ell} \right]_0^{\ell} + \frac{4}{n\pi} \times \frac{\ell}{n\pi} \int_0^{\ell} x d\left(\sin \frac{n\pi x}{\ell}\right) \stackrel{\text{parts}}{=} -\frac{2\ell^2}{n\pi} (-1)^n + \frac{4\ell}{n^2\pi^2} \left[x \sin \frac{n\pi x}{\ell} \right]_0^{\ell} \\ &\quad + \frac{4\ell}{n^2\pi^2} \times \frac{\ell}{n\pi} \int_0^{\ell} d\left(\cos \frac{n\pi x}{\ell}\right) = -\frac{2\ell^2}{n\pi} (-1)^n + \frac{4\ell^2}{n^3\pi^3} ((-1)^n - 1) \end{aligned}$$

on a la segona integració per parts de dalt tenim que

$$\frac{4\ell}{n^2\pi^2} \left[x \sin \frac{n\pi x}{\ell} \right]_0^{\ell} = \frac{4\ell^2}{n^2\pi^2} \sin n\pi = 0,$$

per tot $n = 1, 2, 3, \dots$; i els coeficients b_n resulten

$$b_n = \begin{cases} -\frac{2\ell^2}{n\pi}, & n = 2, \\ \frac{2\ell^2}{n\pi} - \frac{8\ell^2}{n^3\pi^3}, & n \neq 2. \end{cases}$$

Aleshores, la sèrie de Fourier en sinus de la funció és:

$$\mathcal{F}[f_s](x) = -\frac{\ell^2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{2n\pi x}{\ell} + \frac{\ell^2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{2n-1} - \frac{8}{(2n-1)^3\pi^2} \right) \sin \frac{(2n-1)\pi x}{\ell} = x^2,$$

per $0 \leq x < \ell$.

(c) Busquem el desenvolupament en sèrie de Fourier de la funció en $0 < x < \ell$, per tant una sèrie del tipus:

$$\mathcal{F}[f](x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2n\pi x}{\ell} + b_n \sin \frac{2n\pi x}{\ell} \right), \quad (14)$$

on els coeficients vénen donats ara per:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} x^2 dx = a_0(f_p) = \frac{2}{3}\ell^2; \\ a_n &= \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} x^2 \cos \frac{2n\pi x}{\ell} dx = a_{2n}(f_p) = \frac{\ell^2}{n^2\pi^2}, \\ b_n &= \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} x^2 \sin \frac{2n\pi x}{\ell} dx = b_{2n}(f_s) = -\frac{\ell^2}{n\pi}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Substituint aquests coeficients en (14):

$$\mathcal{F}[f](x) = \frac{\ell^2}{3} + \frac{\ell^2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2\pi} \cos \frac{2n\pi x}{\ell} - \frac{1}{n} \sin \frac{2n\pi x}{\ell} \right) = x^2, \quad 0 < x < \ell.$$

A la figura 5 es representen l'extensió parella, senar i ℓ -periòdica a partir de la funció $f(x) = x^2$ definida a l'interval $0 < x < \ell$. ▷

- 38.** (a) Trobeu la forma general de la sèrie de Fourier en cosinus i de la sèrie de Fourier en sinus a $[0, C]$ per funcions que compleixen la relació $f(C-x) = f(x)$.
 (b) Mateixa pregunta per $f(C-x) = -f(x)$.

◁ **Solució.** (a.1) Sèrie de Fourier en cosinus:

$$\mathcal{F}[f_p](x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{C}, \quad (15)$$

essent f_p l'extensió parella de la funció, i. e.:

$$f_p(x) = \begin{cases} f(x), & 0 < x \leq C, \\ f(-x), & -C \leq x \leq 0. \end{cases} \quad (16)$$

