Problema 23. Apartats (c), (d), (e)

23. Useu coordenades cartesianes, cilíndriques o esfèriques (o bé el principi de Cavalieri) per a calcular el volum dels dominis de $\mathbb{R}^3$ limitades per les superfícies que s'indiquen.
    (c) $z^2 = x^2 + y^2$, $z = x^2 + y^2$ $(z \geq 0)$.
    (d) Part de l'esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ que és exterior al cilindre $x^2 + y^2 = b^2$ $(a > b > 0)$.
    (e) $z = x^2 - 4x + 1$, $1 - z = x^2 + y^2$.

Solució:

(c) Busquem el volum, $m(B)$, del domini B limitat "per sobre" pel con $z^2 = x^2 + y^2$, amb $z \geq 0$, i "per sota" pel paraboloide circular $z = x^2 + y^2$. En coordenades cilíndriques, aquesta regió la podem parametritzar com: $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq r \leq 1$, $r^2 \leq z \leq r$, Aleshores,

$$m(B) = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^1 r\mathrm{d}r \int_{r^2}^{r} \mathrm{d}z = 2\pi \int_0^1 r\left(1 - r^2\right)\mathrm{d}r = 2\pi \left(\frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{4}\right)\bigg|_0^1 = \frac{\pi}{6}.$$

(d) En coordenades cilíndriques el domini B descrit a l'enunciat es pot parametritzar mitjançant les desigualtats:

$$B : 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad b \leq r \leq a, \quad 0 \leq z \leq \sqrt{a^2 - r^2}.$$

Llavors, el volum corresponent, $m(B)$, resulta

$$m(B) = 8\int_0^{\pi/4} \mathrm{d}\theta \int_b^a r\mathrm{d}r \int_0^{\sqrt{a^2-r^2}} \mathrm{d}z = 4\pi \int_b^a r\sqrt{a^2 - r^2}\,\mathrm{d}r = \frac{4\pi}{3}\left[-\left(a^2 - r^2\right)\right|_{r=b}^{r=a}$$
$$= \frac{4\pi}{3}\left(a^2 - b^2\right)^{3/2}.$$

(e) La regió definida per les superfícies de l'enunciat està limitada "per sobre" pel paraboloide circular $z = 1 - x^2 - y^2$ i "per sota" pel cilindre parabòlic $z = x^2 - 4x + 1$.

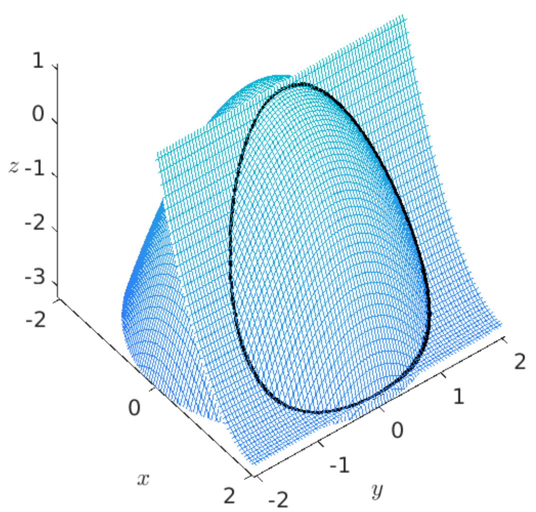

Figura 1. Domini B limitat per les superfícies $z = x^2 - 4x + 1$, $z = 1 - x^2 - y^2$.

La projecció sobre el pla $z = 0$ de la regió, B, definida per les dues superfícies (vegeu la figura 1) ve donada per l'el·lipse $\mathcal{E} : (x - 1)^2 + y^2/2 \leq 1$. Amb això,

$$m(B) = \iint_{\mathcal{E}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \int_{x^2-4x+1}^{1-x^2-y^2} \mathrm{d}z$$
$$= -2\iint_{\mathcal{E}} \left((x-1)^2 + \frac{y^2}{2} - 1\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad (1)$$

Fent servir les coordenades polars adaptades, $x = 1 + r\cos\theta$, $y = \sqrt{2}r\sin\theta$, la integral (1) es pot reescriure com

$$m(B) = -2\sqrt{2}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^1 r\left(r^2 - 1\right)\mathrm{d}r = \pi\sqrt{2}.$$