09/06/2015. Signi $f(x)$, $x\in[0,\pi]$ una funció contínua a trossos amb sèrie de cosinus finita $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{N} a_n\cos(nx)$. Sabem que $\int_0^{\pi}(f(x))^2dx = 15\pi$ i que la mitjana de la funció és $\bar{f}=3$. Llavors: quant val $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$.

Solució. Apliquem la identitat de Perceval: $\frac{1}{\pi}\|f\|^2 = \frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2+\sum_{n=1}^{\infty}b_n^2$

Considerem l'extensió parella de f, f_p

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f_p(x))^2dx = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f_p(x)\,dx\right)^2+\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2+\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}b_n^2}_{=0}$$

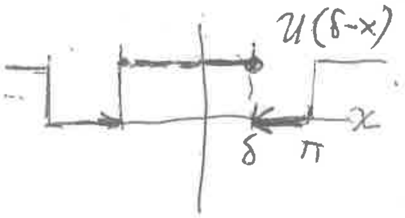
$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{N}a_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty}a_n^2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f_p(x))^2dx - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f_p(x)\,dx\right)^2 =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(f(x))^2dx - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)dx\right)^2$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(f(x))^2dx - \frac{4}{2}\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)dx\right)^2 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(f(x))^2dx - 2(\bar{f})^2$$

$$= \frac{2}{\cancel{\pi}}\cdot 15\cancel{\pi} - 2\cdot 3^2 = 30-18 = \boxed{12}$$

09/06/2015. Calculeu la suma de la sèrie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n\delta)}{n}$, $0<\delta<\pi$. Ajut: considereu la sèrie de cosinus de $f(x)=U(\delta-x)$, $x\in(0,\pi)$, on U és la funció esglaó



Solució. Calculem la sèrie de Fourier en cosinus:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}U(\delta-x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\delta}1\cdot dx = \frac{2\delta}{\pi}.$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}U(\delta-x)\cos(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\delta}1\cdot\cos(nx)dx = \frac{2\sin(n\delta)}{n\pi}$$

Aleshores:

$$\mathcal{F}_c[f](x) = \mathcal{F}[f_p](x) = \frac{\delta}{\pi}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n\delta)}{n}\cos(nx)$$

Aplicant el teorema de Dirichlet: $\mathcal{F}_c[f](\delta) = \mathcal{F}[f_p](\delta) = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2} = \frac{\delta}{\pi}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\sin(n\delta)\cos(n\delta)}{n}$

$$= \delta/\pi + 1/\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n\delta)}{n} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n\delta)}{n} = \boxed{\pi/2-\delta}$$