Aleshores, calculant explícitament els coeficients:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{C} \int_0^C f(x) dx = \frac{2}{C} \int_0^{C/2} f(x) dx + \frac{2}{C} \int_{C/2}^C f(x) dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{c. v.: } y = C - x, \\ \text{d'on: } dx = -dy; \\ x = C/2 \Rightarrow y = C/2; \\ x = C \Rightarrow y = 0. \end{array} \right\} \\ &= \frac{2}{C} \int_0^{C/2} f(x) dx - \frac{2}{C} \int_{C/2}^0 f(C-y) dy \stackrel{f(C-y)=f(y)}{=} \frac{4}{C} \int_0^{C/2} f(x) dx; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{C} \int_0^C f(x) \cos \frac{n\pi x}{C} dx = \frac{2}{C} \int_0^{C/2} f(x) \cos \frac{n\pi x}{C} dx + \frac{2}{C} \int_{C/2}^C f(x) \cos \frac{n\pi x}{C} dx \\
&= \left\{ \begin{array}{l} \text{c. v.: } y = C - x, \\ \text{d'on: } dx = -dy; \quad x = C/2 \Rightarrow y = C/2; \quad x = C \Rightarrow y = 0; \\ \cos \frac{n\pi}{C}(C - y) = \cos \left(n\pi - \frac{n\pi y}{C} \right) = (-1)^n \cos \frac{n\pi y}{C}. \end{array} \right\} \\
&= \frac{2}{C} \int_0^{C/2} f(x) \cos \frac{n\pi x}{C} dx + \frac{2}{C} (-1)^n \int_0^{C/2} f(C - y) \cos \frac{n\pi y}{C} dy \\
&\stackrel{f(C-y)=f(y)}{=} \frac{2}{C} (1 + (-1)^n) \int_0^{C/2} f(x) \cos \frac{n\pi x}{C} dx = \begin{cases} 0, & n \neq 2, \\ \frac{4}{C} \int_0^{C/2} f(x) \cos \frac{n\pi x}{C} dx, & n = 2, \end{cases}
\end{aligned}$$

per $n = 1, 2, 3, \dots$ Resumint:

$$a_0 = \frac{4}{C} \int_0^{C/2} f(x) dx; \quad b_n = a_{2n-1} = 0, \quad a_{2n} = \frac{4}{C} \int_0^{C/2} f(x) \cos \frac{2n\pi x}{C} dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Finalment, substituïnt al desenvolupament (15):

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[f_p](x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} \cos \frac{2n\pi x}{C} \\
&= \frac{2}{C} \int_0^{C/2} f(y) dy + \frac{4}{C} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^{C/2} f(y) \cos \frac{2n\pi y}{C} dy \right) \cos \frac{2n\pi x}{C}.
\end{aligned}$$

(a.2) Ara, desenvoluparem l'extensió senar de la funció, i. e.:

$$f_s(x) = \begin{cases} f(x), & 0 \leq x \leq C, \\ -f(-x), & -C \leq x < 0. \end{cases} \quad (17)$$

Sabem que la sèrie de Fourier serà de la forma:

$$\mathcal{F}[f_s](x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{C}.$$

(sèrie en sinus). Calculem a continuació els coeficients b_n per $n = 1, 2, 3, \dots$:

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{C} \int_0^C f(x) \sin \frac{n\pi x}{C} dx = \frac{2}{C} \int_0^{C/2} f(x) \sin \frac{n\pi x}{C} dx + \frac{2}{C} \int_{C/2}^C f(x) \sin \frac{n\pi x}{C} dx \\
&= \left\{ \begin{array}{l} \text{c. v.: } y = C - x, \\ \text{d'on: } dx = -dy; \quad x = C/2 \Rightarrow y = C/2; \quad x = C \Rightarrow y = 0; \\ \sin \frac{n\pi x}{C} = \sin \frac{n\pi}{C}(C - y) = \sin \left(n\pi - \frac{n\pi y}{C} \right) = (-1)^{n+1} \sin \frac{n\pi y}{C} \end{array} \right\} \\
&= \frac{2}{C} \int_0^{C/2} f(x) \sin \frac{n\pi x}{C} dx + \frac{2}{C} (-1)^{n+1} \int_0^{C/2} f(C - y) \sin \frac{n\pi y}{C} dy \\
&\stackrel{f(C-y)=f(y)}{=} \frac{2}{C} (1 + (-1)^{n+1}) \int_0^{C/2} f(x) \sin \frac{n\pi x}{C} dx = \begin{cases} 0, & n = 2, \\ \frac{4}{C} \int_0^{C/2} f(x) \sin \frac{n\pi x}{C} dx, & n \neq 2. \end{cases}
\end{aligned}$$

Així doncs, els coeficients queden:

$$a_0 = 0; \quad a_n = b_{2n} = 0, \quad b_{2n-1} = \frac{4}{C} \int_0^{C/2} f(x) \sin \frac{(2n-1)\pi x}{C} dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

de manera que per substitució en (17):

$$\mathcal{F}[f_s](x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n-1} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{C} = \frac{4}{C} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^{C/2} f(y) \sin \frac{(2n-1)\pi y}{C} dy \right) \sin \frac{(2n-1)\pi x}{C}.$$

(b.1) Com als dos apartats anteriors considerarem les extensions parella i senar —les quals vénen donades, de manera genèrica per (16) i (13) respectivament—. Els coeficients per la sèrie en cosinus es calcularan igual que a l'apartat (a.1) tenint en compte però la nova simetria (és a dir: $f(C-x) = -f(x)$). De nou, fent els càlculs:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{C} \int_0^C f(x) dx = \frac{2}{C} \int_0^{C/2} f(x) dx + \frac{2}{C} \int_{C/2}^C f(x) dx = \left. \begin{array}{l} \text{c. v.: } y = C - x, \\ \text{d'on: } dx = -dy; \\ x = C/2 \Rightarrow y = C/2; \\ x = C \Rightarrow y = 0. \end{array} \right\} \\ &= \frac{2}{C} \int_0^{C/2} f(x) dx - \frac{2}{C} \int_{C/2}^0 f(C-y) dy = \frac{2}{C} \int_0^{C/2} f(x) dx + \frac{2}{C} \int_0^{C/2} f(C-x) dx \\ &\stackrel{f(C-y)=-f(y)}{=} 0; \\ a_n &= \frac{2}{C} \int_0^C f(x) \cos \frac{n\pi x}{C} dx = \frac{2}{C} \int_0^{C/2} f(x) \cos \frac{n\pi x}{C} dx + \frac{2}{C} \int_{C/2}^C f(x) \cos \frac{n\pi x}{C} dx \\ &= \left. \begin{array}{l} \text{c. v.: } y = C - x, \\ \text{d'on: } dx = -dy; x = C/2 \Rightarrow y = C/2; x = C \Rightarrow y = 0; \\ \cos \frac{n\pi}{C}(C-y) = \cos \left(n\pi - \frac{n\pi y}{C} \right) = (-1)^n \cos \frac{n\pi y}{C}. \end{array} \right\} \\ &= \frac{2}{C} \int_0^{C/2} f(x) \cos \frac{n\pi x}{C} dx + \frac{2}{C} (-1)^n \int_0^{C/2} f(C-y) \cos \frac{n\pi y}{C} dy \\ &\stackrel{f(C-y)=-f(y)}{=} \frac{2}{C} (1 + (-1)^{n+1}) \int_0^{C/2} f(x) \cos \frac{n\pi x}{C} dx = \begin{cases} 0, & n = 2, \\ \frac{4}{C} \int_0^{C/2} f(x) \cos \frac{n\pi x}{C} dx, & n \neq 2, \end{cases} \end{aligned}$$

per $n = 1, 2, 3, \dots$. O sigui:

$$a_0 = 0; \quad b_n = a_{2n} = 0, \quad a_{2n-1} = \frac{4}{C} \int_0^{C/2} f(x) \cos \frac{(2n-1)\pi x}{C} dx, \quad \text{per } n = 1, 2, 3, \dots$$

En conseqüència, la sèrie de Fourier en cosinus vindrà ara donada per:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f_p](x) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} \cos \frac{(2n-1)\pi x}{C} \\ &= \frac{4}{C} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^{C/2} f(y) \cos \frac{(2n-1)\pi y}{C} dy \right) \cos \frac{(2n-1)\pi x}{C}. \end{aligned}$$

(b.2) Procedirem exactament com a (a.2) aplicant però, al final del càlcul, que $f(C-x) = -f(x)$, i. e.:

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{2}{C} \int_0^C f(x) \sin \frac{n\pi x}{C} dx = \frac{2}{C} \int_0^{C/2} f(x) \sin \frac{n\pi x}{C} dx + \frac{2}{C} \int_{C/2}^C f(x) \sin \frac{n\pi x}{C} dx \\
 &= \left. \begin{aligned} &\text{c. v.: } y = C - x, \\ &\text{d'on: } dx = -dy; \quad x = C/2 \Rightarrow y = C/2; \quad x = C \Rightarrow y = 0; \\ &\sin \frac{n\pi x}{C} = \sin \frac{n\pi}{C} (C - y) = \sin \left(n\pi - \frac{n\pi y}{C} \right) = (-1)^{n+1} \sin \frac{n\pi y}{C} \end{aligned} \right\} \\
 &= \frac{2}{C} \int_0^{C/2} f(x) \sin \frac{n\pi x}{C} dx + \frac{2}{C} (-1)^{n+1} \int_0^{C/2} f(C-y) \sin \frac{n\pi y}{C} dy \\
 &\stackrel{f(C-y) = -f(y)}{=} \frac{2}{C} (1 + (-1)^n) \int_0^{C/2} f(x) \sin \frac{n\pi x}{C} dx = \begin{cases} 0, & n \neq 2, \\ \frac{4}{C} \int_0^{C/2} f(x) \sin \frac{n\pi x}{C} dx, & n = 2. \end{cases}
 \end{aligned}$$

per $n = 1, 2, 3, \dots$. Per tant, els coeficients vénen donats per:

$$a_0 = 0; \quad a_n = b_{2n-1} = 0, \quad b_{2n} = \frac{4}{C} \int_0^{C/2} f(x) \sin \frac{2n\pi x}{C} dx, \quad \text{per } n = 1, 2, 3, \dots$$

i el desenvolupament:

$$\mathcal{F}[f_s](x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n} \sin \frac{2n\pi x}{C} = \frac{4}{C} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^{C/2} f(y) \sin \frac{2n\pi y}{C} dy \right) \sin \frac{2n\pi x}{C}$$

és el desenvolupament de Fourier en sinus buscat. \triangleright

39. Desenvolueu la funció $\cos xz$ en sèrie de Fourier a l'interval $[-\pi, \pi]$, on z és un paràmetre real. Proveu les igualtats:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\sin \pi z} &= \frac{2z}{\pi} \left(\frac{1}{2z^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2 - z^2} \right) \\
 \cot \pi z &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{z} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z}{k^2 - z^2} \right)
 \end{aligned}$$

i deduiu que

$$\begin{aligned}
 \pi &= 2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{k+1}}{4k^2 - 1} \\
 \pi &= 4 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{16k^2 - 1}.
 \end{aligned}$$

\triangleleft **Solució.** Sigui $f(x) = \cos xz$, $x \in [-\pi, \pi]$, $z \in \mathbb{R}$. Notem que és una funció parella i per tant, la seva sèrie de Fourier és una sèrie en cosinus (aleshores $b_n = 0$ per tot $n \in \mathbb{N}$). Si es calculen els seus coeficients s'obté:

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos xz dx = \frac{2}{\pi z} \int_0^{\pi} d(\sin xz) = \frac{2}{\pi z} \sin \pi z; \\
 a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos xz \cos nx dx \stackrel{(\dagger)}{=} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [\cos(z+n)x + \cos(z-n)x] dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin(z+n)x}{z+n} + \frac{\sin(z-n)x}{z-n} \right]_0^{\pi} \stackrel{(\ddagger)}{=} (-1)^n \left(\frac{1}{z+n} + \frac{1}{z-n} \right) \sin \pi z = \frac{2(-1)^{n+1}}{n^2 - z^2} z \sin \pi z,
 \end{aligned}$$

per $n = 1, 2, 3, \dots$

REMARCA 3.5. Aquí suposem que $z \notin \mathbb{Z}$ (notem que si $z = k \in \mathbb{Z}$, el desenvolupament en sèrie de Fourier de $f(x) = \cos xz$ és trivial).

Amb els coeficients calculats a dalt, la sèrie de Fourier esdevé:

$$\mathcal{F}[f](x) = \frac{2z \sin \pi z}{\pi} \left(\frac{1}{2z^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2 - z^2} \cos kx \right).$$

Per determinar cap a on convergeix la sèrie a l'interval $[-\pi, \pi]$ tenim, per aplicació directa del teorema de Dirichlet:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f](x) &= \cos xz, \quad \text{per } -\pi < x < \pi, \\ \mathcal{F}[f](\pm\pi) &= \frac{1}{2} (f(-\pi^+) + f(\pi^-)) = \frac{1}{2} (\cos(-\pi z) + \cos \pi z) = \cos \pi z \end{aligned} \quad (18)$$

o sigui:

$$\mathcal{F}[f](x) = \frac{2z \sin \pi z}{\pi} \left(\frac{1}{2z^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2 - z^2} \cos kx \right) = \cos xz, \quad \text{per tot } -\pi \leq x \leq \pi.$$

D'acord amb això, agafant $x = 0 \in (-\pi, \pi)$:

$$\mathcal{F}[f](0) = \frac{2z \sin \pi z}{\pi} \left(\frac{1}{2z^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2 - z^2} \right) = \cos(z \cdot 0) = 1$$

i dividint a tots dos costats per $\sin \pi z$:

$$\frac{1}{\sin \pi z} = \frac{2z}{\pi} \left(\frac{1}{2z^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2 - z^2} \right), \quad (19)$$

on es suposa $z \notin \mathbb{Z}$. Tanmateix, prenent $x = \pi$ i d'acord amb (18),

$$\mathcal{F}[f](\pi) = \frac{2z \sin \pi z}{\pi} \left(\frac{1}{z^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2 - z^2} (-1)^k \right) = \frac{2z \sin \pi z}{\pi} \left(\frac{1}{z^2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 - z^2} \right) = \cos \pi z.$$

Com dalt, asumint que $z \notin \mathbb{Z}$, dividim a dreta i esquerra per $\sin \pi z$ per obtenir

$$\cot \pi z = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{z} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z}{k^2 - z^2} \right). \quad (20)$$

Per últim, prenent en (19) $z = 1/2$:

$$1 = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{2 \times \frac{1}{4}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2 - \frac{1}{4}} \right) \implies \pi = 2 + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{4k^2 - 1}$$

i $z = 1/4$ en (20),

$$1 = \frac{1}{\pi} \left(4 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 \times \frac{1}{4}}{k^2 - \frac{1}{16}} \right) \implies \pi = 4 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{16k^2 - 1}$$

s'obtenen les dues últimes sumes proposades a l'enunciat. \triangleright

(†) Fem servir la mateixa identitat trigonomètrica del problema 33: $\cos a \cos b = \frac{1}{2} (\cos(a+b) + \cos(a-b))$, ara però identificant $a = xz$ i $b = nx$.

(‡) En aplicar la "regla" de Barrow per $x = 0$ tots dos termes es fan zero: $\sin(z+n) \cdot 0 = \sin(z-n) \cdot 0 = 0$, mentre que a $x = \pi$ és $\sin(z \pm n)\pi = \sin \pi z \cos n\pi \pm \cos \pi z \sin n\pi = (-1)^n \sin \pi z$ (recordem que, per tot $n \in \mathbb{Z}$: $\cos n\pi = (-1)^n$ i $\sin n\pi = 0$).